5.302. Задано вершину $A(1;3)$ і рівняння медіан $2y - x = 1, y = 1$ трикутника ABC. Записати координати його вершин B, C і рівняння його сторін.
Відповідь: $AB : 2y + x = 7$; $BC : x - 4y = 1$; $AC : y = x + 2$; $B(5;1)$; $C(-3;-1)$.

•

5.303. Записати рівняння прямої, що симетрична прямій $2x - y + 1 = 0$ відносно осі ординат.
Відповідь: $2x + y - 1 = 0$.
5.304. Записати рівняння прямої, що симетрична прямій $2x - y + 1 = 0$ відносно осі абсцис.
Відповідь: $2x + y + 1 = 0$.
5.305. Записати рівняння прямої, що симетрична прямій $2x - y + 1 = 0$ відносно початку координат.
Відповідь: $2x - y - 1 = 0$.
5.306. Записати рівняння прямої, що симетрична прямій $2x - y + 1 = 0$ відносно прямої $y = x$.
Відповідь: $x - 2y - 1 = 0$.
5.307. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M(3;-1)$ і перетинає осі координат у точках, рівновіддалених від початку координат.
Відповідь: $x + y - 2 = 0$, $x - y - 4 = 0$.
5.308. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M(8;6)$ і відтинає від координатного кута трикутник, площа якого дорівнює 12 кв. од.
Відповідь: $3x - 2y - 12 = 0$, $3x - 8y + 24 = 0$.
5.309. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M(2;1)$ під кутом $\pi/4$ до прямої $2x + 3y + 4 = 0$.
Відповідь: $x - 5y + 3 = 0$, $5x + y - 11 = 0$.

•

5.310. Записати рівняння дотичних до параболи $y = x^2$, що проведені з точки $M(0,5;0)$.
Відповідь: $y = 0$; $y = 2x - 1$.
5.310.* [1, § 33, приклад 6, с. 188] Записати рівняння дотичних до параболи $y = x^2$, що проведені з точки $M(1;-1)$, і знайти точки дотику.
Відповідь: дотичні $y = (2 + 2\sqrt{2})x - 3 - 2\sqrt{2}$ і $y = (2 - 2\sqrt{2})x - 3 + 2\sqrt{2}$ дотикаються до параболи $y = x^2$ відповідно в точках $(1 + \sqrt{2},\ 3 + 2\sqrt{2})$ і $(1 - \sqrt{2},\ 3 - 2\sqrt{2})$.
5.311. Записати рівняння дотичних до параболи $y = x^2 + 2x + 3$, що проведені з точки $M(0;2)$.
Відповідь: $y = 2$; $y = 4x + 2$.

5.312. Записати рівняння дотичних до параболи $y = x^2 - 4x + 3$, що проведені з точки $M(2; -5)$.
Відповідь: $y = 4x - 13$; $y = -4x + 3$.
5.313. Записати рівняння дотичних до параболи $y = x^2 - 3x + 4$, що проходять через початок координат.
Відповідь: $y = x$; $y = -7x$.
5.314. Записати рівняння дотичних до параболи $y = x^2 + 2x + 3$, що проходять через початок координат.
Відповідь: $y = 2(1 \pm \sqrt{3})x$.
5.315. Записати рівняння дотичних до кола $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9$, що проходять через початок координат.
Відповідь: $y = \dfrac{5 \pm 3\sqrt{2}}{4}x$.
5.316. Записати рівняння дотичних до кола $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$, що проведені з точки $M(1; 0)$.
Відповідь: $y = 0$; $4x - 3y = 4$.
5.317. Записати рівняння дотичних до гіперболи $y = \dfrac{4}{x}$, що проведені з точки $M(1; -1)$.
Відповідь: $y = (4\sqrt{5} - 9)x + 8 - 4\sqrt{5}$; $y = -(9 + 4\sqrt{5})x + 8 + 4\sqrt{5}$.
5.318. Записати рівняння дотичної до гіперболи $y = \dfrac{4}{x}$, що проведена з точки $M(1; 0)$.
Відповідь: $y = -16x + 16$.
•
5.319. Знайти кут між дотичними до параболи $y = 2x^2$, що проведені з точки $M(0; -2)$.
Відповідь: $\pi - 2\operatorname{arctg} 4$.
5.320. Знайти кут між дотичними до параболи $y = 1 - 2x^2$, що проведені з точки $M(0; 3)$.
Відповідь: $2\operatorname{arctg} \dfrac{1}{4}$.
5.321. До параболи $y = x^2 - 4x + 2$ з точки $M(1; -4)$ проведено дотичні. Знайти відстань між точками дотику.
Відповідь: $2\sqrt{15}$.
5.322. До параболи $y = -x^2 + 2x + 3$ з точки $M(0; 5)$ проведено дотичні. Знайти відстань між точками дотику.
Відповідь: $2\sqrt{10}$.
5.323. Записати рівняння дотичної до параболи $y = 2x^2 - 4x$, що проходить через точку $M(-1; -2)$. Записати також рівняння дотичної, яка симетрична вказаній дотичній відносно осі параболи.
Відповідь: через точку M проходять дві дотичні $y = -2$ і $y = -16x - 18$, їм симетричні відносно осі параболи – дотичні $y = -2$ і $y = 16x - 50$.

6.2. Геометричний зміст похідної

Група А

6.31.* [1, § 37, приклади 1-3, с. 217, 218] Знайти похідну функцій:
а) $y = (x^3 - 3x^2 + 5x - \pi)\cos x$; б) $y = \dfrac{3x+1}{2x-3}$.
в) $y(x) = \sqrt{3x^2+5x+1}$; г) $y(x) = \sqrt[3]{x^2+3x-5}$;
д) $y(x) = \dfrac{5}{\sqrt{2x-1}}$; е) $y(x) = \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$;
ж) $y(x) = f(kx+b)$, де функція f має похідну f', а k і b – деякі сталі, відмінні від нуля; з) $y(x) = \sin x^2$; и) $y(x) = \sin^2 x$;
к) $y(x) = \ln^3(x^2+4)$; л)$y(x) = \dfrac{\sqrt{3-x}}{1-x}$.
Відповідь: а) $y' = (3x^2 - 6x + 5)\cos x - (x^3 - 3x^2 + 5x - \pi)\sin x$;
б) $y' = -\dfrac{11}{(2x-3)^2}$; в) $y' = \dfrac{6x+5}{2\sqrt{3x^2+5x+1}}$; г) $y'(x) = \dfrac{2x+3}{3\sqrt[3]{(x^2+3x-5)^2}}$;
д) $y'(x) = -\dfrac{5}{\sqrt{(2x-1)^3}}$; е) $y'(x) = -3\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; ж) $y'(x) = kf'(kx+b)$;
з) $y'(x) = 2x\cos x^2$; і) $'(x) = \sin 2x$; к) $y'(x) = \dfrac{6x}{x^2+4}\ln^2(x^2+4)$;
л) $y'(x) = \dfrac{5-x}{2\sqrt{3-x}(1-x)^2}$.
•
Записати рівняння дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0 (завдання **6.31** – **6.60**):
6.31. $f(x) = x^2 + 4x - 2,\ x_0 = 1$. Відповідь: $y = 6x - 3$.
6.32. $f(x) = 2 - 4x - 3x^2,\ x_0 = -2$. Відповідь: $y = 8x + 14$.
6.33. $f(x) = x^3 + \sqrt{x},\ x_0 = 4$. Відповідь: $y = \dfrac{193}{4}x - 127$.
6.34. $f(x) = x^3 + x\sqrt{x},\ x_0 = 4$. Відповідь: $y = 51x - 132$.
6.35. $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x,\ x_0 = \pi/4$. Відповідь: $y = 2$.
6.36. $f(x) = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) + 2,\ x_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Відповідь: $y = -\sqrt{3}x + \dfrac{\pi\sqrt{3}+3}{2}$.
6.37. $f(x) = \sin 2x \cos 6x,\ x_0 = 0$. Відповідь: $y = 2x$.
6.38. $f(x) = x\cos x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{6}$. Відповідь: $y = \dfrac{6\sqrt{3}-\pi}{12}x + \dfrac{\pi^2}{72}$.
6.39. $f(x) = 2^x \cos 2x,\ x_0 = 0$. Відповідь: $y = x\ln 2 + 1$.
6.40. $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2},\ x_0 = -1$. Відповідь: $y = x + 1$.
6.40.* [1, § 38, приклад 1, с. 219] $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x-3},\ x_0 = 1$.
Відповідь: $y = -11x + 7$.

6.41. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1},\ x_0 = 1$. Відповідь: $y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{4}$.
6.42. $f(x) = \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{1}{x},\ x_0 = 1$. Відповідь: $y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{9}{4}$.
6.43. $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos x},\ x_0 = 0$. Відповідь: $y = \dfrac{1}{2}x$.
6.44. $f(x) = \sqrt{4x-8},\ x_0 = 3$. Відповідь: $y = x - 1$.
6.45. $f(x) = \sqrt{2x^2+3x+2},\ x_0 = 2$. Відповідь: $y = \dfrac{11}{8}x + \dfrac{5}{4}$.
6.46. $f(x) = \sqrt[3]{6x+2},\ x_0 = 1$. Відповідь: $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$.
6.47. $f(x) = \sqrt[3]{3x^2+6x-16},\ x_0 = 2$. Відповідь: $y = \dfrac{3}{2}x - 1$.
6.48. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}},\ x_0 = 3$. Відповідь: $y = -\dfrac{x}{16} + \dfrac{11}{16}$.
6.49. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}},\ x_0 = -1$. Відповідь: $y = -x$.
6.50. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x-4}},\ x_0 = 1$. Відповідь: $y = -3x + 4$.
6.51. $f(x) = \cos^2\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right),\ x_0 = 0$. Відповідь: $y = -2x + \dfrac{1}{2}$.
6.52. $f(x) = \sin^2\sqrt{x},\ x_0 = \dfrac{\pi^2}{9}$. Відповідь: $y = \dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}\left(x - \dfrac{\pi^2}{9}\right) + \dfrac{3}{4}$.
6.53. $f(x) = (x^2+1)^3\sin 3x,\ x_0 = 0$. Відповідь: $y = 3x$.
6.54. $f(x) = \dfrac{\sin^3\frac{x}{2}}{\cos x},\ x_0 = \pi$. Відповідь: $y = -1$.
6.55. $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x}},\ x_0 = \pi$. Відповідь: $y = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}x - 2\sqrt{\pi}$.
6.56. $f(x) = (x^2+1)^2\ln x,\ x_0 = 1$. Відповідь: $y = 4x - 4$.
6.57. $f(x) = \sqrt{3+x^2} + \dfrac{2x}{x+1},\ x_0 = 1$. Відповідь: $y = x + 2$.
6.58. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1},\ x_0 = 0$. Відповідь: $y = \dfrac{1}{8}x + \dfrac{1}{2}$.
6.59. $f(x) = \ln\dfrac{x^4+1}{x^2+2},\ x_0 = 1$. Відповідь: $y = \dfrac{4}{3}x + \ln\dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{3}$.
6.60. $f(x) = |x^2 - |x||,\ x_0 = -2$. Відповідь: $y = -3x - 4$.

•

6.61. Записати рівняння дотичної до параболи $y = x^2 - 2x$ у точці $(3; 3)$.
Відповідь: $y = 4x - 9$.
6.62. Записати рівняння дотичної до кривої $y = \ln x$ у точці її перетину з віссю абсцис.
Відповідь: $y = x - 1$.
6.63. Знайти кут між дотичними до графіка функції $y = 2x^3 + x$ у точках з абсцисами $x_1 = -1$ і $x_2 = 0$.
Відповідь: $\operatorname{arctg} 7 - \frac{\pi}{4}$.

6.64. Знайти кут між дотичними до графіка функції $y = x^3 - 3x^2$ у точках з абсцисами $x_1 = -2$ і $x_2 = 1$.
Відповідь: $\pi - \operatorname{arctg} 24 - \operatorname{arctg} 3$.
6.65. Знайти кут між дотичними, проведеними до графіків функцій $y = \sqrt{3}\sin(x/3)$ і $y = 2^{2x+1}/\ln 16$, якщо точки дотику мають спільну абсцису $x_0 = 0$.
Відповідь: $\pi/12$.
6.66. Знайти кут між дотичними, проведеними до графіків функцій $y = -\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$ і $y = x\sin x$, якщо точки дотику мають спільну абсцису $x_0 = 0$.
Відповідь: $\pi/4$.

•

6.67. На кривій $y = x^3 - 3x + 2$ знайти точки, в яких дотична паралельна прямій $y = 3x$.
Відповідь: $(\sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})$ і $(-\sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$.
6.68. Записати рівняння дотичної до параболи $y = x^2$, яка паралельна прямій $y = 4x$.
Відповідь: $y = 4x - 4$.
6.69. Записати рівняння дотичної до параболи $y = x^2 - 6x + 8$, яка паралельна прямій $4x + y - 5 = 0$.
Відповідь: $y = -4x + 7$.
6.70. Записати рівняння дотичної до параболи $y = x^2 - 7x + 3$, яка паралельна прямій $5x + y - 8 = 0$.
Відповідь: $y = -5x + 2$.
6.71. На кривій $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + 2$ знайти точки, в яких дотичні паралельні прямій $y = 2x + 1$. Записати рівняння цих дотичних.
Відповідь: $(-1; 5/3)$; $(3; -1)$; $y = 2x + \frac{11}{3}$ і $y = 2x - 7$.
6.72. На графіку функції $y = x - \ln(x + 1)$ знайти точку, в якій дотична паралельна прямій AB, де $A(2; 3)$ і $B(-1; 4)$.
Відповідь: $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{4} - \ln\frac{3}{4}\right)$.
6.73. В якій точці кривої $y = \sqrt{2}x^{3/2}$ дотична перпендикулярна до прямої $4x + 3y + 2 = 0$?
Відповідь: $\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{16}\right)$.
6.74. Записати рівняння дотичної до параболи $y = 4x^2 - 6x - 3$, яка перпендикулярна до прямої $x + 2y - 7 = 0$.
Відповідь: $y = 2x - 7$.

6.74.* [1, § 38, приклад 3, с. 220] Записати рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{2x-1}}$, проведеної перпендикулярно до прямої $l\,:\,5y - x - 6 = 0$.
Відповідь: $y = 10 - 5x$.
6.75. Записати рівняння дотичної до параболи $y = 3x^2 - 2x + 4$, яка перпендикулярна до прямої $x + 4y - 2 = 0$.
Відповідь: $y = 4x + 1$.
6.76. Записати рівняння дотичної до параболи $y = -2x^2 + 4x - 7$, яка перпендикулярна до прямої $x + 8y + 2 = 0$.
Відповідь: $y = 8x - 5$.
6.77. Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^3 + 3x^2 - 5$, яка перпендикулярна до прямої $2x - 6y - 1 = 0$.
Відповідь: $y = -3x - 6$.
6.78. Записати рівняння дотичної до кривої $y = \ln x$, яка перпендикулярна до прямої $x + y - 5 = 0$.
Відповідь: $y = x - 1$.
6.79. Записати рівняння дотичних до графіка функції $y = \dfrac{x+1}{x-1}$, які є перпендикулярними до прямої, що проходить через точки $A(0; 4)$ і $B(-8; 0)$.
Відповідь: $y = -2x - 1$ і $y = -2x + 7$.
•
6.80. В яких точках кривої $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 7$ дотичні є паралельними до осі Ox?
Відповідь: $(1; -2)$, $(2; -3)$.
6.81. Записати рівняння дотичних до графіка функції $y = x^3 + \dfrac{3}{x}$, що є паралельними осі Ox.
Відповідь: $y = 4$, $y = -4$.
6.82. Записати рівняння дотичної до графіка функції $y = e^x + e^{-x}$, що є паралельною осі Ox.
Відповідь: $y = 2$.
6.83. На графіку функції $y = 5x - x^2$ знайти точку, в якій дотична утворює кут 45° з додатнім напрямком осі Ox. Записати рівняння цієї дотичної.
Відповідь: $(2; 6)$; $y = x + 4$.
6.84. На графіку функції $y = \dfrac{x+1}{x-3}$ знайти точки, в яких дотичні утворюють кут 135° з додатнім напрямком осі Ox. Записати рівняння цих дотичних.
Відповідь: $(5; 3)$; $(1; -1)$; $y = -x + 8$ і $y = -x$.
6.85. Записати рівняння дотичної до графіка функції $y = 4x - x^2$, яка разом з осями координат обмежує рівнобедрений трикутник.

Відповідь: $y = -x + \dfrac{25}{4}$, $y = x + \dfrac{9}{4}$.

6.86. Записати рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2 + 3x$, яка разом з осями координат обмежує рівнобедрений трикутник.

Відповідь: $y = x - 1$, $y = -x - 4$.

•

6.87. Знайти точки дотику графіків функцій:

1) $y = \cos x$ і $y = -\dfrac{1}{\pi}x^2 + 1$. Відповідь: $(0; 1)$.

2) $y = \cos x$ і $y = -\dfrac{1}{\pi}x^2 + 4x - \dfrac{15\pi}{4}$. Відповідь: $\left(\dfrac{3\pi}{2}; 0\right)$, $\left(\dfrac{5\pi}{2}; 0\right)$.

3) $y = \sin x$ і $y = \dfrac{1}{\pi}x^2 + x$. Відповідь: $(0; 0)$, $(-\pi; 0)$.

6.87.* [1, § 38, приклад 6, с. 221] Знайти точки дотику графіків функцій $y = \cos x$ і $y = -\dfrac{1}{\pi}x^2 + \dfrac{\pi}{4}$. Відповідь: $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ і $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$.

Група Б

6.88. Обчислити площу трикутника, обмеженого осями координат і дотичною до графіка функції $y = \dfrac{x}{2x-1}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Відповідь: 2 кв. од.

6.88.* [1, § 38, приклад 2, с. 219] Знайти площу трикутника, обмеженого віссю Oy, прямою $y = -15$ і дотичною до графіка функції $y = \dfrac{3x+1}{2x-3}$, проведеною в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Відповідь: 22 кв. од.

6.89. Обчислити площу трикутника, обмеженого осями координат і дотичною до графіка функції $y = \dfrac{x+3}{2x-1}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Відповідь: 121/14 кв. од.

6.90. До графіка функції $y = (3x + 2)^{-2}$ проведена дотична в точці з абсцисою $x_0 = -1$. Обчислити площу трикутника, обмеженого цією дотичною, віссю Ox і прямою $x = -2$.

Відповідь: 25/12 кв. од.

6.91. До графіка функції $y = (3x - 5)^{-2}$ проведена дотична в точці з абсцисою $x_0 = 2$. Обчислити площу трикутника, обмеженого цією дотичною, віссю Oy і прямою $y = 5$.

Відповідь: 16/3 кв. од.

6.92. Обчислити площу трикутника, обмеженого осями координат і дотичною до графіка функції $y = \dfrac{1}{x^2}$ в точці $M(x_0; y_0)$ такій, що $x_0 = 8y_0$.

Відповідь: 9/8 кв. од.

6.93. Обчислити площу трикутника, обмеженого осями координат і дотичною до графіка функції $y = -\dfrac{2}{x}$ в точці $M(x_0; y_0)$ такій, що $x_0 = -\dfrac{1}{2}y_0$.
Відповідь: 4 кв. од.

6.94. Обчислити площу трикутника, обмеженого осями координат і дотичною до графіка функції $y = \sqrt{2x^2 - 4}$, яка є паралельною прямій $y - 2x = 7$.
Відповідь: 1 кв. од.

6.95. Обчислити площу трикутника, обмеженого осями координат і дотичною до графіка функції $y = \sqrt{5 - x^2}$, яка є перпендикулярною до прямої $y - 2x = 7$.
Відповідь: $25/4$ кв. од.

6.96. Точка перетину двох дотичних до параболи $y = x^2 - 2x + 5$ і точки дотику є вершинами рівностороннього трикутника. Записати рівняння цих дотичних і обчислити площу вказаного трикутника.
Відповідь: $y = \sqrt{3}x + \dfrac{13}{4} - \sqrt{3}$ і $y = -\sqrt{3}x + \dfrac{13}{4} + \sqrt{3}$; $S = 3\sqrt{3}/4$.

•

6.97. Знайти рівняння спільної дотичної до кривих $y = x^2 + 4x + 8$ і $y = x^2 + 8x + 4$.
Відповідь: $y = 8x + 4$.

6.97.* [1, § 38, приклад 5, с. 220] Записати рівняння спільних дотичних до парабол $y = x^2$ і $y = -4 - x^2$.
Відповідь: $y = 2\sqrt{2}x - 2$ і $y = -2\sqrt{2}x - 2$.

6.98. Знайти рівняння спільної дотичної до кривих $y = x^2 + 2x$ і $y = -x^2 + 2x - 8$.
Відповідь: $y = -2x - 4$, $y = 6x - 4$.

6.99. До парабол $y = x^2 + 10$ і $y = -x^2 + 4x$ проведена спільна дотична. Знайти координати середини відрізка, що з'єднує точки дотику.
Відповідь: $(1; 7)$.

•

6.100. Пряма $y = -\dfrac{3}{4}x - \dfrac{3}{32}$ є дотичною до графіка функції $y = \dfrac{1}{2}x^4 - x$. Знайти точку дотику.
Відповідь: $\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{15}{32}\right)$.

6.101. Дві дотичні до графіка функції $y = \sqrt{17(x^2 + 1)}$ перетинаються під прямим кутом у деякій точці осі Oy. Записати рівняння дотичних.
Відповідь: $y = x + 4$ і $y = -x + 4$.

6.102. На графіку функції $y = x^3 - 3x^2 - 7x + 6$ знайти точки, в кожній з якій дотичні до цього графіка відтинають від додатньої півосі Ox удвічі менший відрізок, ніж від від'ємної півосі Oy.
Відповідь: $(3; -15)$.

6.103. При яких значеннях a і b пряма $y = 7x - 2$ дотикається до графіка функції $y = ax^3 + bx^2 + x + 2$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.
Відповідь: $a = 2$, $b = 0$.
6.104. При яких значеннях a і b пряма $y = -x + 4$ дотикається до графіка функції $y = ax^3 - 3bx^2 + 2x + 10$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$.
Відповідь: $a = -9$, $b = 4$.

6.3. Застосування похідної до дослідження функцій і доведення нерівностей

Група А

Знайти проміжки зростання й спадання, а також точки екстремума функції (завдання **6.105 – 6.119**):
6.105. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 2$. Відповідь: $f(x)$ зростає на $(-\infty; -2], [3; \infty)$ і спадає на $[-2; 3]$; $x = -2$ – точка максимума і $x = 3$ – точка мінімума.
6.106. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{8}{3}x^{3/2} + 3x + 7$. Відповідь: $f(x)$ зростає на $[0; 1], [9; \infty)$ і спадає на $[1; 9]$; $x = 1$ – точка максимума і $x = 9$ – точка мінімума.
6.107. $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Відповідь: $f(x)$ зростає на $(-\infty; -1], [1; \infty)$ і спадає на $[-1; 0), (0; 1]$; $x = -1$ – точка максимума і $x = 1$ – точка мінімума.
6.107.* [1, § 39, приклад 1, с. 226] $f(x) = 3x + \frac{2}{x^3}$. Відповідь: функція $f(x)$ зростає на проміжках $(-\infty, -\sqrt[4]{2}]$ і $[\sqrt[4]{2}, \infty)$, а спадає – на проміжках $[-\sqrt[4]{2}, 0)$ і $(0, -\sqrt[4]{2}]$; $x_{\max} = -\sqrt[4]{2}$ — точка локального максимума, а $x_{\min} = \sqrt[4]{2}$ — точка локального мінімума функції.
6.108. $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{9}{x}$. Відповідь: $f(x)$ зростає на $(-\infty; -6], [6; \infty)$ і спадає на $[-6; 0), (0; 6]$; $x = -6$ – точка максимума і $x = 6$ – точка мінімума.
6.109. $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$. Відповідь: $f(x)$ зростає на $(-\infty; 0), [2; \infty)$ і спадає на $(0; 2]$; $x = 2$ – точка мінімума.
6.110. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x - 5}$. Відповідь:$f(x)$ зростає на $(-\infty; -5)$, $(-5; -2]$ і спадає на $[-2; 1), (1; \infty)$; $x = -2$ – точка максимума.
6.111. $f(x) = \frac{2x}{x^2 + x + 1}$. Відповідь:$f(x)$ зростає на $[-1; 1]$ і спадає на $(-\infty; -1], [1; \infty)$; $x = -1$ – точка мінімума, $x = 1$ – точка максимума.
6.112. $f(x) = \frac{(x - 2)^2}{x^2 + 4}$. Відповідь: $f(x)$ зростає на $(\infty; -2], [2, \infty)$ і спадає на $[-2; 2]$; $x = 2$ – точка мінімума, $x = -2$ – точка максимума.
6.113. $f(x) = \frac{2 - x}{3x - 1}$. Відповідь: $f(x)$ спадає на $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}; \infty\right)$, точок экстремума немає.

6.114. $f(x) = \sqrt{x^2+4x+5}$. Відповідь:$f(x)$ зростає на $[-2;\infty)$ і спадає на $(-\infty;-2]$; $x=-2$ – точка мінімума.
6.115. $f(x) = \sqrt[3]{(x-3)(6-x)^2}$. Відповідь:$f(x)$ зростає на $(-\infty;4]$, $[6;\infty)$ і спадає на $[4;6]$; $x=4$ – точка максимума і $x=6$ – точка мінімума.
6.116. $f(x) = xe^{-5x}$. Відповідь: $f(x)$ зростає на $\left(-\infty;\frac{1}{5}\right]$ і спадає на $\left[\frac{1}{5};\infty\right)$, $x=\frac{1}{5}$ – точка максимума.
6.117. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$. Відповідь: $f(x)$ зростає на $[e;\infty)$ і спадає на $(0;1),(1;e]$, $x=e$ – точка мінімума.
6.118. $f(x) = 2\ln(x-2)-x^2+4x+1$. Відповідь: $f(x)$ зростає на $(2;3]$ і спадає на $[3;\infty)$, $x=3$ – точка максимума.
6.119. $f(x) = \frac{3}{2}x-\sin^2 x$. Відповідь: $f(x)$ зростає на R, точок экстремума немає.
•
Знайти екстемуми функцій (завдання **6.120** – **6.125**):
6.120. $y(x) = \sqrt{2x^2-x+2}$. Відповідь: $y_{\min} = y\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{15}{8}}$.
6.120.* [1, § 39, приклад 2, с. 227]
$y(x) = \log_2(6x-x^2+7)$. Відповідь: $y_{\max} = y(3) = 4$.
6.121. $y(x) = 2x^3+3x^2-12x+5$.
Відповідь: $y_{\max} = y(-2) = 25, y_{\min} = y(1) = -2$.
6.122. $y(x) = \frac{(x-2)^2(x+4)}{4}$. Відповідь: $y_{\max} = y(-2) = 8,\ y_{\min} = y(2) = 0$.
6.123. $y(x) = \frac{2x}{x^2+9}$. Відповідь: $y_{\max} = y(3) = \frac{1}{3}, y_{\min} = y(-3) = -\frac{1}{3}$.
6.124. $y(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$. Відповідь: $y_{\max} = y(0) = -2,\ y_{\min} = y(2) = 2$.
6.125. $y(x) = xe^{x-x^2}$. Відповідь: $y_{\max} = y(1) = 1,\ y_{\min} = y\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\,e^{-3/4}$.
•
Знайти найбільше M і найменше m значення функції на заданому проміжку (завдання **6.126** – **6.154**):
6.126. $f(x) = \frac{x}{8}+\frac{2}{x}$, $[1;6]$. Відповідь: $M = f(1) = \frac{17}{8}, m = f(4) = 1$.
6.127. $f(x) = \sqrt{(x+1)(9-x)}$, $[0;7]$.
Відповідь: $M = f(4) = 5$, $m = f(0) = 3$.
6.128. $f(x) = \sqrt{(2x+3)(x-3)^2}$, $[-1;4]$.
Відповідь: $M = f(0) = 3\sqrt{3}, m = f(3) = 0$.
6.129. $f(x) = (x-3)^2\sqrt[3]{(x-1)^2}$, $[0;2]$.
Відповідь: $M = f(0) = 9,\ m = f(1) = 0$.

6.130. $f(x) = (x-1)^2\sqrt{x^2-2x+3},\ [0;3]$.
Відповідь: $M = f(3) = 4\sqrt{6}, m = f(1) = 0$.
6.131. $f(x) = 4x^2 - 16\sqrt{x},\ [0;2]$. Відповідь: $M = f(0) = 0, m = f(1) = -12$.
6.132. $f(x) = 2x^2 - \sqrt{x},\ [0;1]$. Відповідь: $M = f(1) = 1, m = f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{8}$.
6.133. $f(x) = 2\sqrt{x} - 4x^2,\ [0;1]$. Відповідь: $M = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}, m = f(1) = -2$.
6.134. $f(x) = x^2(\sqrt{x}-1),\ [0;1]$.
Відповідь: $M = f(0) = f(1) = 0,\ m = f\left(\frac{16}{25}\right) = -\frac{16^2}{5^5}$.
6.135. $f(x) = \sqrt{2}\sin x - x,\ \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
Відповідь: $M = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{4},\ m = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} - \frac{\pi}{2}$.
6.136. $f(x) = 4\sin 2x - 2\sin 4x,\ [0;\pi]$.
Відповідь: $M = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3},\ m = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3\sqrt{3}$.
6.137. $f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x + \sin x,\ \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
Відповідь: $M = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4},\ m = f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$.
6.138. $f(x) = \cos^2\frac{x}{2}\sin x,\ [0;\pi]$.
Відповідь: $M = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}, m = f(0) = f(\pi) = 0$.
6.139. $f(x) = 2\cos^2\frac{x}{2}\cos x,\ [-\pi;0]$.
Відповідь: $M = f(0) = 2, m = f\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4}$.
6.140. $f(x) = \operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x - \sqrt{3},\ \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$. Відповідь: $M = \frac{4\sqrt{3}}{3}, m = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$.
6.141. $f(x) = \cos 2x + 8\cos x + 2\sin x + 4x,\ \left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.
Відповідь: $M = f(0) = 9,\ m = f\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} - \frac{14\pi}{3} - 4\sqrt{3}$.
6.142. $f(x) = |x^2 - 5x + 6|,\ [0;2,4]$. Відповідь: $M = f(0) = 6,\ m = f(2) = 0$.
6.143. $f(x) = |x^2 - 4x + 3|,\ [0;3]$.
Відповідь: $M = f(0) = 3,\ m = f(1) = f(3) = 0$.
6.144. $f(x) = |2 - |x||,\ [-2;3]$.
Відповідь: $M = f(0) = 2,\ m = f(-2) = f(2) = 0$.
6.145. $f(x) = |x+1|(2x-5)^2,\ [-2;3]$.
Відповідь: $M = f(-2) = 81,\ m = f(-1) = f\left(\frac{5}{2}\right) = 0$.
6.146. $f(x) = x^2 - |4x - 4|,\ \left[-3;\frac{5}{2}\right]$.
Відповідь: $M = f(1) = 1,\ m = f(-2) = -8$.

6.146.* [1, § 40, приклад на с. 232] $f(x) = x^2 - |6x - 6|$, $[0; 4]$.
Відповідь: $M = f(1) = 1$, $m = f(0) = -6$.
6.147. $f(x) = 4x^3 - x|x - 2|$, $[0; 3]$.
Відповідь: $M = f(3) = 105$, $m = f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{11}{27}$.
6.148. $f(x) = |x^2 + 2x - 3| + \frac{3}{2}\ln x$, $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$.
Відповідь: $M = f(4) = 21 + 3\ln 2$, $m = f(1) = 0$.
6.149. $f(x) = \sqrt{1 - 2x + x^2} + \sqrt{1 + 2x + x^2}$, $[0; 2]$. Відповідь: $M = 4, m = 2$.
6.150. $f(x) = \sqrt{1 - 2x + x^2} + \sqrt{1 + 2x + x^2}$, $[-2; 0]$.
Відповідь: $M = 4, m = 2$.
6.151. $f(x) = \sqrt{1 - 2x + x^2} - \sqrt{1 + 2x + x^2}$, $x \in R$.
Відповідь: $M = 2, m = -2$.
6.152. $f(x) = \sqrt[3]{4 - x^2} + \sqrt[3]{x^2 + 1}$, $[-3; 3]$.
Відповідь: $M = \sqrt[3]{4} + 1, m = \sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{5}$.
6.153. $f(x) = \sqrt[3]{4x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 1}$, $[-2; 2]$. Відповідь: $M = \sqrt[3]{9}, m = 1$.
6.154. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 4x + 3} - \sqrt[3]{x^2 + 4x}$, $\left[-\frac{3}{2}; 0\right]$.
Відповідь: $M = \sqrt[3]{12}$, $m = \sqrt[3]{3,75} - \sqrt[3]{0,75}$.

•

Знайти множину $E(f)$ значень функції (завдання **6.155** – **6.178**):
6.155. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Відповідь: $E(f) = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.
6.156. $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$. Відповідь: $E(f) = \left[0; \frac{1}{2}\right]$.
6.157. $f(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$. Відповідь: $E(f) = (0; 1]$.
6.158. $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 3x + 3}$. Відповідь: $E(f) = \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$.
6.159. $f(x) = \sqrt{10x - x^2}$. Відповідь: $E(f) = [0; 5]$.
6.159.* [1, § 41, приклад 1, с. 234] $f(x) = \left(\sqrt{64 - x^2}\right)^2$.
Відповідь: $E(f) = [0; 64]$.
6.160. $f(x) = \sqrt{4x - x^2 - 3}$. Відповідь: $E(f) = [0; 1]$.
6.161. $f(x) = 2 \cdot 3^{-|x|}$. Відповідь: $E(f) = (0; 2]$.
6.161.* [1, § 41, приклад 2, с. 234] $f(x) = 3^{\log_3(64 - x^2)}$.
Відповідь: $E(y) = (0; 64]$.
6.162. $f(x) = \log_3(x^2 - 4x + 7)$. Відповідь: $E(f) = [1; \infty)$.
6.163. $f(x) = \log_2(6x - x^2 - 5)$. Відповідь: $E(f) = (-\infty; 2]$.
6.164. $f(x) = x^3 e^{-3x}$. Відповідь: $E(f) = (-\infty; e^{-3}]$.
6.165. $f(x) = |6x + 12| - |3x + 9| - |3x + 3|$. Відповідь: $E(f) = [-6; 0]$.
6.166. $f(x) = \frac{1}{x + 1} + 2$. Відповідь: $E(f) = (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$.

6.167. $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$. Відповідь: $E(f)=(-\infty;0)\cup[1;\infty)$.
6.168. $f(x)=\cos^5 x+5\cos^4 x+5\cos^3 x+1$. Відповідь: $E(f)=[0;12]$.
6.168.* [1, § 41, приклад 5, с. 235] $f(x)=\sin^2 x-\sin x-1$.
Відповідь: $E(f)=\left[-\dfrac{5}{4},1\right]$.
6.169. $f(x)=6\cos x+\cos 2x$. Відповідь: $E(f)=[-5;7]$.
6.170. $f(x)=\cos 2x+\sin x-3$. Відповідь: $E(f)=[-5;-15/8]$.
6.171. $f(x)=\sin^2 x-\cos x$. Відповідь: $E(f)=[-1;5/4]$.
6.172. $f(x)=\sin x\cos 2x$. Відповідь: $E(f)=[-1;1]$.
6.173. $f(x)=\sqrt{5}\sin 3x+\sqrt{7}\cos 3x$. Відповідь: $E(f)=[-2\sqrt{3};2\sqrt{3}]$.
6.173.* [1, § 41, приклад 3, с. 234]
$f(x)=5\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)-2$. Відповідь: $E(f)=[-7;3]$.
6.174. $f(x)=\sqrt{6}\sin 6x-2\cos 6x$. Відповідь: $E(f)=[-\sqrt{10};\sqrt{10}]$.
6.174.* [1, § 41, приклад 4, с. 235]
$f(x)=3\sin 3x-4\cos 3x-2$. Відповідь: $E(f)=[-7;3]$.
6.175. $f(x)=3^{3\sin 2x-4\cos 2x+3}$. Відповідь: $E(f)=[1/9;3^8]$.
6.176. $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{5\sin 2x-12\cos 2x+7}$. Відповідь: $E(f)=[1/2^{20};64]$.
6.177. $f(x)=\sin x+\sin 3x$. Відповідь: $E(f)=[-8\sqrt{3}/9;8\sqrt{3}/9]$.
6.178. $f(x)=4\sin^2 x+6\sin x\cos x+2\cos^2 x$.
Відповідь: $E(f)=[3-\sqrt{10};3+\sqrt{10}]$.

•

Довести нерівності (завдання **6.179** – **6.195**):
6.179. $-8\leqslant 4x^3-12x\leqslant 72$ при $x\in[-1;3]$.
6.180. $-10\leqslant x^5-5x^4+5x^3+1\leqslant 2$ при $x\in[-1;2]$.
6.181. $\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}\leqslant\dfrac{3}{2}$ при $x\in R$.
6.182. $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x\geqslant 2$ при $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.
6.183. $\operatorname{tg}x-8\sin x\geqslant -3\sqrt{3}$ при $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.
6.184. $\sin 2x\leqslant 2\sin x$ при $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
6.185. $\sqrt{\cos x}\leqslant\sqrt{2}\cos\dfrac{x}{2}$ при $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
6.186. $-4\leqslant\cos 2x+3\sin x\leqslant\dfrac{17}{8}$ при $x\in R$.
6.187. $\cos^3 x+\cos^6 x\geqslant -\dfrac{1}{4}$ при $x\in R$.
6.188. $\dfrac{1}{4}\leqslant\sin^6 x+\cos^6 x\leqslant 1$ при $x\in R$.
6.189. $1\leqslant\cos x+x\sin x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ при $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

6.189.* [1, § 42, приклад на с. 236]
$0 \leqslant 12\sin 2x - 8\sin 3x \leqslant 20\sin\dfrac{\pi}{5}$ для всіх $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

6.190. $1 < \sin x - x\cos x < \pi$ при $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$.

6.191. $\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x$ при $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

6.192. $\cos x \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$ при $x \in R$.

6.193. $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x$ при $x \geqslant 0$.

6.194. $e^x - x \geqslant 1$ при $x \in R$.

6.195. $\ln(1+x) \leqslant x$ при $x \geqslant 0$.

Група Б

Знайти проміжки зростання й спадання, а також точки екстремума функції (завдання **6.196** – **6.204**):

6.196. $f(x) = \sqrt{3}x + \sin 2x$.

Відповідь: $f(x)$ зростає на $\left[-\dfrac{5\pi}{12} + \pi k;\ \dfrac{5\pi}{12} + \pi k\right]$, $k \in \mathbf{Z}$, і спадає на $\left[\dfrac{5\pi}{12} + \pi k; \dfrac{7\pi}{12}\pi + \pi k\right]$, $k \in \mathbf{Z}$; $x = \dfrac{7\pi}{12} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, – точки мінімумів, $x = \dfrac{5\pi}{12} + \pi m, m \in \mathbf{Z}$, – точки максимумів.

6.196.* [1, § 39, приклад 3, с. 228] Знайти проміжки зростання і спадання, точки максимума і мінімума, а також максимуми і мінімуми функції $f(x) = 2x + 4\cos x$.

Відповідь: функція $f(x)$ зростає на проміжках $\left[-\dfrac{7\pi}{6} + 2\pi n, \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$; спадає – на проміжках $\left[\dfrac{\pi}{6} + 2\pi m, \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m\right], m \in \mathbf{Z}$; $x_{\max} = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, — точки локального максимума; $x_{\min} = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi l$, $l \in \mathbf{Z}$, — точки локального мінімума; $y_{\max} = \dfrac{\pi}{3} + 4\pi k + 2\sqrt{3}$, $k \in \mathbf{Z}$, — локальні максимуми; $y_{\min} = \dfrac{5\pi}{3} + 4\pi l - 2\sqrt{3}$, $l \in \mathbf{Z}$, — локальні мінімуми.

6.197. $f(x) = \sqrt{3}x + \cos 2x$.

Відповідь: $f(x)$ зростає на $\left[-\dfrac{2\pi}{3} + \pi k;\ \dfrac{\pi}{6} + \pi k\right]$, $k \in \mathbf{Z}$, і спадає на $\left[\dfrac{\pi}{6} + \pi k; \dfrac{\pi}{3}\pi + \pi k\right]$, $k \in \mathbf{Z}$; $x = \dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$, – точки мінімумів, $x = \dfrac{\pi}{6} + \pi m, m \in \mathbf{Z}$, – точки максимумів.

6.198. $f(x)=\sqrt{3}x-\cos 2x$.
Відповідь: $f(x)$ зростає на $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi k;\ \ \frac{2\pi}{3}+\pi k\right]$, $k\in\mathbf{Z}$, і спадає на $\left[-\frac{\pi}{3}+\pi k;-\frac{\pi}{6}+\pi k\right]$, $k\in\mathbf{Z}$; $x=-\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$, – точки мінімумів, $x=-\frac{\pi}{3}+\pi m, m\in\mathbf{Z}$, – точки максимумів.

6.199. $f(x)=\sqrt{3}x-\sin 2x$.
Відповідь: $f(x)$ зростає на $\left[\frac{\pi}{12}+\pi k;\ \ \frac{11\pi}{12}+\pi k\right]$, $k\in\mathbf{Z}$, і спадає на $\left[-\frac{\pi}{12}+\pi k;\frac{\pi}{12}+\pi k\right]$, $k\in\mathbf{Z}$; $x=\frac{\pi}{12}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$, – точки мінімумів, $x=-\frac{\pi}{12}+\pi m, m\in\mathbf{Z}$, – точки максимумів.

6.200. $f(x)=\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}x-7}{2}$.
Відповідь: $f(x)$ зростає на $\left[-\frac{4\pi}{3}+4\pi k;2\pi+4\pi k\right]$, $k\in\mathbf{Z}$, і спадає на $\left[-2\pi+4\pi k;-\frac{4\pi}{3}+4\pi k\right]$, $k\in\mathbf{Z}$; $x=-\frac{4}{3}\pi+4\pi n, n\in\mathbf{Z}$, – точки мінімумів, $x=2\pi+4\pi m, m\in\mathbf{Z}$, – точки максимумів.

6.201. $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{5-x}{2}$.
Відповідь: $f(x)$ зростає на $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{\pi}{12}+\pi k\right]$, $k\in\mathbf{Z}$, і спадає на $\left[\frac{\pi}{12}+\pi k;\frac{3\pi}{4}+\pi k\right]$, $k\in\mathbf{Z}$; $x=\frac{\pi}{12}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$, – точки максимумів, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi m, m\in\mathbf{Z}$, – точки мінімумів.

6.202. $f(x)=4|x|-x^2$.
Відповідь: $f(x)$ зростає на $(-\infty;-2],[0;2]$ і спадає на $[-2;0],[2;\infty)$; $x=-2$ і $x=2$ – точки максимума, $x=0$ – точка мінімума.

6.203. $f(x)=x^3+3x^2+3x+3|x+1|+1$.
Відповідь: $f(x)$ зростає на $(-\infty;-2],[-1;\infty)$ і спадає на $[-2;-1]$;
$x=-2$ – точка максимума, $x=-1$ – точка мінімума.

6.204. $f(x)=\operatorname{tg}\frac{1}{x}-\frac{2}{x}$. Відповідь: $f(x)$ зростає на $(-\infty;-4/\pi],[4/\pi;\infty)$, $\left[\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right)^{-1};\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n\right)^{-1}\right]$, де $n\in\mathbf{Z}:\ n\neq 0$, і спадає на $\left(\left(\frac{\pi}{2}+\pi m\right)^{-1};\left(\frac{\pi}{4}+\pi m\right)^{-1}\right]$, $\left[\left(-\frac{\pi}{4}+\pi m\right)^{-1};\left(-\frac{\pi}{2}+\pi m\right)^{-1}\right)$, де $m\in\mathbf{Z}$; $x=\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k\right)^{-1}$, $k\in\mathbf{Z}$, – точки максимума; $x=\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right)^{-1}$, $k\in\mathbf{Z}$, – точки мінімума.

•

Знайти екстемуми функцій (завдання **6.205** – **6.210**):

6.205. $y(x) = x + \sin 2x$. Відповідь: $y_{\max} = y\left(\frac{\pi}{3} + k\pi\right) = \left(\frac{\pi}{3} + k\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $y_{\min} = y\left(-\frac{\pi}{3} + k\pi\right) = \left(-\frac{\pi}{3} + k\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

6.206. $y(x) = \cos^2 x + \cos 2x$. Відповідь: $y_{\max} = 2$, $y_{\min} = -1$.

6.207. $y(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$. Відповідь: $y_{\max} = 1$, $y_{\min} = \frac{1}{2}$.

6.208. $y(x) = 3x + \cos 3x$. Відповідь: функція $y(x)$ екстремумів не має.

6.208.* [1, § 39, приклад 4, с. 229] $y(x) = 2x + \cos 2x$.
Відповідь: функція $y(x)$ екстремумів не має.

6.209. $y(x) = x^2 - |6x - 12|$.
Відповідь: функція $y(x)$ має два локальних мінімуми $y(-3) = -21$ і $y(3) = 3$, а також один локальний максимум $y_{\max} = y(-2) = 4$.

6.210. $y(x) = |6x + 12| + |3x + 9| + |3x + 3|$. Відповідь: $y_{\min} = y(-2) = 6$.

•

6.211. Знайти точку локального максимума і найменше значення функції $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 3|x - 1| - 1$, що задана на відрізку $[0; 3]$.
Відповідь: $x = 1$ – точка локального максимума; $\min\limits_{x\in[0;3]} f(x) = f(0) = -4$.

6.212. Знайти точку локального максимума і найменше значення функції $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 3|x + 1| + 1$, що задана на відрізку $[-2; 2]$.
Відповідь: $x = -1$ – точка локального максимума; $\min\limits_{x\in[-2;2]} f(x) = f(-2) = -4$.

6.213. Знайти точку локального мінімума і найбільше значення функції $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 3|x - 1| - 1$, що задана на відрізку $[-2; 2]$.
Відповідь: $x = 1$ – точка локального мінімума; $\max\limits_{x\in[-2;2]} f(x) = f(2) = 4$.

•

6.214. Довести, що функція $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x$ зростає на $\mathbf{R}$.

6.215. Довести, що функція $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ зростає на $\mathbf{R}$.

6.216. Довести, що функція $f(x) = 24\cos x + 12x^2 - x^4$ зростає на $(-\infty; 0)$ і спадає на $(0; \infty)$.

мінімальною. Знайти цю відстань.
Відповідь: $p = -2$, $q = 0$, відстань дорівнює 1.
6.284. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $(1;3)$ і відтинає від першого координатного кута трикутник найменшої площі.
Відповідь: $y = -3x + 6$.
6.285. Пряма $y = \dfrac{1}{4a - a^2 - 5}x + 1$ разом з осями координат утворює трикутник мінімальної площі. Записати рівняння кола, описаного навколо цього трикутника.
Відповідь: $(x - 0,5)^2 + (y - 0,5)^2 = 0,5$.
6.286. Знайти точку x_0 відрізка $[-4;0]$ таку, що дотична до графіка функції $y = x^2 + 8x + 16$ у точці з абсцисою x_0 разом з осями координат утворює трикутник максимальної площі.
Відповідь: $x_0 = -4/3$.
6.287. Через яку точку кривої $y = \dfrac{1}{5}\sqrt{50 - x^2}$, де $x \in (-5\sqrt{2};0)$, проходить дотична, яка разом з осями координат утворює трикутник мінімальної площі?
Відповідь: $(-5;1)$.
6.288. Для всіх дійсних значень параметра a знайти найкоротшу відстань від точки $M(a,0)$ до графіка функції
$$f(x) = \begin{cases} -7\sqrt{x} & \text{при } x \geq 0, \\ \sqrt{|x|} & \text{при } x < 0. \end{cases}$$
Відповідь: 1) при $a < -0,5$ $\rho = \sqrt{-a - 0,25}$; 2) при $a \in [-0,5;24,5]$ $\rho = |a|$; 3) при $a > 24,5$ $\rho = 7\sqrt{a - 12,25}$.
6.289. Знайти найкоротшу відстань між точками M і N, що розташовані відповідно на кривих $y = x^2 + 1$ і $y = \sqrt{x - 1}$.
Відповідь: $3\sqrt{2}/4$.
6.290. Знайти найкоротшу відстань між точками M і N, що розташовані відповідно на кривих $y = -x^4 - 1$ і $y = -\sqrt[4]{-x - 1}$.
Відповідь: $\sqrt{2}(1 - \frac{3}{8}\sqrt[3]{2})$.
6.291. В фігуру, обмежену лініями $y = 3x$ і $y = x^2$, вписано прямокутник максимальної площі. Знайти його площу.
Відповідь: $3\sqrt{3}/2$.

6.5. Інтеграл і первісна

Група А

Для функції $f(x)$ знайти первісну $F(x)$, графік якої проходить через точку M (завдання **6.292** – **6.301**):
6.292. $f(x) = 4x(1 - x^2), M(1;2)$. Відповідь: $F(x) = 2x^2 - x^4 + 1$.

6.293. $f(x)=(1-x)(1+x)^2, M(0;-1)$. Відповідь: $F(x)=x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}-1$.

6.294. $f(x)=\left(\dfrac{1-x}{x}\right)^2, M(1;0)$. Відповідь: $F(x)=x-\dfrac{1}{x}-2\ln x$.

6.295. $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}, M(1;-1)$. Відповідь: $F(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{1}{2}$.

6.296. $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}, M(4;9)$. Відповідь: $F(x)=\dfrac{2}{3}x^{3/2}+2\sqrt{x}-\dfrac{1}{3}$.

6.297. $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}, M(1;4)$.
Відповідь: $F(x)=\dfrac{4}{7}x^{7/4}+4x^{-1/4}-\dfrac{4}{7}$.

6.298. $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}, M(-1/2;1)$. Відповідь: $F(x)=1+\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}-x\right)$.

6.299. $f(x)=\sqrt[3]{1-3x}, M(0;0)$. Відповідь: $F(x)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}(1-3x)^{4/3}$.

6.300. $f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x}), M(0;1)$. Відповідь: $F(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.

6.300.* [1, § 44, приклад 1, с. 251] $f(x)=8\sin 2x+18\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)$, $M(\pi/3;15)$. Відповідь: $F(x)=6\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)-4\cos\dfrac{2\pi}{3}+10$.

6.301. $f(x)=(\sin x+\cos x)^2, M(0;1/2)$. Відповідь: $F(x)=1+x-\dfrac{1}{2}\cos 2x$.

•

Обчислити інтеграли (завдання **6.302** – **6.322**):

6.302. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$. Відповідь: 2.

6.303. $\int\limits_{-1}^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+4x+4}}$. Відповідь: 3.

6.304. $\int\limits_{-1}^0 \frac{x}{(x+2)^2}\,dx$. Відповідь: $\ln 2-1$.

6.305. $\int\limits_0^2 |1-x|\,dx$. Відповідь: 1.

6.306. $\int\limits_{-2}^2 x^2|1-x^2|\,dx$. Відповідь: 8.

6.307. $\int\limits_1^5 (|x-3|+|1-x|)\,dx$. Відповідь: 12.

6.308. $\int\limits_0^4 \sqrt{x^2-4x+4}\,dx$. Відповідь: 4.

6.309. $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{x^2-2x+1}\,dx$. Відповідь: 2.

6.310. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x-1}$. Відповідь: $-\ln 2$.

6.311. $\int\limits_{0}^{1} 2^x\,dx$. Відповідь: $1/\ln 2$.

6.312. $\int\limits_{0}^{\ln 2} (e^x + e^{-x})^2\,dx$. Відповідь: $\dfrac{15}{8} + 2\ln 2$.

6.312.* [1, § 44, приклад 2, с. 255] $\int\limits_{0}^{\pi/3} \left(8\sin 2x + 18\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)\right)\,dx$.
Відповідь: 12.

6.313. $\int\limits_{0}^{\pi/6} \sin^2 x\cos x\,dx$. Відповідь: $1/24$.

6.314. $\int\limits_{0}^{\pi} \sin^2 x\,dx$. Відповідь: $\pi/2$.

6.315. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^4 x\,dx$. Відповідь: $3\pi/16$.

6.316. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \sin 5x\cos x\,dx$. Відповідь: $1/3$.

6.317. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \cos 4x\cos 2x\,dx$. Відповідь: $1/6$.

6.318. $\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} 12\cos x\left(\cos^2 x - \frac{3}{4}\right)\,dx$. Відповідь: 2.

6.319. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1-\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$. Відповідь: 1.

6.320. $\int\limits_{0}^{\pi} 8\cos^2 x(1-\sin^2 x)\,dx$. Відповідь: 3π.

6.321. $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1-\cos^2 x}\,dx$. Відповідь: $2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

6.322. $\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{1-\sin 2x}\,dx$. Відповідь: $2\sqrt{2}$.

•

Обчислити площу фігури, що обмежена лініями (завдання **6.323 – 6.358**):
6.323. $y = x^2 - 2x + 1$ і $y = x + 1$. Відповідь: $4,5$.
6.324. $y = x^2 - 2x$ і $y = x$. Відповідь: $4,5$.
6.325. $y = x^2 + x$ і $y = x + 1$. Відповідь: $4/3$.
6.326. $y = -2x^2 + 3x + 6$ і $y = x + 2$. Відповідь: 9.
6.327. $y = x^3 - 3x$ і $y = x$. Відповідь: 8.

6.328. $y = \frac{6}{x}$ і $y = 7 - x$. Відповідь: $17,5 - 6\ln 6$.
6.329. $y = \frac{1}{x+1}$ і $y = 1 - 2x$. Відповідь: $\frac{3}{4} - \ln 2$.
6.330. $y = x^2, y = \frac{1}{x}, y = 0$ і $x = 2$. Відповідь: $\frac{1}{3} + \ln 2$.
6.331. $y = x^3, y = \frac{1}{x}$ і $x = 2$. Відповідь: $\frac{15}{4} - \ln 2$.
6.332. $y = \frac{2}{x}$ і $y = -x^2 + 2x + 1$. Відповідь: $\frac{5}{3} - \ln 4$.
6.333. $3y = -x^2 + 8x - 7$ і $y + 1 = \frac{4}{x-3}$. Відповідь: $9 - 8\ln 2$.
6.334. $y = 3x - x^2 - \frac{3}{2}$ і $y = \left|x - \frac{3}{2}\right|$. Відповідь: $5/12$.
6.335. $y = 7 - |x|$ і $y = \left|1 - \frac{x^2}{4}\right|$. Відповідь: 32.
6.336. $y = 5 - |x-3|$ і $y = |x^2 - 6x + 8|$. Відповідь: 12.
6.337. $y = 2 - |2 - x|$ і $y = \frac{3}{|x|}$. Відповідь: $2 - \frac{3}{2}\ln 3$.
6.338. $y = |2 - x|$ і $y = 4 - \frac{6}{x+1}$. Відповідь: $11 - 6\ln 3$.
6.339. $y = \sqrt{x+4}, x + y = 2$ і віссю Ox. Відповідь: $22/3$.
6.340. $y = 2\sqrt{2x}$ і $y = x^2$. Відповідь: $8/3$.
6.341. $y = \sqrt{2-x}$ і $y = \frac{1}{8}(x^2 - 4x + 4)$. Відповідь: $8/3$.
6.342. $y = \sqrt{7-x}, y = \sqrt{1+x}$ і $y = 0$. Відповідь: $32/3$.
6.343. $y^2 = 2 + x$ і $x = 7$. Відповідь: 18.
6.344. $y = \sin x$ і $y = x(x - \pi)$. Відповідь: $\frac{1}{3}\pi^3 - 1$.
6.344.* [1, § 44, приклад 3, с. 255] $y = \sin x$ і $y = \frac{2}{\pi}x$. Відповідь: $2 - \frac{\pi}{2}$.
6.345. $y = \sin x, y = \cos x$ і відрізком $[0; \pi/2]$ осі Ox. Відповідь: $2 - \sqrt{2}$.
6.346. $y = 1 + \sin x$ і $y = \frac{2}{\pi}\left|x - \frac{\pi}{2}\right|$. Відповідь: $2 + \frac{\pi}{2}$.
6.347. $y = 1 - \cos x$ і $y = \frac{1}{4}(|x-1| + |x-5|)$. Відповідь: 2.
6.348. $y = 2\sin^2\frac{x}{2}$ і $y = \frac{2}{\pi}|x - \pi|$. Відповідь: $2 + \frac{\pi}{2}$.
6.349. $y = (1/2)^x, x - 2y + 2 = 0$ і $x = 2$. Відповідь: $3\left(1 - \frac{1}{4\ln 2}\right)$.
6.350. $y = 2^x, y = 2$ і $x = -1$. Відповідь: $4 - \frac{3}{\ln 2}$.
6.351. $y = 2^x, y = 4^x$ і $x = 1$. Відповідь: $\ln\sqrt{2}$.
6.352. $y = e^x, y = e^{-x}$ і $y = e^2$. Відповідь: $2e^2 + 2$.
6.353. $y = 5 - e^x$ і $y = 4e^{-x}$. Відповідь: $5\ln 4 - 6$.
6.354. $y = 2 + 3^{|x|}$ і $y = 9 + 2 \cdot 3^{2-|x|}$. Відповідь: $7\ln 6 - 10$.
6.355. $2xy = 16 + x^2$ і $y = 5$. Відповідь: $15 - 16\ln 2$.

6.356. $y = -1 + 8x^2 - x^4, y = 15$ і $x = 1$, при цьому абсциси точок фігури задовольняють нерівність $x \geqslant 1$. Відповідь: 53/15.

6.357. $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ і $y = \dfrac{x^2}{2}$. Відповідь: $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{3}$.

6.358. $y = \sqrt{x}, y = \sqrt{4-3x}$ і $y = 0$. Відповідь: 8/9.

Група Б

Знайти первісну $F(x)$ функції $f(x)$, якщо графік функції $y = F(x)$ дотикається до графіка функції $y = g(x)$ (завдання **6.359** – **6.362**):

6.359. $f(x) = x, g(x) = x - 1$. Відповідь: $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}$.

6.360. $f(x) = x + 2, g(x) = x^2$. Відповідь: $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x - 2$.

6.361. $f(x) = x^2, g(x) = x^2+1$. Відповідь: $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{7}{3}$ чи $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3+1$.

6.362. $f(x) = \dfrac{3}{x}, g(x) = x^3$. Відповідь: $F(x) = 3\ln x + 1$.

•

6.363. Знайти всі додатні значення x, для яких виконується нерівність $\int\limits_0^x (2 - 4t + 3t^2)\,dt \leqslant x$. Відповідь: $x = 1$.

6.364. Знайти найменше та найбільше значення функції $\int\limits_0^x (2t-5)\,dt$ при $x \in [-1; 3]$.

Відповідь: $\min\limits_{x\in[-1;3]} F(x) = F(2,5) = -6,25$, $\max\limits_{x\in[-1;3]} F(x) = F(-1) = 6$.

6.365. Знайти найменше значення функції $\int\limits_0^x (t-1)(t-2)^2\,dt$.

Відповідь: $-17/22$.

•

6.366. Записати рівняння дотичних до графіка функції $F(x) = \int\limits_2^x (2t-5)\,dt$ в точках його перетину з віссю Ox.

Відповідь: $y = 2 - x$, $y = x - 3$.

6.367. Обчислити площу фігури, що обмежена графіком функції $y = 1+x^2$ і дотичними до нього, проведеними в точках з абсцисами $x_1 = 0$ і $x_2 = 2$.

Відповідь: 2/3 кв. од.

6.368. Обчислити площу фігури, яка обмежена графіком функції $y = 0,5x^2 - 3x + 4,5$ і дотичними до нього, що проведені в точках з абсцисами $x_1 = 1$ і $x_2 = 4$.

Відповідь: 9/8.

6.369. Обчислити площу фігури, яка обмежена графіком функції $y = x^2 - x + 2$ і дотичною, що проведена до графіка функції $y = 3 + \ln x$

в точці з абсцисою $x_0 = 1$.
Відповідь: 4/3.
6.370. Обчислити площу фігури, яка обмежена параболою $y = x^2 + 10$ і дотичними до неї, що проведені з точки $(0; 1)$.
Відповідь: 18.
6.371. Фігура обмежена графіком функції $y = 0,5x^2$, прямою $y = 4$ та віссю Oy. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M(2; 4)$ і ділить вказану фігуру на дві рівновеликі частини.
Відповідь: $3x - 2y + 2 = 0$.
6.372. Фігура обмежена графіком функції $y = \sin x$ при $x \in [0; \pi/2]$, прямою $x = \pi/2$ та віссю Ox. Записати рівняння прямої, що проходить через початок координат і ділить вказану фігуру на дві рівновеликі частини.
Відповідь: $\pi^2\ y - 4x = 0$.
6.373. При якому від'ємному значенні p площа фігури, що утворена параболою $y = (1 + p^2)^2 x^2 + p$ і прямою $y = 0$, максимальна?
Відповідь: $p = -1$.
6.374. Знайти найменше значення площі фігури, що обмежена параболою $y = x^2 + 2x - 3$ і прямою $y = kx + 1$.
Відповідь: 32/3.

§ 7. Конкурсні завдання підвищеної складності

7.1. Рівняння і нерівності з параметром

Група А

Розв'язати рівняння, нерівності, системи і сукупності з параметром a (завдання **7.1 – 7.58**):
7.1. $2x + ax = 6$.
Відповідь: 1) при $a = -2$ $x \in \varnothing$; 2) при $a \neq -2$ $x = \dfrac{6}{a+2}$.
7.2. $3x + ax = 0$.
Відповідь: 1) при $a = -3$ $x \in \mathbf{R}$; 2) при $a \neq -3$ $x = 0$.
7.2.* [1, § 45, приклад 3, с. 261] $2ax + 3a - 1 = ax + 2a + 3 - 3x$.
Відповідь: 1) при $a = -3$ $\quad x \in \varnothing$; 2) при $a \neq -3$ $\quad x = \dfrac{4-a}{a+3}$.
7.3. $\dfrac{x}{|a|} + 2 = 3x$. Відповідь: 1) $a \in \left\{-\dfrac{1}{3}, 0, \dfrac{1}{3}\right\}$ $x \in \varnothing$;
2) при $a \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{3}, 0\right) \cup \left(0, \dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{3}, \infty\right)$ $x = \dfrac{2|a|}{3|a|-1}$.