

Тема 25. Механічні коливання.

Механічні коливання – це рухи, які точно або приблизно повторюються через однакові проміжки часу.

Вимушені коливання – це коливання, які відбуваються під дією зовнішньої сили, що періодично змінюється.

Вільні коливання – це коливання, які відбуваються під дією внутрішніх сил системи й виникають в системі після того, як її було виведено з положення рівноваги та надано самій собі.

Систему тіл, в якій можуть виникати вільні коливання, називають **коливальною системою**.

Прикметною рисою будь-якої коливальної системи є наявність в ній *положення стійкої рівноваги*. Саме біля цього положення й відбуваються вільні коливання. Щоб у коливальній системі виникли вільні коливання, необхідне виконання двох умов:

- 1) системі має бути передана надлишкова енергія (порівняно з тією, якою володіє система в положенні стійкої рівноваги);
- 2) тертя в системі має бути досить малим, інакше коливання швидко затухнуть або навіть не виникнуть.

Колівальний рух, як і будь-який інший рух, характеризують такі фізичні величини, як швидкість, прискорення, координата (зміщення).

Якщо значення фізичних величин, що змінюються в процесі коливань, повторюються через рівні проміжки часу, такі коливання називають **періодичними**.

Зміщення x – це фізична величина, що дорівнює відстані, на яку тіло в ході коливання відхилилося від положення рівноваги в даний момент часу.

Амплітуда коливань A – це фізична величина, яка дорівнює максимальному зміщенню:

$$A = x_{\max}.$$

Одиниця зміщення та одиниця амплітуди коливань у СІ – **метр (м)**.

Амплітуда вільних коливань визначається початковими умовами, тобто тією енергією, яка була передана тілу в момент, коли воно було виведене з положення рівноваги.

Період коливань T – це фізична величина, яка дорівнює мінімальному проміжку часу, за який тіло здійснює одне повне коливання.

$$T = \frac{t}{N},$$

де t – час коливань, N – число повних коливань за цей проміжок часу.

Одиниця періоду коливань в СІ – **секунда (с)**.

Частота коливань ν – це фізична величина, яка дорівнює кількості N повних коливань, що здійснює тіло за одиницю часу:

$$\nu = \frac{N}{t}.$$

Одиниця частоти коливань у СІ – **герц (Гц)**. 1 Гц дорівнює частоті коливань, у ході яких тіло за 1 с здійснює одне повне коливання.

Частота і період коливань пов'язані співвідношенням:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Циклічна частота ω – це фізична величина, яка дорівнює кількості повних коливань, що здійснює тіло за 2π секунд:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}.$$

Одиниця циклічної частоти коливань у СІ – **радіан на секунду (рад/с або с^{-1})**.

Рівняння гармонічних коливань

Коливання, під час яких координата тіла, що коливається, змінюється за законом косинуса (або синуса), називають **гармонічними коливаннями**.

Фаза коливань φ – це фізична величина, яка характеризує стан коливальної системи в довільний момент часу.

Фаза коливань визначається характером руху тіла (періодом його коливань T) і моментом часу t , у який фіксується координата:

$$\varphi = \omega t = \frac{2\pi}{T} t.$$

Фаза коливань також залежить від моменту початку відліку часу. Таким чином, **рівняння (закон руху) гармонічних коливань** має вигляд:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

де $\varphi = \omega t + \varphi_0$ – фаза коливань; φ_0 – початкова фаза коливань, $x(t)$ – відхилення точки від положення рівноваги.

Також можна записати рівняння гармонічних коливань у вигляді:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \alpha_0),$$

де $\alpha_0 = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$ – початкова фаза коливань.

Зобразимо **графіки залежності координати тіла**, що коливається, від часу (див. рис. 1). На рис. 1 а) зображено графік коливань за законом $x(t) = A \cos \omega t$, на рис. 1 б) – за законом $x(t) = A \sin \omega t$.

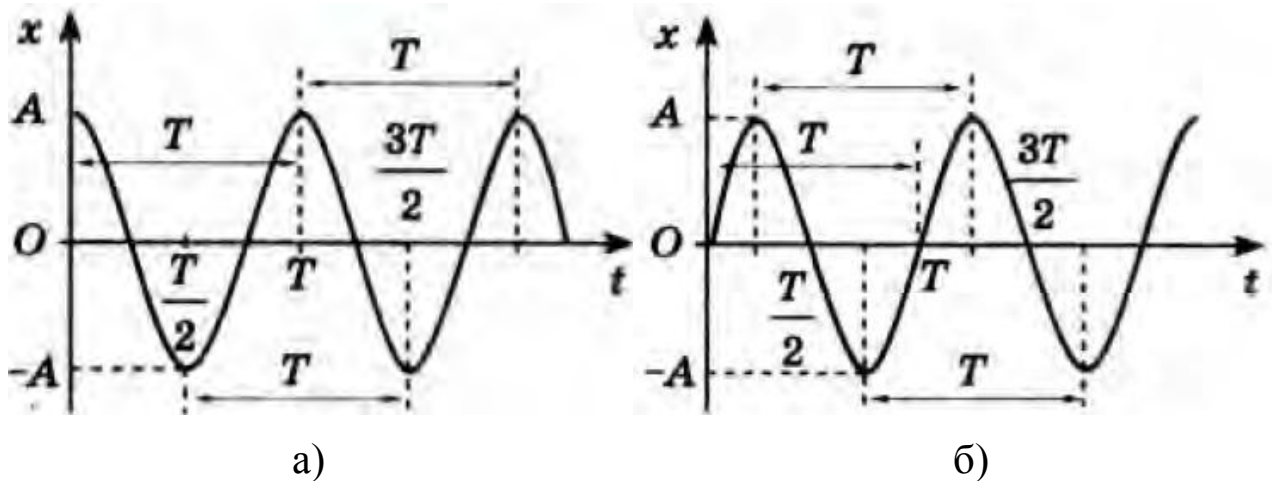


Рис. 1. Графіки гармонічних коливань.

Швидкість точки, що здійснює гармонічні коливання, задається рівняннями:

$$v = x'(t) = -v_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0) \text{ або}$$

$$v = x'(t) = v_{\max} \cos(\omega t + \alpha_0),$$

де $v_{\max} = A\omega$ – амплітуда швидкості.

Миттєве прискорення точки задається рівнянням:

$$a = v'(t) = -a_{\max} \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x \text{ або}$$

$$a = v'(t) = -a_{\max} \sin(\omega t + \alpha_0) = -\omega^2 x,$$

де $a_{\max} = A\omega^2$ – амплітуда прискорення.

Рівнодійна сила, під дією якої відбуваються гармонічні коливання матеріальної точки масою m , дорівнює:

$$F = ma = -m\omega^2 x = -kx ,$$

де $k = m\omega^2$ – коефіцієнт пружності, який залежить від природи повертаючої сили. Величина амплітуди сили $F_{max} = mA\omega^2$.

Період гармонічних коливань визначається формулою:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} ,$$

де m – маса тіла, k – коефіцієнт пропорційності між рівнодійною силою та відхиленням від положення рівноваги.

Для пружинного маятника k – це коефіцієнт жорсткості пружини, для математичного маятника $k = \frac{mg}{l}$, де l – довжина вітки маятника, g – прискорення вільного падіння, тобто **період гармонічних коливань математичного маятника**:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} - \text{формула Галілея.}$$

Коливання математичного маятника є гармонічними тільки тоді, коли його відхилення від положення рівноваги мале так, що амплітуда коливань $A \ll l$.

Якщо точка підвісу маятника рухається з прискоренням $\vec{a}$ відносно інерціальної системи відліку, то період коливань:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_e}} , \text{ де } g_e = |\vec{g} - \vec{a}| .$$

Повна енергія тіла, що здійснює гармонічні коливання:

$$W = W_k + W_{\pi} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \frac{kA^2}{2} .$$

Таким чином, максимальна кінетична енергія тіла:

$$W_{k\max} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} ,$$

а максимальна потенціальна енергія тіла: $W_{\pi\max} = \frac{kA^2}{2} .$

Приклад 1. Вільні коливання математичного маятника відбуваються під дією:

- А) зовнішньої періодичної сили;
- Б) рівнодійної сил тяжіння та натягу нитки;
- В) сили тертя;
- Г) виключно сили тяжіння.

Відповідь: Б.

Приклад 2. Тіло здійснює коливання з періодом 2 с. Чому дорівнює циклічна частота коливань?

Відповідь: $\pi \text{ с}^{-1}$.

Приклад 3. Тіло здійснює коливання з амплітудою 16 см. Який шлях воно проходить за два періоди?

За один період тіло проходить шлях $4A$, за два періоди – $8A = 8 \cdot 16 = 128 \text{ см}$.

Відповідь: 128 см.

Приклад 4. Маятник завдовжки 2 м коливається з амплітудою 9 см. Визначте, як зміниться період коливань, якщо амплітуда зменшиться до 1 см.

Період коливань залежить лише від довжини гілки маятника і не залежить від амплітуди коливань.

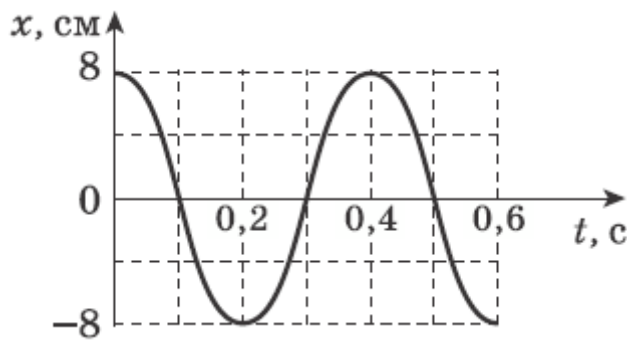
Відповідь: не зміниться.

Приклад 5. Період коливань тягарця пружинного маятника дорівнює 1 с, а амплітуда – 2 см. Який шлях проходить важок за 25 с?

$S = 4A \cdot 25 = 100A = 200 \text{ см}$.

Відповідь: 2 м.

Приклад 6. За графіком координати тіла, що здійснює гармонічні коливання, визначте амплітуду, період та частоту коливань.



Відповідь: 8 см, 0,4 с, 2,5 Гц.

Приклад 7. Гармонічні коливання тіла задані рівнянням $x = 0,25\cos 50\pi t$. Визначте амплітуду, період та частоту коливань.

Відповідь: 25 см, 0,04 с, 25 Гц.

Приклад 8. Гармонічні коливання тіла задані рівнянням $x = 0,15\sin 20\pi t$. Визначте рівняння швидкості цього тіла.

Відповідь: $v = 3\pi\cos 20\pi t$.

Приклад 9. Гармонічні коливання тіла масою 20 кг задані рівнянням $x = 0,25\cos 0,4\pi t$. Чому дорівнює кінетична енергія тіла в момент часу 6,25 с після початку коливань?

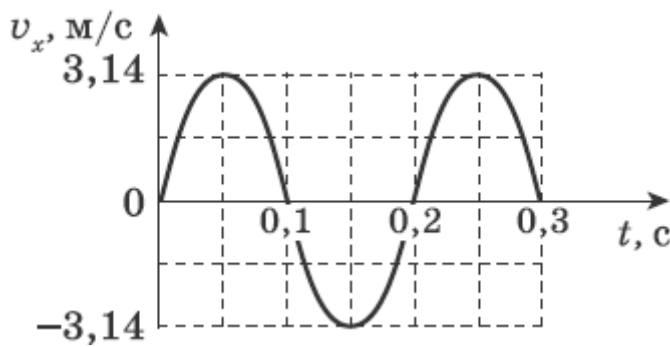
$$W_k = \frac{mv^2}{2}, v(t) = x'(t) = -0,25 \cdot 0,4\pi \cdot \sin 0,4\pi t = -0,1\pi \sin 0,4\pi t.$$

$$v(6,25) = -0,1\pi \sin(0,4\pi \cdot 6,25) = -0,1\pi \sin(2,5\pi) = -0,1\pi.$$

$$W_k = \frac{20 \cdot (-0,1\pi)^2}{2} \approx 1 \text{ Дж.}$$

Відповідь: 1 Дж.

Приклад 10. За графіком проекції швидкості тіла, що здійснює гармонічні коливання, запишіть рівняння його координати.



$$T = 0,2 \text{ с}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,2} = 10\pi.$$

$$v_{\max} = \omega A, \quad 3,14 = 10\pi A, \quad A = 0,1 \text{ м.}$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) = 0,1 \cos(10\pi t + \varphi_0).$$

$$v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad v(0) = 0, \quad \sin \varphi_0 = 0.$$

$$v(0,05) = 3,14, \quad -3,14 \sin(10\pi \cdot 0,05 + \varphi_0) = 3,14,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_0\right) = -1, \quad \cos \varphi_0 = -1, \quad \varphi_0 = \pi.$$

$$x(t) = 0,1 \cos(10\pi t + \pi).$$

Відповідь: $x = 0,1 \cos(10\pi t + \pi)$.

Приклад 11. Період малих коливань математичного маятника 1,4 с. Яким стане період малих коливань, якщо маятник видовжити в 2 рази?

$$l = 2l_0, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2l_0}{g}} = \sqrt{2}T_0 \approx \sqrt{2} \cdot 1,4 = 2 \text{ с.}$$

Відповідь: 2 с.

Приклад 12. Якою треба зробити довжину математичного маятника, щоб період його коливань дорівнював 1 с? Вважайте, що $g = 10 \text{ м/с}^2$.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g}, \quad l = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{1^2 \cdot 10}{4(3,14)^2} \approx 0,25 \text{ м.}$$

Відповідь: 0,25 м.

Приклад 13. З яким періодом коливатиметься математичний маятник довжиною 1 м у ліфті, який рухається з прискоренням 2 м/с^2 , спрямованим вгору? Коливання малі. Вважайте, що $g = 10 \text{ м/с}^2$.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_e}}, g_e = |\vec{g} - \vec{a}| = |10 + 2| = 12 \text{ м/с}^2.$$

$$T = 2 \cdot 3,14 \sqrt{\frac{1}{12}} = 1,8 \text{ с.}$$

Відповідь: 1,8 с.

Приклад 14. Як зміниться частота малих коливань пружинного маятника, якщо збільшити масу тіла, підвішеного до пружини, в 4 рази?

$$m = 4m_0.$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{4m_0}{k}} = 4\pi \sqrt{\frac{m_0}{k}} = 2T_0.$$

Період збільшиться в 2 рази, отже частота зменшиться в 2 рази.

Відповідь: зменшиться у 2 рази.

Приклад 15. Під час коливань математичного маятника під дією зовнішньої періодичної сили, яка змінюється з певною частотою, резонанс не спостерігається. Для того, щоб спостерігати резонанс, потрібно:

- А) змінити силу тертя;
- Б) змінити масу маятника;
- В) змінити амплітуду коливань;
- Г) змінити довжину маятника.

Відповідь: Г. Для того, щоб спостерігався резонанс, потрібно змінити власну частоту маятника, щоб вона співпадала із частотою зовнішньої сили. Із запропонованих варіантів це можна зробити, змінивши довжину маятника.

Приклад 16. Установіть відповідність між прикладами руху та їхніми назвами.

1	Рух маятника механічного годинника
2	Рух вантажу, який підвішено до пружини
3	Рух кульки на нитці, за якого нитка описує бічну поверхню конуса
4	Рух голки швацької машинки

А	Вільні затухаючі коливання
Б	Вільні незатухаючі коливання
В	Вимушені незатухаючі коливання
Г	Автоколивання
Д	Обертання

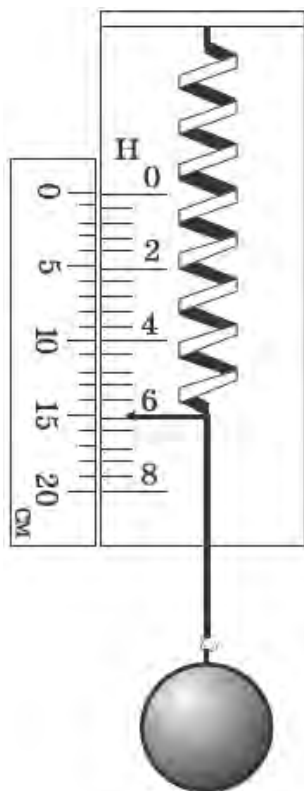
Відповідь: 1 – Г, 2 – А, 3 – Д, 4 – В.

Приклад 17. Установіть відповідність між формулами залежності від часу координати тіла, що коливається, та формулами залежності від часу проекції швидкості або проекції прискорення.

1	$x = 0,2 \cos 40\pi t$
2	$x = 0,2 \sin 40\pi t$
3	$x = 0,4 \cos 20\pi t$
4	$x = 0,4 \sin 20\pi t$

А	$v_x = 8\pi \cos 40\pi t$
Б	$a_x = -160\pi^2 \cos 20\pi t$
В	$a_x = 80\pi^2 \cos 40\pi t$
Г	$v_x = -8\pi \sin 40\pi t$
Д	$a_x = -160\pi^2 \sin 20\pi t$

Відповідь: 1 – Г, 2 – А, 3 – Б, 4 – Д.



Приклад 18. З якою частотою здійснюватиме малі коливання тіло, підвішене до динамометра (див. рисунок)? Вважайте, що $g = 10 \text{ м/с}^2$.

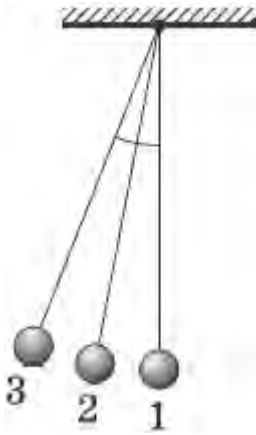
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$mg = 6 \text{ Н}, m = 6/g = 6/10 = 0,6 \text{ кг.}$$

$$mg = kx, k = mg/x = 6/0,15 = 40 \text{ Н/м.}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0,6}{40}} \approx 0,77 \text{ с.} \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,77} \approx 1,3 \text{ Гц.}$$

Відповідь: 1,3 Гц.



Приклад 19. За допомогою стробоскопа фотографують маятник, що здійснює малі коливання. Стробоскоп робить три послідовні спалахи (див. рисунок). Під час першого спалаху маятник проходив положення рівноваги, під час третього – на мить зупинився в точці максимального зміщення від положення рівноваги. Чому дорівнює період коливань маятника, якщо між спалахами 1 і 2 минуло 0,1 с?

Відповідь: 1,2 с.

Приклад 20. Для визначення жорсткості пружини до неї підвісили тіло масою 2 кг і спостерігали малі вільні коливання цього тіла вгору-вниз. Якою виявилась жорсткість пружини, якщо за хвилину тіло зробило 40 коливань? Вважайте, що $g = 10 \text{ м/с}^2$.

$$m = 2 \text{ кг}, t = 60 \text{ с}, N = 40.$$

$$T = t/N = 60/40 = 1,5 \text{ с}.$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k}, k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4 \cdot (3,14)^2 \cdot 2}{(1,5)^2} = 35 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Відповідь: 35 Н/м.

Приклад 21. Чому дорівнює максимальна потенціальна енергія пружини пружинного маятника, якщо амплітуда коливань становить 10 см, а частота – 6,4 Гц? Маса тіла, підвішеного до пружини, дорівнює 2 кг. Вважайте, що $\pi^2 = 10$.

Відповідь: 16,4 Дж.

Приклад 22. Визначте амплітуду коливань, яку матиме вантаж, що висить на нитці довжиною 2,5 м, якщо йому поштовхом надати горизонтальну швидкість 20 см/с. Вважайте, що $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Відповідь: 10 см.

Домашнє завдання: основне: 4.2, 4.5, 4.7, 4.11, 4.12, 4.14, 4.16, 4.29, 4.32, приклади 19, 21, 22.

додаткове: 4.1, 4.6, 4.8, 4.9, 4.15, 4.17, 4.23, 4.25, 4.33.