

•

5.168. Площа рівнобедреного трикутника дорівнює 8 кв. од., а висота, проведена до бічної сторони, дорівнює h . Знайти сторону основи.

Відповідь: $a = \frac{2}{h} \sqrt{128 \pm 8\sqrt{256 - h^4}}$ при $h \in (0; 4]$.

5.169. Радіус вписаного в рівнобедрений трикутник кола 4, а висота, проведена до бічної сторони – h . Знайти сторони трикутника.

Відповідь: $a = 8\sqrt{\frac{h}{16-h}}$, $b = \frac{32}{h-8}\sqrt{\frac{h}{16-h}}$ при $h \in (8; 16)$.

5.170. У рівнобедреному трикутнику h – висота, проведена до бічної сторони, і r – радіус вписаного кола. Знайти кути трикутника.

Відповідь: $\beta = 2\arctg \sqrt{\frac{4r-h}{h}}$, $\alpha = \pi - 4\arctg \sqrt{\frac{4r-h}{h}}$ при $2r < h < 4r$.

5.171. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 6, а радіус вписаного кола – r . Знайти гострі кути трикутника.

Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \arccos \frac{3+r}{\sqrt{2(3-r)}}$, $\frac{\pi}{4} - \arccos \frac{3+r}{\sqrt{2(3-r)}}$ при $r \in (0; 3(3-2\sqrt{2})]$.

5.172. У прямокутному трикутнику висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 2, а периметр – P . Знайти гострі кути трикутника.

Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \arccos \frac{4+P}{\sqrt{2}P}$, $\frac{\pi}{4} - \arccos \frac{4+P}{\sqrt{2}P}$ при $P \geq 4(\sqrt{2}+1)$.

5.173. У прямокутному трикутнику c – гіпотенуза і P – периметр. Знайти гострі кути трикутника.

Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \arccos \frac{P-c}{\sqrt{2}c}$, $\frac{\pi}{4} - \arccos \frac{P-c}{\sqrt{2}c}$ при $2c < P \leq c(\sqrt{2}+1)$.

5.2. Стереометрія

Група А

У задачах **5.174** – **5.203** використовуються наступні позначення параметрів правильної трикутної піраміди: a – сторона основи, b – бічне ребро, H – висота піраміди, l – апофема, α – плоский кут при вершині піраміди, β – кут нахилу бічного ребра до площини основи, γ – двогранний кут при ребрі основи, φ – двогранний кут при бічному ребрі, $S_{\text{біч}}$ – бічна поверхня піраміди, S_n – повна поверхня піраміди, V – об'єм піраміди, R_k – радіус описаної кулі, r_k – радіус вписаної кулі.

В правильній трикутній піраміді (задачі **5.174** – **5.203**) задано:

5.174. b, l . Знайти V . Відповідь: $V = \frac{1}{3} (b^2 - l^2) \sqrt{4l^2 - b^2}$.

5.175. b, H . Знайти $S_{\text{біч}}, S_n$. Відповідь: $S_{\text{біч}} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sqrt{(b^2 - H^2)(3H^2 + b^2)}$,

$S_n = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sqrt{b^2 - H^2} (\sqrt{b^2 - H^2} + \sqrt{3H^2 + b^2})$.

5.176. a, α . Знайти V . Відповідь: $V = \frac{1}{24} a^3 \sqrt{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}$.

5.177. b, β . Знайти $S_{\text{біч}}$. Відповідь: $S_{\text{біч}} = \frac{3\sqrt{3}}{4} b^2 \cos \beta \sqrt{1 + 3 \sin^2 \beta}$.

5.178. H, β . Знайти S_n . Відповідь: $S_n = \frac{3\sqrt{3}}{4} H^2 \operatorname{ctg} \beta (\operatorname{ctg} \beta + \sqrt{4 + \operatorname{ctg}^2 \beta})$.

5.179. a, φ . Знайти b . Відповідь: $b = \frac{a^3}{\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}$.

5.179.* [1, § 32, приклад 1, с. 172] a, φ . Знайти V .

Відповідь: $V = \frac{a^3}{12 \sqrt{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}$.

5.180. a, φ . Знайти $S_{\text{біч}}$. Відповідь: $S_{\text{біч}} = \frac{3a^2}{4 \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}$.

•

5.181. H, α . Знайти $V, S_{\text{біч}}$. Відповідь: $V = \frac{\sqrt{3} H^3}{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}, S_{\text{біч}} = \frac{9 H^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}$.

5.181.* [1, § 32, приклад 4, с. 177] H, α . Знайти суму довжин усіх ребер піраміди. Відповідь: $3\sqrt{3} H \frac{1+2 \sin(\alpha/2)}{\sqrt{3-4 \sin^2(\alpha/2)}}$.

5.182. l, β . Знайти V . Відповідь: $V = \frac{2\sqrt{3} l^3 \operatorname{tg} \beta}{(1 + 4 \operatorname{tg}^2 \beta)^{3/2}}$.

5.183. b, γ . Знайти $V, S_{\text{біч}}$.

Відповідь: $V = \frac{\sqrt{3} b^3 \operatorname{tg} \gamma}{(4 + \operatorname{tg}^2 \gamma)^{3/2}}, S_{\text{біч}} = \frac{3\sqrt{3} b^2}{\cos \gamma (4 + \operatorname{tg}^2 \gamma)}$.

5.184. H, φ . Знайти V . Відповідь: $V = \frac{\sqrt{3}}{4} H^3 \left(3 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} - 1 \right)$.

5.185. V, α . Знайти $S_{\text{біч}}$. Відповідь: $S_{\text{біч}} = \frac{3\sqrt[3]{9} V^{2/3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt[3]{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}}$.

5.186. $S_{\text{біч}}, \alpha$. Знайти V . Відповідь: $V = \frac{1}{9\sqrt{3}} \left(S_{\text{біч}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^{3/2} \sqrt{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}$.

5.187. V, γ . Знайти S_n . Відповідь: $S_n = 6 \sqrt[6]{3} (V \operatorname{ctg} \gamma)^{2/3} \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}}$.

5.188. V, φ . Знайти $S_{\text{біч}}$. Відповідь: $S_{\text{біч}} = \frac{3\sqrt[3]{18}}{2} V^{2/3} \frac{\sqrt[3]{3 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}$.

•

5.189. α . Знайти β, γ, φ .

Відповідь: $\beta = \arccos \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\alpha}{2} \right), \gamma = \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right),$

$\varphi = 2 \arcsin \left(\frac{1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \right).$

5.190. β . Знайти α, φ .

Відповідь: $\alpha = 2 \arcsin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \beta \right), \varphi = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{3} \sin \beta} \right).$

5.190.* [1, § 32, приклад 6, с. 178] β . Знайти γ . Відповідь: $\gamma = \operatorname{arctg}(2 \operatorname{tg} \beta)$.

5.191. γ . Знайти α, β, φ .

Відповідь: $\alpha = 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \cos \gamma)$, $\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \gamma\right)$,

$$\varphi = 2 \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \gamma\right).$$

5.192. φ . Знайти α, β, γ . Відповідь: $\alpha = 2 \arccos\left(\frac{1}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}\right)$,

$$\beta = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}\right), \quad \gamma = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\varphi}{2}\right).$$

•

5.193. a, α . Знайти R_k . Відповідь: $R_k = \frac{\sqrt{3} a}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}}$.

5.193.* [1, § 32, приклад 2, с. 173]

a, φ . Знайти R_k . Відповідь: $R_k = \frac{\sqrt{3} a}{2 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}$.

5.194. a, γ . Знайти R_k . Відповідь: $R_k = \frac{\sqrt{3}}{12} a (\operatorname{tg} \gamma + 4 \operatorname{ctg} \gamma)$.

5.195. H, α . Знайти R_k . Відповідь: $R_k = \frac{3H}{4 \cos \alpha + 2}$.

5.196. H, φ . Знайти R_k . Відповідь: $R_k = \frac{3}{2} H \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}$.

5.197. b, γ . Знайти R_k . Відповідь: $R_k = \frac{b}{2} \sqrt{1 + 4 \operatorname{ctg}^2 \gamma}$.

5.198. R_k, γ . Знайти V . Відповідь: $V = \frac{8\sqrt{3} \operatorname{tg} \gamma}{(\operatorname{tg} \gamma + 4 \operatorname{ctg} \gamma)^3} R_k^3$.

•

5.199. a, α . Знайти r_k .

Відповідь: $r_k = \frac{\sqrt{3}}{6} a \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{6} a \sqrt{\frac{\sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2})}{\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2})}}$.

5.199.* [1, § 32, приклад 3, с. 175; приклад 7, с. 179] a, β . Знайти r_k .

Відповідь: $r_k = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a \operatorname{tg} \beta}{1 + \sqrt{4 \operatorname{tg}^2 \beta + 1}}$.

5.200. a, l . Знайти r_k .

Відповідь: $r_k = \frac{\sqrt{3}}{6} a \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \arccos\left(\frac{\sqrt{3}a}{6l}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{6} a \sqrt{\frac{2\sqrt{3}l - a}{2\sqrt{3}l + a}}$.

5.201. H, α . Знайти r_k . Відповідь: $r_k = \frac{H}{\sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + 1}$.

5.202. r_k, γ . Знайти V . Відповідь: $V = \sqrt{3} r_k^3 \operatorname{ctg}^3 \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \gamma$.

5.203. r_k, α . Знайти V . Відповідь: $V = 2\sqrt{3} r_k^3 \frac{\sin^2(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2})}{\sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}) \sin \frac{\alpha}{2}}$.

•

5.204. Основою піраміди є прямокутник. Серед бічних граней дві перпендикулярні до площини основи, а дві інші утворюють з нею кути α і β . Висота піраміди дорівнює H . Визначити об'єм піраміди.

Відповідь: $\frac{1}{3}H^3 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$.

•

5.205. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a , двогранний кут при основі дорівнює α . Знайти відстань від центра кулі, вписаної в цю піраміду, до бічного ребра.

Відповідь: $\frac{a\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}}$.

5.206. Повна поверхня правильної чотирикутної піраміди дорівнює S . Кут нахилу бічної грані до площини основи дорівнює α . Визначити об'єм піраміди.

Відповідь: $\frac{S^{3/2} \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos \alpha}}{6\sqrt{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$.

5.207. Визначити радіус кола, вписаного в основу правильної чотирикутної піраміди, ребро якої утворює з висотою кут α , а її об'єм дорівнює V .

Відповідь: $\frac{1}{2}(3\sqrt{2}V \operatorname{tg} \alpha)^{1/3}$.

5.208. В правильній чотирикутній піраміді величина кута між апофемою і висотою дорівнює α , а бічна поверхня дорівнює S . Визначити об'єм піраміди.

Відповідь: $\frac{1}{6}S \cos \alpha \sqrt{S \sin \alpha}$.

5.209. В кулю вписано правильну чотирикутну піраміду, бічне ребро якої утворює з площиною основи кут α . Об'єм піраміди дорівнює V . Знайти об'єм кулі.

Відповідь: $2\pi V \operatorname{ctg} \alpha \sin^{-3} 2\alpha$.

5.210. В кулю радіуса R вписано правильну чотирикутну піраміду, бічне ребро якої утворює з площиною основи кут α . Визначити об'єм піраміди.

Відповідь: $\frac{4}{3}R^3 \sin^2 2\alpha \sin^2 \alpha$.

5.210.* [1, § 32, приклад 5, с. 178] Радіус описаної навколо правильної трикутної піраміди кулі R_k , а двогранний кут при бічному ребрі піраміди – φ . Знайти площу перерізу піраміди, проведеного через ребро основи перпендикулярно протилежному бічному ребру.

Відповідь: $\frac{1}{3}R_k^2 \operatorname{ctg}^3 \frac{\varphi}{2} \left(3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}\right)$.

5.211. З основи висоти правильної трикутної піраміди на її бічну грань проведено перпендикуляр, рівний a . Знайти об'єм піраміди, якщо плоский

кут при вершині цієї піраміди дорівнює α .

Відповідь: $\frac{9a^3 \cos^3 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{3\alpha}{2}}.$

5.211.* [1, § 32, приклад 8, с. 180] В правильній трикутній піраміді a – сторона основи, а γ – двогранний кут при ребрі основи. Знайти площу перерізу піраміди площиною, яка проходить через ребро основи й утворює з площиною основи кут δ .

Відповідь: $\frac{\sqrt{3}a^2}{4} \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \gamma \cos \delta + 2 \sin \delta}.$

•

5.212. Основою піраміди є ромб зі стороною a і гострим кутом β . Двогранні кути при основі рівні α . Визначити повну поверхню піраміди.

Відповідь: $S_n = 2 \frac{a^2 \sin \beta \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$

5.213. В основі чотирикутної піраміди лежить ромб з гострим кутом α і меншою діагоналлю d . Усі двогранні кути при основі піраміди рівні φ . Визначити площу повної поверхні піраміди.

Відповідь: $\frac{d^2}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{1}{\cos \varphi} \right).$

5.214. В основі піраміди лежить ромб, сторона якого a , а гострий кут α . Кожний із двогранних кутів при основі дорівнює φ . Знайти об'єм кулі, вписаної в цю піраміду.

Відповідь: $\frac{4}{3} \pi a^2 \sin^3 \alpha \operatorname{tg}^3 \frac{\varphi}{2}.$

5.215. В основі чотирикутної піраміди лежить рівнобічна трапеція з гострим кутом α при основі. Усі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом γ . Знайти бічну поверхню піраміди, якщо відстань від центра вписаної в піраміду кулі до вершини піраміди дорівнює d .

Відповідь: $\frac{4d^2 \cos \gamma \operatorname{ctg}^2 \frac{\gamma}{2}}{\sin \alpha}.$

5.216. В основі піраміди лежить трикутник з кутами α і β . Усі бічні ребра піраміди утворюють з площиною основи кути, рівні φ . Знайти об'єм піраміди, якщо радіус описаної навколо неї кулі дорівнює R .

Відповідь: $V = \frac{4}{3} R^3 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta) \sin^2 \varphi \sin^2 2\varphi.$

•

5.217. В конус, твірна якого нахилена до площини основи під кутом α , вписано сферу. Об'єм конуса дорівнює V . Знайти поверхню сфери.

Відповідь: $4 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt[3]{9\pi V^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$

5.218. Визначити повну поверхню конуса, якщо радіус вписаної в нього кулі дорівнює R , а твірна нахилена до площини основи під кутом α .

Відповідь: $\frac{2\pi R^2}{\cos \alpha} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$

Група Б

5.219. Основою піраміди є прямокутник, у якого кут між діагоналями дорівнює α . Одне з бічних ребер піраміди перпендикулярне до площини основи, а найбільше з бічних ребер утворює з площиною основи кут β . Радіус кулі, описаної навколо піраміди, дорівнює R . Знайти об'єм піраміди.
Відповідь: $\frac{2}{3} R^3 \sin 2\beta \cos \beta \sin \alpha$.

•
5.220. В правильній трикутній призмі сторона основи дорівнює a , кут між діагоналями, що не перетинаються, двох бічних граней дорівнює α . Знайти висоту призми.

Відповідь: $\frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2} \right)}$.

•
5.221. Тупокутний трикутник, гострі кути якого α, β , а менша висота дорівнює h , обертається навколо сторони, яка є протилежною куту β . Знайти поверхню тіла обертання.

Відповідь: $\frac{2\pi h^2}{\sin \alpha \sin^2 \beta} \sin(\alpha + \beta) \sin \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right) \cos \frac{\beta}{2}$.

5.222. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює a , кут при основі дорівнює α . Цей трикутник обертається навколо прямої, яка проходить через вершину, протилежну основі, паралельно бісектрисі кута α . Знайти поверхню тіла обертання.

Відповідь: $\pi a^2 (1 + 2 \cos \alpha) \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3\alpha}{2} \right)$.

5.223. Тупокутний рівнобедрений трикутник обертається навколо прямої, яка проходить через точку перетину його висот паралельно більшій стороні. Знайти об'єм тіла обертання, якщо тупий кут дорівнює α , а протилежна йому сторона трикутника дорівнює a .

Відповідь: $\frac{\pi a^3}{12} \left(3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \right)$.

•
5.224. В правильній чотирикутній піраміді, сторона основи якої дорівнює a і двограний кут при основі дорівнює α , через одну із сторін основи проведена площина під кутом β до площини основи. Визначити площу перерізу.

Відповідь: $a^2 \frac{\sin^2 \alpha \cos \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)}$.

5.225. Площина, яка перпендикулярна до площини основи правильної трикутної піраміди і проходить через середини двох його сторін, розбиває піраміду на дві частини. Знайти об'єми цих частин піраміди, якщо сторона основи піраміди дорівнює a , а плоский кут при вершині піраміди α .

Відповідь: $V_1 = \frac{1}{128} a^3 \sqrt{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}$; $V_2 = \frac{13}{384} a^3 \sqrt{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}$.

•

5.226. Переріз правильної чотирикутної піраміди площиною, що проходить через діагональ основи і висоту піраміди, має площу S , а сторона основи піраміди дорівнює b . Знайти двогранний кут при бічному ребрі піраміди.

Відповідь: $2\arctg \frac{\sqrt{b^4 + 4S^2}}{2S}$.

5.227. Через вершину основи правильної чотирикутної піраміди проведено площину, що перетинає протилежне бічне ребро під прямим кутом. Площа перетину в два рази менша площі основи піраміди. Визначити кут між бічним ребром і площиною основи.

Відповідь: $\arcsin \frac{\sqrt{33} + 1}{8}$.

•

5.228. Знайти плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди, якщо він дорівнює куту між бічним ребром і площиною основи піраміди.

Відповідь: $\arccos \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

5.229. Радіус кулі, описаної навколо правильної чотирикутної піраміди, відноситься до сторони основи як 3:4. Знайти кут між бічною гранню і площиною основи.

Відповідь: $\frac{\pi}{4}$ чи $\arctg 2$.

5.230. В правильній чотирикутній піраміді збігаються центри вписаної та описаної кулі. Знайти двогранний кут при ребрі основи.

Відповідь: $\arccos(\sqrt{2} - 1)$.

5.231. В правильній трикутній піраміді збігаються центри вписаної та описаної кулі. Знайти плоский кут при вершині піраміди.

Відповідь: $\pi/3$.

5.232. Бічні грані правильної трикутної призми – квадрати. Знайти кут між діагоналлю бічної грані і стороною основи призми, що не перетинає вказану діагональ.

Відповідь: $\arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$.

5.233. В конус вписано циліндр, висота якого дорівнює діаметру основи конуса. Повна поверхня циліндра дорівнює площі основи конуса. Знайти кут між твірною конуса і площиною його основи.

Відповідь: $\arctg \frac{2(4 + \sqrt{6})}{5}$.

5.234. Вершина конуса знаходиться в центрі кулі, а основа конуса дотикається поверхні кулі. Знайти кут між твірною і висотою конуса, якщо площі повних поверхонь конуса і кулі рівні.

Відповідь: $\arctg \frac{4}{3}$.

5.235. В конус вписано сферу. Лінія дотику сферичної та конічної поверхонь ділить поверхню сфери у відношенні $m : n$ ($n > m$). Знайти кут нахилу твірної конуса до його осі.

Відповідь: $\arcsin \frac{n-m}{n+m}$.

5.236. Радіус основи конуса дорівнює R , а бічна поверхня дорівнює сумі площ основи та осового переріза. Визначити об'єм конуса.

Відповідь: $\frac{2}{3}\pi^2 R^3 \frac{1}{\pi^2 - 1}$.

•

5.237. В правильну трикутну зрізану піраміду вписано сферу. Визначити відношення поверхні сфери до повної поверхні піраміди, якщо бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом α .

Відповідь: $\frac{2\pi \sin^2 \alpha}{3\sqrt{3}(4 - \sin^2 \alpha)}$.

5.238. Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди відносяться як $m : n$ ($m > n$). Висота піраміди дорівнює H . Бічне ребро утворює з площиною основи кут α . Знайти бічну поверхню піраміди.

Відповідь: $\frac{2(m+n)H^2}{m-n} \operatorname{ctg} \alpha \sqrt{2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$.

5.239. В зрізаному конусі діагоналі осового перерізу взаємно перпендикулярні і довжина кожної з них дорівнює a . Кут між твірною і площиною основи дорівнює α . Знайти повну поверхню зрізаного конуса.

Відповідь: $\frac{\pi a^2}{\sin^2 \alpha} \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{12} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{12} \right)$.

5.240. Навколо кулі описано зрізаний конус, твірні якого нахилені до площини основи під кутом α . Визначити повну поверхню цього зрізаного конуса, якщо радіус кулі дорівнює r .

Відповідь: $2\pi r^2 \left(\frac{4}{\sin^2 \alpha} - 1 \right)$.

5.241. Твірна зрізаного конуса рівна l і нахилена до площини більшої основи під кутом α . Знайти радіус кулі, описаної навколо цього конуса, якщо його бічна поверхня дорівнює S .

Відповідь: $\frac{1}{2\pi l \sin \alpha} \sqrt{S^2 + \pi^2 l^4 \sin^2 \alpha}$.

5.242. Обчислити радіуси основ зрізаного конуса, описаного навколо сфери радіуса R , знаючи, що відношення площі повної поверхні зрізаного конуса до площі поверхні сфери дорівнює m .

Відповідь: $R\sqrt{\frac{2m-1-\sqrt{4m^2-4m-3}}{2}}$; $R\sqrt{\frac{2m-1+\sqrt{4m^2-4m-3}}{2}}$.

•

5.243. Вершина правильної трикутної піраміди є центром сфери, а вершини основи піраміди лежать на поверхні цієї сфери. Відношення площі повної поверхні піраміди до площі сфери дорівнює k/π . Знайти плоский кут при вершині піраміди.

Відповідь: $\alpha = \frac{\pi}{6} + \arcsin \frac{8k - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$ при $k \in (0; 3\sqrt{38})$.

5.244. Відношення об'єму конуса до об'єму вписаної в нього кулі дорівнює k . Знайти кут між твірною конуса і площею основи конуса.

Відповідь: $\gamma = 2\arctg \sqrt{\frac{k \pm \sqrt{k^2 - 2k}}{2k}}$ при $k \geq 2$.

5.3. Елементи аналітичної геометрії на площині

Група А

Записати рівняння прямої l_1 , яка паралельна прямій l , і прямої l_2 , яка перпендикулярна прямій l , за умови, що l_1 і l_2 проходять через точку M (завдання **5.245** – **5.252**), якщо:

5.245. $l : y = 2x + 15, M(1; -2)$. Відповідь: $l_1 : y = 2x - 4; l_2 : y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

5.245.* [1, § 33, приклад 1, с. 184] $l : y = 4x + 3, M(3; -2)$.

Відповідь: $l_1 : y = 4x - 14; l_2 : y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$.

5.246. $l : y = 3x + 17, M(2; -1)$. Відповідь: $l_1 : y = 3x - 7; l_2 : y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.

5.247. $l : y = -2x + 8, M(-2; 1)$. Відповідь: $l_1 : y = -2x - 3; l_2 : y = \frac{1}{2}x + 2$.

5.248. $l : y = -3x - 7, M(-3; 4)$. Відповідь: $l_1 : y = -3x - 5; l_2 : y = \frac{1}{3}x + 5$.

5.249. $l : 2y - x + 12 = 0, M(4; 1)$. Відповідь: $l_1 : y = \frac{1}{2}x - 1; l_2 : y = 9 - 2x$.

5.250. $l : 2y + x - 6 = 0, M(4; 1)$. Відповідь: $l_1 : y = 3 - \frac{1}{2}x; l_2 : y = 2x - 7$.

5.251. $l : 3y + x - 5 = 0, M(3; 4)$. Відповідь: $l_1 : y = 5 - \frac{1}{3}x; l_2 : y = 3x - 5$.

5.252. $l : 3y - x + 8 = 0, M(3; 4)$. Відповідь: $l_1 : y = \frac{1}{3}x + 3; l_2 : y = 13 - 3x$.

•

5.253. Записати рівняння прямої, що проходить через центри заданих кіл:

а) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 1 = 0$ і $x^2 + y^2 - 6x - 12y - 46 = 0$. Відповідь: $y = x + 3$.

б) $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 11 = 0$ і $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 24 = 0$. Відповідь: $y = -x - 2$.

в) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$ і $x^2 + y^2 + 2x + 12y - 4 = 0$. Відповідь: $y = 2x - 4$.

г) $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 3 = 0$ і $x^2 + y^2 - 4x + 10y - 7 = 0$. Відповідь: $y = 1 - 3x$.

5.253.* [1, § 33, приклад 4, с. 187] Знайти радіус і центр кола

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0.$$

Відповідь: центр кола – точка $(3; -2)$, а її радіус $R = 1$.