

§ 3. Тригонометрія

3.1. Тотожні перетворення

Група А

Обчислити (завдання **3.1** – **3.15**):

3.1. $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = 5/13$ і $\pi/2 < \alpha < \pi$.

Відповідь: $\cos \alpha = -12/13$, $\operatorname{tg} \alpha = -5/12$, $\operatorname{ctg} \alpha = -12/5$.

3.2. $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = -2/3$ і $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$.

Відповідь: $\cos \alpha = \sqrt{5}/3$, $\operatorname{tg} \alpha = -2/\sqrt{5}$, $\operatorname{ctg} \alpha = -\sqrt{5}/2$.

3.2.* [1, § 18, приклад 1, с. 92]

$\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = 1/4$ і $5\pi/2 < \alpha < 3\pi$. Відповідь: $\operatorname{tg} \alpha = -1/\sqrt{15}$.

3.3. $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\cos \alpha = -7/25$ і $\pi < \alpha < 3\pi/2$.

Відповідь: $\sin \alpha = -24/25$, $\operatorname{tg} \alpha = 24/7$, $\operatorname{ctg} \alpha = 7/24$.

3.4. $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = -3/4$ і $\pi/2 < \alpha < \pi$.

Відповідь: $\sin \alpha = 3/5$, $\cos \alpha = -4/5$, $\operatorname{ctg} \alpha = -4/3$.

3.5. $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = 2$ і $\pi < \alpha < 3\pi/2$.

Відповідь: $\cos \alpha = -2/\sqrt{5}$, $\sin \alpha = -1/\sqrt{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = 1/2$.

3.6. $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = -7$ і $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$.

Відповідь: $\cos \alpha = \frac{7}{5\sqrt{2}}$, $\sin \alpha = -\frac{1}{5\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg} \alpha = -1/7$.

3.7. $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\cos(\alpha/2) = 3/5$ і $\pi/2 < \alpha < \pi$.

Відповідь: $\sin \alpha = 24/25$, $\cos \alpha = -7/25$, $\operatorname{tg} \alpha = -24/7$, $\operatorname{ctg} \alpha = -7/24$.

3.8. $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\operatorname{tg}(\alpha/2) = -3/4$.

Відповідь: $\sin \alpha = -24/25$, $\cos \alpha = 7/25$, $\operatorname{tg} \alpha = -24/7$, $\operatorname{ctg} \alpha = -7/24$.

3.9. $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\operatorname{ctg}(\alpha/2) = 5/2$.

Відповідь: $\sin \alpha = 20/29$, $\cos \alpha = 21/29$, $\operatorname{tg} \alpha = 20/21$, $\operatorname{ctg} \alpha = 21/20$.

3.10. $\sin(\alpha/2)$, $\cos(\alpha/2)$, $\operatorname{tg}(\alpha/2)$ і $\operatorname{ctg}(\alpha/2)$, якщо $\cos \alpha = -12/13$ і $\pi < \alpha < 3\pi/2$. Відповідь: $\sin(\alpha/2) = 5/\sqrt{26}$, $\cos(\alpha/2) = -1/\sqrt{26}$, $\operatorname{tg}(\alpha/2) = -5$, $\operatorname{ctg}(\alpha/2) = -1/5$.

3.11. $\sin(\alpha/2)$, $\cos(\alpha/2)$, $\operatorname{tg}(\alpha/2)$ і $\operatorname{ctg}(\alpha/2)$, якщо $\sin \alpha = 4/5$ і $5\pi/2 < \alpha < 3\pi$. Відповідь: $\sin(\alpha/2) = -2/\sqrt{5}$, $\cos(\alpha/2) = -1/\sqrt{5}$, $\operatorname{tg}(\alpha/2) = 2$, $\operatorname{ctg}(\alpha/2) = 1/2$.

3.11.* [1, § 17, приклад 2, с. 93] $\sin \frac{\alpha}{2}$, якщо $\sin \alpha = 1/4$ і $5\pi/2 < \alpha < 3\pi$.

Відповідь: $\sin \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{4+\sqrt{15}}{8}}$.

3.12. $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\sin 2\alpha = -5/13$ і $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$.

Відповідь: $\sin \alpha = -5/\sqrt{26}$, $\cos \alpha = 1/\sqrt{26}$, $\operatorname{tg} \alpha = -5$, $\operatorname{ctg} \alpha = -1/5$ або $\sin \alpha = -1/\sqrt{26}$, $\cos \alpha = 5/\sqrt{26}$, $\operatorname{tg} \alpha = -1/5$, $\operatorname{ctg} \alpha = -5$.

3.13. $\operatorname{tg}(\alpha/2)$, якщо $\sin 2\alpha = 3/5$ і $0 < \alpha < \pi/4$.

Відповідь: $\operatorname{tg}(\alpha/2) = \sqrt{10} - 3$.

•

3.14. $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha}$, якщо $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Відповідь: $-\frac{5}{12}$.

3.15. $1 + 5 \sin 2\alpha - \frac{3}{\cos 2\alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = -2$. Відповідь: 2.

3.16. Знайти $\frac{1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = a$. Відповідь: $\frac{1 - a}{1 + a}$.

•

Обчислити (завдання **3.17** – **3.28**):

3.17. $\operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 3 \right)$. Відповідь: $\frac{3}{\sqrt{10} + 1}$.

3.18. $\sin \left(2 \arccos \frac{1}{4} \right)$. Відповідь: $\frac{\sqrt{15}}{8}$.

3.18.* [1, § 17, приклад 3, с. 94]

$\sin \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{4} \right)$. Відповідь: $\sin \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{4} \right) = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{15}}{8}}$.

3.19. $\operatorname{ctg} \left(2 \arcsin \frac{2}{3} \right)$. Відповідь: $\frac{1}{4\sqrt{5}}$.

3.20. $\sin \left(\frac{3\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} \frac{4}{3} \right)$. Відповідь: $7/25$.

•

3.21. $\arcsin \left(\sin \frac{6\pi}{5} \right)$. Відповідь: $-\pi/5$.

3.22. $\arccos(\cos 9\pi)$. Відповідь: π .

3.23. $\operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{13\pi}{8} \right)$. Відповідь: $-3\pi/8$.

3.24. $\operatorname{arctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{9\pi}{7} \right)$. Відповідь: $2\pi/7$.

3.25. $\arcsin(\sin 10)$. Відповідь: $-(10 - 3\pi)$.

3.26. $\arccos(\cos 15)$. Відповідь: $15 - 4\pi$.

3.27. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-8))$. Відповідь: $3\pi - 8$.

3.28. $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 26)$. Відповідь: $26 - 8\pi$.

•

3.29. Дано: $\sin \alpha + \cos \alpha = a$. Знайти:

а) $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$. Відповідь: $\frac{1}{2}a(3 - a^2)$.

б) $\frac{1}{\sin^4 \alpha} + \frac{1}{\cos^4 \alpha}$. Відповідь: $\frac{8(1 + 2a^2 - a^4)}{(a^2 - 1)^4}$.

3.29.* [1, § 17, приклад 5, с. 96]

Відомо, що $\sin \alpha + \cos \alpha = a$.

Знайти: а) $\sin 2\alpha$; б) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$. Відповідь: а) $a^2 - 1$; б) $1 - \frac{1}{2}(a^2 - 1)^2$.

•

3.30. Знайти: $\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha$, якщо $\sin \alpha - \cos \alpha = a$. Відповідь: $\frac{1}{2}a(3 - a^2)$.

3.31. Знайти: $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$, якщо $\sin 2\alpha = a$. Відповідь: $\frac{1}{2}(2 - a^2)$.

•

3.32. Дано: $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = a$. Знайти:

а) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$. Відповідь: $a^2 - 2$.

б) $\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha$. Відповідь: $a(a^2 - 3)$.

в) $\operatorname{tg}^4 \alpha + \operatorname{ctg}^4 \alpha$. Відповідь: $a^4 - 4a^2 + 2$.

Група Б

3.33. Знайти: $\frac{\operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha}$, якщо $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{a}{b}$. Відповідь: $\frac{a + b}{a - b}$.

3.34. Знайти: $\cos(\alpha - \beta)$, якщо $\cos \alpha + \cos \beta = a$, $\sin \alpha - \sin \beta = b$, $a^2 + b^2 \neq 0$.

Відповідь: $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.

•

3.35. Знайти: $\sin \frac{\alpha + \beta}{2}$, якщо $\sin \alpha + \sin \beta = -\frac{21}{65}$, $\cos \alpha + \cos \beta = -\frac{27}{65}$,

$\pi < \alpha - \beta < 3\pi$. Відповідь: $\frac{7}{\sqrt{130}}$.

3.36. Знайти: $\cos \frac{\alpha - \beta}{2}$, якщо $\sin \alpha + \sin \beta = -\frac{27}{65}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{7}{9}$, $\frac{5}{2}\pi < \alpha <$

$< 3\pi$ и $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$. Відповідь: $\frac{27}{7\sqrt{130}}$.

3.37. Знайти: $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, якщо $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{1 - a}{1 + a}$. Відповідь: a .

3.38. Знайти: $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, якщо $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{5}$. Відповідь: 2 или $-1/3$.

3.2. Основні типи тригонометричних рівнянь

Група А

Розв'язати рівняння (завдання **3.39** – **3.130**):

3.39. $\operatorname{ctg}^2 x - 2\operatorname{ctg} x - 3 = 0$.

Відповідь: $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.40. $\operatorname{tg}^2(x/2) - 3\operatorname{tg}(x/2) - 4 = 0$.

Відповідь: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; $x = 2\operatorname{arctg} 4 + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.41. $2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.42. $\sin x + 2 \cos^2 x = 1$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}; x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.43. $2 \cos^2 x + 2\sqrt{2} \sin x - 3 = 0$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.44. $25 \sin^2 x + 100 \cos x = 89$. Відповідь: $x = \pm \arccos \frac{4}{5} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.45. $3 \sin^2 2x + 7 \cos 2x = 3$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$.

3.46. $8 \sin^2 2x - 2 \cos 2x = 5$.

Відповідь: $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \pm \frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{3}{4}\right) + \pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.47. $\cos^2 x + \sin^4 x = 1$. Відповідь: $x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$.

3.48. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2$. Відповідь: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.49. $\operatorname{tg} 2x - 2 \operatorname{ctg} 2x + 1 = 0$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}; x = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbf{Z}$.

3.50. $\cos 2x = 5 \sin x + 3$.

Відповідь: $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.50.* [1, § 18, приклад 2, с. 97] $2 \cos^2 x = 3 + 3 \sin x$.

Відповідь: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}; x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

3.51. $\cos 2x + 3 \sin x - 2 = 0$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}; x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.52. $2 \cos 2x = 8 \cos x + 3$. Відповідь: $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.53. $\cos 2x + \sin^2 x + \sin x = 0, 25$.

Відповідь: $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.54. $3 \sin 2x = 1 + \cos 4x$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{5\pi}{12} + \pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.54.* [1, § 18, приклад 4, с. 97] $\cos 8x = 2 + 3 \sin 4x$.

Відповідь: $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}; x = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbf{Z}; x = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

3.55. $\sin 3x - 3 \cos 6x = 2$.

Відповідь: $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{1}{3} \left((-1)^k \arcsin \frac{5}{6} + \pi k \right), k \in \mathbf{Z}$.

3.56. $5 \cos(x/6) - \cos(x/3) - 3 = 0$. Відповідь: $x = \pm 2\pi + 12\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.57. $5 \sin(x/6) + \cos(x/3) - 3 = 0$. Відповідь: $x = (-1)^n \pi + 6\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.58. $1 + 2 \cos x - 4 \sin(x/2) = 0$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{5\pi}{3} + 4\pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.59. $\cos x + 7 \cos(x/2) + 4 = 0$. Відповідь: $x = \pm \frac{4\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.60. $5 \cos 2x = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. Відповідь: $x = \pm \arcsin \sqrt{\frac{5}{11}} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.61. $7 \operatorname{tg} x - 4 \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 12$.

Відповідь: $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbf{Z}; x = -\operatorname{arctg} \frac{2}{7} + \pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.61.* [1, § 18, приклад 7, с. 98]

$\operatorname{tg} 3x - 5 \operatorname{ctg} 3x = 4$. Відповідь: $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{3}, m \in \mathbf{Z}; x = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 5 + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

3.62. $\operatorname{ctg}^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{ctg}^2 x = 2$. Відповідь: $x = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{\sqrt{2} + 1} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

•

3.63. $2 \sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.64. $5 \sin^2 x + \sin 2x - 3 \cos^2 x = 0$.

Відповідь: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \operatorname{arctg} \frac{3}{5} + \pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.65. $6 \sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2$.

Відповідь: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.66. $2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x + \cos^2 x = 3$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \operatorname{arctg} 2 + \pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.67. $4 \sin x \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4 \sin(\pi + x) \cos x + 2 \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cos(\pi + x) = 1$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.68. $\sin^2 x - \sin \frac{2x}{\pi} = 3 \cos^2 x$.

Відповідь: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \operatorname{arctg} 3 + \pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.69. $\sin^2(x/2) + \sin x = 3 \cos^2(x/2)$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; x = -2 \operatorname{arctg} 3 + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.69.* [1, § 18, приклад 9, с. 99]

$\sin^2 3x - 4 \sin 3x \cos 3x - 5 \cos^2 3x = 0$.

Відповідь: $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{3}, m \in \mathbf{Z}; x = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 5 + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

3.70. $3 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 2 \cos 2x = 0$.

Відповідь: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.71. $2\sin^2 x + 3\sin 2x - \cos 2x = 4$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \arctg 5 + \pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.72. $4\sin^2 2x - \sin 2x \cos 2x + \cos^2 2x = 3$.

Відповідь: $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{1}{2}\arctg 2 + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbf{Z}$.

3.73. $3\sin^2 4x - \sin 8x + 7\cos^2 4x = 4$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbf{Z}; x = -\frac{1}{4}\arctg 3 + \frac{\pi m}{4}, m \in \mathbf{Z}$.

3.73.* [1, § 18, приклад 11, с. 100] $3\sin^2 3x - 2\sin 6x - 3\cos^2 3x = 2$.

Відповідь: $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{3}, m \in \mathbf{Z}; x = \frac{1}{3}\arctg 5 + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

3.74. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$. Відповідь: $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.74.* [1, § 18, приклад 8, с. 99] $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.75. $\sin 2x + \cos 2x = 0$. Відповідь: $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$.

3.76. $2\sin^3 x + 2\sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x - \cos^3 x = 0$.

Відповідь: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \pm \arctg \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi m, m \in \mathbf{Z}$.

•

3.77. $5\sin^2 x + \sin 2x - 3\cos^2 x = 5$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \arctg 4 + \pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.77.* [1, § 18, приклад 12, с. 100] $3\sin^2 3x - 2\sin 6x - 3\cos^2 3x = 3$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}; x = -\frac{1}{3}\arctg \frac{3}{2} + \frac{\pi m}{3}, m \in \mathbf{Z}$.

3.78. $\sin^2 x - \cos 2x = 2 - 2\sin 2x$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \arctg \frac{3}{4} + \pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.79. $2\cos x \cos 3x = \sqrt{3}\cos 3x$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}$.

3.80. $(1 + \cos 4x)\sin 2x = \cos^2 2x$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z};$

$x = \frac{\pi}{12} + \pi m, m \in \mathbf{Z}; x = \frac{5\pi}{12} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

3.81. $\sin x + \sin 5x = 0$. Відповідь: $x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

3.81.* [1, § 18, приклад 13, с. 101]

$\cos 5x + \cos x = 0$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}, x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbf{Z}$.

3.82. $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 1$. Відповідь: $x = 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.83. $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = -1$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.84. $\sin 2x \sin 6x - \cos 2x \cos 6x = \sqrt{2}\sin 3x \cos 8x$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}, n \in \mathbf{Z}; x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

3.85. $\sin 2x + \cos 3x - \sin 4x = 0$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}$.

3.86. $\sin x + 2 \sin 2x + \sin 3x = 0$. Відповідь: $x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$.

3.87. $\sqrt{2} \cos x + \cos 2x + \cos 4x = 0$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$;

$x = \pm \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

3.88. $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 5x - \cos 9x = 0$.

Відповідь: $x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$; $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{21} + \frac{\pi k}{7}, k \in \mathbf{Z}$.

3.89. $\sin 2x + \sin(\pi - 8x) = \sqrt{2} \cos 3x$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbf{Z}$.

3.90. $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$.

Відповідь: $x = \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbf{Z}$; $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

3.90.* [1, § 18, приклад 14, с. 101] $\cos x + \cos 2x + \cos 5x = 0$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbf{Z}$; $x = \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}$.

3.91. $\sin 2x - \sin 3x + \sin 8x = \sin 7x$. Відповідь: $x = \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbf{Z}$.

3.92. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$; $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

3.93. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$;

$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$; $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.94. $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.95. $\cos 3x + \sin 5x = 0$. Відповідь: $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; $x = \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbf{Z}$.

3.96. $\sin 2x = \cos 5x$. Відповідь: $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}$; $x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbf{Z}$.

3.96.* [1, § 18, приклад 16, с. 102] $\cos 5x = \sin x$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}$; $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbf{Z}$.

•

3.97. $\sin x \sin 3x + \sin 4x \sin 8x = 0$. Відповідь: $x = \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbf{Z}$; $x = \frac{\pi k}{7}, k \in \mathbf{Z}$.

3.98. $\cos 3x \cos 6x = \cos 4x \cos 7x$. Відповідь: $x = \frac{\pi n}{10}, n \in \mathbf{Z}$.

3.98.* [1, § 18, приклад 15, с. 102]

$\cos \frac{3x}{2} \cos \frac{5x}{2} = \sin \frac{x}{2} \sin \frac{9x}{2}$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbf{Z}$.

3.99. $\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

3.100. $\sin(7x/2) \cos(3x/2) + \sin(x/2) \cos(5x/2) + \sin 2x \cos 7x = 0$.

Відповідь: $x = \frac{\pi n}{6}, n \in \mathbf{Z}$.

3.101. $\cos(x/2) \cos(3x/2) - \sin x \sin 3x - \sin 2x \sin 3x = 0$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{9}, k \in \mathbf{Z}$.

3.102. $4 \cos 2x \cos 3x \sin 5x = \sin 4x$. Відповідь: $x = \frac{\pi n}{8}, n \in \mathbf{Z}$.

3.103. $4 \sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 4x$.

Відповідь: $x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbf{Z}$.

3.104. $4 \cos x \cos 2x \cos 3x = 1 + \cos 2x$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbf{Z}$.

3.105. $2 \cos x \cos 2x \cos 3x = \cos 4x + 1$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

3.106. $4 \cos x \cos 2x \cos 3x = \cos 6x$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}; x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

•

3.107. $\sin^2 x + \sin^2 5x = 1$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}, k \in \mathbf{Z}$.

3.108. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbf{Z}$.

3.109. $|\sin 2x| = |\cos 5x|$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7}, k \in \mathbf{Z}$.

3.109.* [1, § 18, приклад 17, с. 102]

$\left| \cos \frac{5x}{2} \right| = \left| \sin \frac{x}{2} \right|$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbf{Z}$.

3.110. $|\sin 5x| = |\cos 3x|$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{8}, k \in \mathbf{Z}$.

3.111. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} \sin^2 2x$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$.

3.112. $\sin^6 x + \cos^6 x - \cos^2 2x = \frac{1}{16}$. Відповідь: $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$.

•

3.113. $\sin x + \cos x = 1$. Відповідь: $x = 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.113.* [1, § 18, приклад 19, с. 103]

$\sin x - \cos x = 1$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \pi + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.114. $\sin 3x - \cos 3x = 1$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi m}{3}, m \in \mathbf{Z}$.

3.115. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$. Відповідь: $x = \pm \frac{\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.116. $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{12} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{7\pi}{12} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.117. $\sin 4x + \cos 4x = \sqrt{2}/2$.

Відповідь: $x = \frac{7\pi}{48} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}; x = -\frac{\pi}{48} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbf{Z}$.

3.117.* [1, § 18, приклад 18, с. 102]

$\sin 5x + \sqrt{3} \cos 5x = \sqrt{2}$. Відповідь: $x = -\frac{\pi}{60} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{5}, m \in \mathbf{Z}$.

3.118. $\sin(x/2) + \sqrt{3} \cos(x/2) = \sqrt{3}$.

Відповідь: $x = 4\pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{2\pi}{3} + 4\pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.119. $\sin 5x - \sqrt{3} \cos 5x = 2$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbf{Z}$.

3.120. $\cos(x/3) - \sqrt{3} \sin(x/3) = 2$. Відповідь: $x = -\pi + 6\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.121. $3 \cos x - 4 \sin x = 5$. Відповідь: $x = -\arcsin \frac{4}{5} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.121.* [1, § 18, приклад 20, с. 104]

$5 \sin 2x - 12 \cos 2x = 13$. Відповідь: $x = \arctg 5 + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.122. $3 \sin x - 4 \cos x = -5\sqrt{2}/2$.

Відповідь: $x = \arcsin \frac{4}{5} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \arcsin \frac{4}{5} + \frac{5\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.123. $5 \sin x + 3 \cos x = 4$.

Відповідь: $x = (-1)^k \arcsin \frac{4}{\sqrt{34}} - \arcsin \frac{3}{\sqrt{34}} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.124. $3 \sin 2x + 2 \cos 2x = 3$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \arctg \frac{1}{5} + \pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.125. $4 \sin 2x + \cos 2x = 4$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \arctg \frac{3}{5} + \pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.126. $\sin 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 5x + \frac{1}{2} \cos 5x = 0$.

Відповідь: $x = \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; x = -\frac{\pi}{48} + \frac{\pi m}{4}, m \in \mathbf{Z}$.

3.127. $2 \sin 11x + \sqrt{3} \sin 7x + \cos 7x = 0$.

Відповідь: $x = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}; x = -\frac{\pi}{108} + \frac{\pi m}{9}, m \in \mathbf{Z}$.

3.128. $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin 3x$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi m}{5}, m \in \mathbf{Z}$.

3.129. $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{7}, m \in \mathbf{Z}$.

3.130. $\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbf{Z}$.

Група Б

3.131. Знайти розв'язки рівняння $3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x + 1 + \cos 2x = 0$, які задовольняють умові $\operatorname{ctg} x > -1/2$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.132. Знайти розв'язки рівняння $1 - \cos 2x - 4 \sin 2x + 6 \cos^2 x = 0$, які задовольняють умові $\operatorname{ctg} x < 1/2$. Відповідь: $x = \operatorname{arctg}(1/3) + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

•

Розв'язати рівняння (завдання **3.133** – **3.154**):

3.133. $\sin 2x + 5(\sin x + \cos x) + 1 = 0$. Відповідь: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.134. $1 - \sin 2x = \cos x - \sin x$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}; x = 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

3.134.* [1, § 18, приклад 21, с. 104] $\sin x \cos x + 3(\sin x - \cos x) - 3 = 0$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \pi + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.135. $-4 - \sin 2x = 4(\sin x - \cos x)$.

Відповідь: $x = 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.136. $5 \sin 2x - 11 \sin x - 11 \cos x + 7 = 0$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{10} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.137. $2 \sin^2 x + \sin x + \frac{1}{\sin x} + \frac{2}{\sin^2 x} = 6$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}; x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

3.138. $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x + 4 = 0$. Відповідь: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.138.* [1, § 18, приклад 23, с. 105]

$\operatorname{tg}^2 3x + 25 \operatorname{ctg}^2 3x - 8 \operatorname{tg} 3x + 40 \operatorname{ctg} 3x + 6 = 0$.

Відповідь: $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{3}, m \in \mathbf{Z}; x = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 5 + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

3.139. $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x - 2 = \frac{2}{\sqrt{3}}(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbf{Z}$.

3.140. $\frac{3(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} + 1 = 2 \cos^2 x$. Відповідь: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.140.* [1, § 21, приклад 1, с. 121] $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \cos x - 2 \sin x = -1$. Відповідь:

$x = \pi + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}; x = -2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

•

$$\mathbf{3.141.} \quad \sqrt{3 + 2 \cos x} = 3 \cos x + 2.$$

$$\text{Відповідь: } x = \pm \left(\pi - \arccos \frac{1}{9} \right) + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\mathbf{3.142.} \quad \sqrt{2 \sin 3x + 2} = 4 \sin 3x + 3.$$

$$\text{Відповідь: } x = -\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{7\pi}{18} + \frac{\pi m}{3}, m \in \mathbf{Z}.$$

$$\mathbf{3.143.} \quad \sqrt{6 - \sin x - 7 \cos^2 x} + \sin x = 0.$$

$$\text{Відповідь: } x = (-1)^{k+1} \arcsin(1/3) + \pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\mathbf{3.144.} \quad \sqrt{1 + 4 \cos 2x} = \sqrt{1 - 4 \cos x}. \text{ Відповідь: } x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

$$\mathbf{3.145.} \quad \sqrt{1 - 4 \cos 2x} = \sqrt{1 - 4 \sin x}. \text{ Відповідь: } x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

•

$$\mathbf{3.146.} \quad \lg^2(\sin x + 4) + 2 \lg(\sin x + 4) - \frac{5}{4} = 0.$$

$$\text{Відповідь: } x = (-1)^k \arcsin(\sqrt{10} - 4) + \pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\mathbf{3.147.} \quad \sqrt[3]{1 + \lg \operatorname{tg} x} + \sqrt[3]{1 - \lg \operatorname{tg} x} = 2. \text{ Відповідь: } x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\mathbf{3.148.} \quad 3 \log_2^2 \sin x + \log_2(1 - \cos 2x) = 2. \text{ Відповідь: } x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

$$\mathbf{3.149.} \quad 81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30.$$

$$\text{Відповідь: } x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbf{Z}; x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

$$\mathbf{3.150.} \quad 4^{\operatorname{tg}^2 x} + 2^{\frac{1}{\cos^2 x}} - 80 = 0. \text{ Відповідь: } x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\mathbf{3.151.} \quad 0, 5^{\cos 2x} - \frac{1}{4^{\sin^2 x}} = \frac{1}{2}. \text{ Відповідь: } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\mathbf{3.152.} \quad 1 + 2^{\operatorname{tg} x} = 3 \cdot 4^{\frac{\sin(\frac{\pi}{4} - x)}{\sqrt{2} \cos x}}. \text{ Відповідь: } x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\mathbf{3.153.} \quad (5 + 2\sqrt{6})^{\sin x} + (5 - 2\sqrt{6})^{\sin x} = \frac{10}{3}.$$

$$\text{Відповідь: } x = \pm \arcsin \frac{1}{\log_3(5 + 2\sqrt{6})} + \pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\mathbf{3.154.} \quad (1 + \cos x) \sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2} + \sin x = 2 \cos x. \text{ Відповідь: } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

3.3. Найпростіші тригонометричні нерівності

Група А

Розв'язати нерівності (завдання **3.155** – **3.204**):

$$\mathbf{3.155.} \quad \sin x \leq \frac{1}{2}. \text{ Відповідь: } x \in \left[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k \right], k \in \mathbf{Z}.$$

3.155.* [1, § 19, приклад 1, с. 105]

$\sin x < 1/2$. Відповідь: $x \in \left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in \mathbf{Z}$.

3.156. $\cos x < \frac{1}{2}$. Відповідь: $x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.156.* [1, § 19, приклад 2, с. 107]

$\cos x \leq 1/3$. Відповідь: $x \in [\arccos \frac{1}{3} + 2\pi n, 2\pi - \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n], n \in \mathbf{Z}$.

3.157. $\operatorname{tg} x > -1$. Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.157.* [1, § 19, приклад 3, с. 108]

$\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}$. Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbf{Z}$.

3.158. $\operatorname{ctg} x \leq -1$. Відповідь: $x \in \left[\frac{3\pi}{4} + \pi k, \pi + \pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.158.* [1, § 19, приклад 4, с. 109]

$\operatorname{ctg} x \geq -3$. Відповідь: $x \in (\pi n, \pi - \operatorname{arccotg} 3 + \pi n], n \in \mathbf{Z}$.

•

3.159. $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.159.* [1, § 19, приклад 5, с. 111] $-\frac{1}{2} \leq \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Відповідь: $x \in \left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in \mathbf{Z}$.

3.160. $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$.

Відповідь: $x \in \left[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, -\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right] \cup \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right], k \in \mathbf{Z}$.

3.161. $-\frac{1}{3} \leq \cos x < \frac{1}{4}$.

Відповідь: $x \in \left[-\pi + \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k, -\arccos \frac{1}{4} + 2\pi k\right) \cup$

$\cup \left(\arccos \frac{1}{4} + 2\pi k, \pi - \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k\right], k \in \mathbf{Z}$.

3.162. $-\sqrt{3} \leq \operatorname{tg} x < 1$. Відповідь: $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + \pi k, \frac{\pi}{4} + \pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.163. $-\sqrt{3} < \operatorname{ctg} x \leq 1$. Відповідь: $x \in \left[\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{5\pi}{6} + \pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

•

3.164. $|\sin x| \leq \frac{1}{2}$. Відповідь: $x \in \left[-\frac{\pi}{6} + \pi k, \frac{\pi}{6} + \pi k\right], k \in \mathbf{Z}$.

3.165. $|\cos x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Відповідь: $x \in \left(\frac{\pi}{6} + \pi k, \frac{5\pi}{6} + \pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.166. $|\operatorname{tg} x| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Відповідь: $x \in \left[-\frac{\pi}{6} + \pi k, \frac{\pi}{6} + \pi k\right], k \in \mathbf{Z}$.

3.167. $|\operatorname{ctg} x| < \sqrt{3}$. Відповідь: $x \in \left(\frac{\pi}{6} + \pi k, \frac{5\pi}{6} + \pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.168. $|\sin x| > \frac{1}{3}$. Відповідь: $x \in \left(\arcsin \frac{1}{3} + \pi k, \pi - \arcsin \frac{1}{3} + \pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.169. $|\cos x| \geq \frac{1}{4}$. Відповідь: $x \in \left[-\arccos \frac{1}{4} + \pi k, \arccos \frac{1}{4} + \pi k\right], k \in \mathbf{Z}$.

3.170. $|\operatorname{tg} x| > \frac{1}{2}$. Відповідь: $x \in \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right) \cup$

$\cup \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.171. $|\operatorname{ctg} x| \geq 2$.

Відповідь: $x \in (\pi k, \operatorname{arctg} 2 + \pi k] \cup [\pi - \operatorname{arctg} 2 + \pi k, \pi + \pi k), k \in \mathbf{Z}$.

•

3.172. $\cos^2 x \leq \frac{1}{16}$. Відповідь: $x \in [\arccos \frac{1}{4} + \pi k, \pi - \arccos \frac{1}{4} + \pi k], k \in \mathbf{Z}$.

3.173. $\sin^2 x \geq 1/8$.

Відповідь: $x \in \left[\arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi k, \pi - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi k\right], k \in \mathbf{Z}$.

3.174. $\operatorname{tg}^2 x < 2$. Відповідь: $x \in (-\operatorname{arctg} \sqrt{2} + \pi k, \operatorname{arctg} \sqrt{2} + \pi k), k \in \mathbf{Z}$.

3.175. $\operatorname{ctg}^2 x > 5$.

Відповідь: $x \in (\pi k, \operatorname{arctg} \sqrt{5} + \pi k) \cup (\pi - \operatorname{arctg} \sqrt{5} + \pi k, \pi + \pi k), k \in \mathbf{Z}$.

•

3.176. $2 \cos(2x + \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2}$. Відповідь: $x \in \left[\pi k, \frac{3\pi}{4} + \pi k\right], k \in \mathbf{Z}$.

3.177. $\sqrt{3} \operatorname{tg}(3x - \frac{\pi}{3}) \geq -1$. Відповідь: $x \in \left[\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}, \frac{5\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.178. $\operatorname{ctg}(3x + \frac{\pi}{3}) \leq -\sqrt{3}$. Відповідь: $x \in \left[\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, \frac{2\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.179. $\sin(3x + 1) < \frac{1}{2}$.

Відповідь: $x \in \left(\frac{5\pi}{18} - \frac{1}{3} + \frac{2\pi k}{3}, \frac{13\pi}{18} - \frac{1}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.180. $\sin^2(2x - \frac{\pi}{4}) < \frac{3}{4}$. Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}, \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}\right), k \in \mathbf{Z}$.

•

3.181. $\sin x + \cos x < \sqrt{2}$. Відповідь: $x \in \{x \in \mathbf{R} : x \neq \frac{\pi}{4} + 2\pi k\}, k \in \mathbf{Z}$.

3.182. $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x < 1$. Відповідь: $x \in (\pi k, \frac{2\pi}{3} + \pi k), k \in \mathbf{Z}$.

3.183. $\sin 3x - \cos 3x > 0$. Відповідь: $x \in \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.183.* [1, § 19, приклад 9, с. 114]

$\sin x - \sqrt{3} \cos x \geq 0$. Відповідь: $x \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in \mathbf{Z}$.

•

3.184. $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \leq 0$.

Відповідь: $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, 2\pi k\right] \cup \left[\pi + 2\pi k, \frac{4\pi}{3} + 2\pi k\right], k \in \mathbf{Z}$.

3.185. $2 \sin^2 x + \sin x > 0$.

Відповідь: $x \in \left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, -\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) \cup (2\pi k, \pi + 2\pi k), k \in \mathbf{Z}$.

3.186. $\cos^2 3x + 2 \cos 3x < 0$. Відповідь: $x \in \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.187. $2 \cos^2 2x + \cos 2x < 0$.

Відповідь: $x \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{3} + \pi k\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3} + \pi k, -\frac{\pi}{4} + \pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.187.* [1, § 19, приклад 8, с. 113] $2 \cos^2 2x - (2 - \sqrt{3}) \cos 2x - \sqrt{3} < 0$.

Відповідь: $x \in \left(-\frac{5\pi}{12} + \pi n, \pi n\right) \cup \left(\pi n, \frac{5\pi}{12} + \pi n\right), n \in \mathbf{Z}$.

3.188. $3 \sin^2 4x + 2 \cos 4x + 4 \cos^2 4x > 0$. Відповідь: $x \in \mathbf{R}$.

3.189. $4 \cos^2 x + 2 \sin^2 x < 5 \cos x$.

Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.190. $\cos x + \cos 2x \geq 0$.

Відповідь: $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right] \cup \{\pi + 2\pi k\}, k \in \mathbf{Z}$.

3.191. $2 \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 x < 1$.

Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 2\pi k\right) \cup \left(2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.192. $\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 3 < 0$. Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \pi k, \operatorname{arctg} 3 + \pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.192.* [1, § 19, приклад 7, с. 112] $\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x - 5 \geq 0$.

Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, -\frac{\pi}{4} + \pi n\right) \cup \left[\operatorname{arctg} 5 + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbf{Z}$.

3.193. $\operatorname{ctg}^2 x - 2 \operatorname{ctg} x - 3 \geq 0$.

Відповідь: $x \in (\pi k, \operatorname{arccotg} 3 + \pi k] \cup \left[\frac{3\pi}{4} + \pi k, \pi + \pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.193.* [1, § 19, приклад 6, с. 111] $\operatorname{ctg}^2 x - 4 \operatorname{ctg} x - 5 \geq 0$.

Відповідь: $x \in (\pi n, \operatorname{arccotg} 5 + \pi n] \cup \left[\frac{3\pi}{4} + \pi n, \pi + \pi n\right), n \in \mathbf{Z}$.

•

3.194. $4 \cos^3 x - \cos x > 0$. Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) \cup \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, -\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.195. $4 \sin^3 x - \sin x \leq 0$. Відповідь: $x \in \left[2\pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \pi + 2\pi k\right] \cup \left[-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, -\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right], k \in \mathbf{Z}$.

3.196. $\frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{\sin x - 1} < 0$.

Відповідь: $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.197. $\frac{2 \cos^2 x - \cos x - 1}{\cos x + 1} > 0$.

Відповідь: $x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \pi + 2\pi k\right) \cup \left(\pi + 2\pi k, \frac{4\pi}{3} + 2\pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.198. $\frac{1}{2 \cos 2x - 1} - \frac{1}{2 \cos 2x + 1} \geq -2$. Відповідь:

$x \in \left(-\frac{\pi}{6} + \pi k, \frac{\pi}{6} + \pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + \pi k, \frac{2\pi}{3} + \pi k\right) \cup \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right\}, k \in \mathbf{Z}$.

3.199. $\frac{1}{\sin 3x + 2} - \frac{1}{\sin 3x} \leq 2$.

Відповідь: $x \in \left(\frac{2\pi k}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right) \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right\}, k \in \mathbf{Z}$.

3.200. $\frac{1}{\operatorname{ctg} x + 1} - \frac{1}{\operatorname{ctg} x - 3} \leq 1$. Відповідь: $x \in (\pi k, \operatorname{arccotg} 3 + \pi k) \cup$

$\cup \left(\frac{3\pi}{4} + \pi k, \pi + \pi k\right) \cup \left\{\frac{\pi}{4} + \pi k\right\}, k \in \mathbf{Z}$.

3.201. $\frac{1}{\operatorname{tg} 2x + 3} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2x - 1} \leq 1$. Відповідь: $x \in \left\{-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right\} \cup$

$\cup \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, -\frac{1}{2} \operatorname{arccotg} 3 + \frac{\pi k}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.202. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x < 0$. Відповідь: $x \in \left(\frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.203. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x < -2$. Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, -\frac{\pi}{4} + \pi k\right) \cup$

$\cup \left(-\frac{\pi}{4} + \pi k, \pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.204. $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2} > \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Відповідь: $x \in \left(-\frac{1}{3} + 2k; 2k\right) \cup \left(\frac{2}{3} + 2k; 1 + 2k\right), k \in \mathbf{Z}$.

Група Б

Розв'язати нерівності (завдання **3.205** – **3.223**):

3.205. $\sin^6 x + \cos^6 x > \frac{5}{8}$. Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.206. $\frac{5}{4} \sin^2 x + \frac{1}{4} \sin^2 2x > \cos 2x$.

Відповідь: $x \in \left(\frac{\pi}{6} + \pi k, \frac{5\pi}{6} + \pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.207. $\cos^3 x \cos 3x - \sin^3 x \sin 3x > \frac{5}{8}$.

Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.208. $2 \operatorname{tg} 2x \leq 3 \operatorname{tg} x$.

Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \pi k, \pi k\right] \cup \left(\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.209. $\operatorname{ctg} x > \operatorname{ctg} 3x$.

Відповідь: $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{2\pi}{3} + \pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.210. $\cos^2 x (\operatorname{tg} x + 1) > 1$. Відповідь: $x \in \left(\pi k, \frac{\pi}{4} + \pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

•

3.211. $2 \sin^2 2x - 7 |\sin 2x| + 3 \geq 0$.

Відповідь: $x \in \left[-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}\right], k \in \mathbf{Z}$.

3.212. $3 \cos^2 2x - 7 |\cos 2x| + 2 \leq 0$.

Відповідь: $x \in \left[-\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + \frac{\pi k}{2}, \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + \frac{\pi k}{2}\right], k \in \mathbf{Z}$.

3.213. $4(\sin^2 x - |\cos x|) < 1$. Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + \pi k, \frac{\pi}{3} + \pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.214. $|\sin x| < |\cos x|$. Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{4} + \pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.215. $|\sin x| > |\cos x|$. Відповідь: $x \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{3\pi}{4} + \pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

•

3.216. $\sqrt{3 - 4 \cos^2 x} > 2 \sin x + 1$.

Відповідь: $x \in \left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, -\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.217. $\sqrt{3 \sin x + 1} > 4 \sin x + 1$. Відповідь: $x \in \left[-\arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k, 2\pi k\right) \cup$

$\cup \left(\pi + 2\pi k, \pi + \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k\right] k \in \mathbf{Z}$.

3.218. $\sqrt{5 + 4 \sin x} \geq 6 \sin x + 5$.

Відповідь: $x \in \left[-\pi + \arcsin \frac{5}{9} + 2\pi k, -\arcsin \frac{5}{9} + 2\pi k \right], k \in \mathbf{Z}$.

3.219. $\sqrt{3 \sin x + 1} \leq 2 \sin x + 1$.

Відповідь: $x \in [2\pi k, \pi + 2\pi k] \cup \left[-\arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k, -\arcsin \frac{1}{4} + 2\pi k \right] \cup$
 $\cup \left[\pi + \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi k, \pi + \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k \right], k \in \mathbf{Z}$.

3.220. $\sqrt{1 + 2 \cos x} + \sqrt{\cos x} > \sqrt{\frac{17}{7} - \cos x}$.

Відповідь: $x \in \left(-\arccos \frac{1}{7} + 2\pi k, \arccos \frac{1}{7} + 2\pi k \right), k \in \mathbf{Z}$.

•

3.221. $\log_{2 \sin(x/2)} 16 + \log_2 \sin(x/2) \leq 3$.

Відповідь: $x \in \left(4\pi n, \frac{\pi}{3} + 4\pi n \right) \cup \left(\frac{5\pi}{3} + 4\pi n, 2\pi + 4\pi n \right), n \in \mathbf{Z}$.

3.222. $(\log_{\sin x} 2)^2 < \log_{\sin x} (4 \sin^3 x)$.

Відповідь: $x \in \left(2\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n \right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \pi + 2\pi n \right), n \in \mathbf{Z}$.

3.223. $(\log_{\operatorname{tg} x} 3)^2 \leq 2 \log_{\operatorname{tg} x} (3 \operatorname{tg}^2 x)$.

Відповідь: $x \in \left(\pi n, \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n \right) \cup \left[\frac{\pi}{3} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in \mathbf{Z}$.

3.4. Переріз і об'єднання періодичних множин

Група А

Розв'язати рівняння (завдання **3.224** – **3.250**):

3.224. $\operatorname{tg} 3x \cos x = 0$. Відповідь: $x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}$.

3.224.* [1, § 20, приклад 4, с. 119] $\operatorname{tg} x (\cos 5x + \cos x) = 0$.

Відповідь: $x = \pi l, l \in \mathbf{Z}; x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbf{Z}; x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbf{Z}; x = \frac{5\pi}{6} + \pi n,$
 $n \in \mathbf{Z}$.

3.225. $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin 3x} = 0$. Відповідь: $x \in \emptyset$.

3.226. $\frac{\sin x}{\operatorname{ctg} x} = 0$. Відповідь: $x \in \emptyset$.

3.227. $\frac{\sin 3x + \sin x}{\cos x} = 0$. Відповідь: $x = \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.227.* [1, § 20, приклад 3, с. 118] $\frac{\cos 5x + \cos x}{\cos x} = 0$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbf{Z}; x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbf{Z}; x = \frac{5\pi}{6} + \pi l, l \in \mathbf{Z}$.

- 3.228. $\frac{\cos x - \cos 3x}{\sin x} = 0$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.
- 3.229. $\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = 0$. Відповідь: $x = \pi n, n \in \mathbf{Z}$.
- 3.230. $\frac{\cos 3x - \cos x}{\sin 3x - \sin x} = 0$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.
- 3.231. $\frac{1 - \sin^2 x}{\cos 2x} = 0$. Відповідь: $x = \pi n, n \in \mathbf{Z}$.
- 3.232. $\frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0$. Відповідь: $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.
- 3.233. $\frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} = 0$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.
- 3.234. $\frac{\cos 2x}{1 - \operatorname{tg} x} = 0$. Відповідь: $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.
- 3.235. $\frac{\cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x} = 0$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.
- 3.236. $\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} = 0$. Відповідь: $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.
- 3.237. $\frac{\sin 7x + \sin 3x}{1 - \sin 2x} = 0$. Відповідь: $x = \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{3\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbf{Z}$.
- 3.238. $\frac{1 - \cos x - \sin x}{\cos x} = 0$. Відповідь: $x = 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.
- 3.239. $\frac{1 - \cos x + \sin x}{\sin x} = 0$. Відповідь: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.
- 3.240. $\frac{\sin^2 2x - \sin^2 x}{\cos 3x + 1} = 0$. Відповідь: $x = \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}$.
- 3.241. $\frac{4 \sin x \cos^2 x - \sin x}{\cos 3x - 1} = 0$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}$.
- 3.242. $\frac{\cos x - 4 \sin^2 x \cos x}{\sin 3x + 1} = 0$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}$.
- 3.243. $\frac{\cos^2 2x - \sin^2 x}{\sin 3x - 1} = 0$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}$.
- 3.244. $\frac{\sin 2x}{\operatorname{ctg}(x/2) - 1} = 0$.
Відповідь: $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$.
-
- 3.245. $\cos x \cos 2x = -1$. Відповідь: $x = \pi + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.
- 3.246. $\cos x \cos 6x \leq -1$. Відповідь: $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.
- 3.247. $\sin x \sin 6x \leq -1$. Відповідь: $x \in \emptyset$.
- 3.248. $\sin x \cos 6x = -1$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.
- 3.249. $\sin x + \sin 5x = 2$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.
- 3.250. $\sin x \sin 5x = 1$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

Група Б

Розв'язати рівняння (завдання **3.251** – **3.268**):

3.251. $\frac{|\sin x|}{\sin x} = 4 \cos x + 3$. Відповідь: $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

3.252. $\frac{|\cos x|}{\cos x} = 4 \sin x - 3$. Відповідь: $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

•

3.253. $(2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1) \sqrt{\operatorname{ctg}(x/2)} = 0$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

3.254. $\sqrt{2 - 2,5 \sin x} = \cos x$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.255. $\sqrt{2 - 2,5 \cos 2x} = \sin 2x$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.256. $\sqrt{7 \sin x - \cos 2x} + 2 \cos x = 0$. Відповідь: $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.257. $\sqrt{4 \cos x + 3 \sin 2x} - 2 \cos x = 1$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \arctg 5 + \pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.258. $\sqrt{0,5(\sin x + \sin 3x)} = \cos x$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.259. $\sqrt{2 \cos x} = -\sqrt{3} \operatorname{ctg} x$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.260. $\sqrt{1 + 2 \sin 2x} = \cos x - \sin x$.

Відповідь: $x = 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.261. $\sqrt{\sin 3x + \cos x - \sin x} = \sqrt{\cos x - \sin 2x}$.

Відповідь: $x = 2\pi k, k \in \mathbf{Z}; x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.262. $\frac{\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{1 + \cos x}}{\cos x} = 4 \sin x$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{3\pi}{10} + \pi m, m \in \mathbf{Z}$.

•

3.263. $(0, 5)^{\frac{\sin x}{3 - 4 \cos^2 x}} = 2^{\frac{\cos 2x}{3 - 4 \cos^2 x}}$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.264. $\log_2(3 \sin x - \cos x) + \log_2 \cos x = 0$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \arctg 2 + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.265. $\log_2 \cos 2x - \log_2 \sin x - \log_2 \cos x = 1$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{8} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.266. $\log_{\sqrt{2} \sin x}(1 + \cos x) = 2$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.267. $\log_2 \sin \frac{x}{2} = \log_2(\cos x - \sin x) + \log_2(\cos x + \sin x).$

Відповідь: $x = \frac{\pi}{5} + 4\pi k, k \in \mathbf{Z}; x = \frac{9}{5}\pi + 4\pi n, n \in \mathbf{Z}.$

3.267.* [1, § 20, приклад 5, с. 119]

$\log_{((2-\sqrt{3})(2\cos x+\sqrt{3}))} \left((2-\sqrt{3})\sqrt{7-4\sin^2 x+4\sqrt{3}\sin x-4\sqrt{3}} \right) = 1.$

Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}.$

3.268. $\log_{\frac{1}{8\cos^2 x}} \sin x = \frac{1}{2}.$

Відповідь: $x = (-1)^k \frac{\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbf{Z}; x = (-1)^n \frac{3\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbf{Z}.$

•

Знайти область визначення функції (завдання **3.269** – **3.272**):

3.269. $y = \sqrt{\cos 4x} + \sqrt{\sin x}.$ Відповідь: $\left[2\pi n, \frac{\pi}{8} + 2\pi n\right] \cup$

$\cup \left[\frac{3\pi}{8} + 2\pi n, \frac{5\pi}{8} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{7\pi}{8} + 2\pi n, \pi + 2\pi n\right], n \in \mathbf{Z}.$

3.270. $y = \sqrt{\cos 3x} + \sqrt{\operatorname{tg} x}.$

Відповідь: $\left[2\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right] \cup \left[-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in \mathbf{Z}.$

3.271. $y = \sqrt{\cos 3x} + \sqrt{\cos x}.$

Відповідь: $\left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right] \cup \left\{\frac{\pi}{2} + \pi n\right\}, n \in \mathbf{Z}.$

3.271.* [1, § 20, приклад 1, с. 116] $y = \sqrt{\sin 4x} + \sqrt{\cos x}.$ Відповідь: $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi m, -\frac{\pi}{4} + 2\pi m\right] \cup \left[2\pi m, \frac{\pi}{4} + 2\pi m\right] \cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi m\right\}, m \in \mathbf{Z}.$

3.272. $y = \sqrt{\cos 3x} + \sqrt{\operatorname{ctg} x}.$ Відповідь: $\left(2\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right] \cup$

$\cup \left[-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right] \cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right\}, n \in \mathbf{Z}.$

•

Розв'язати нерівності (завдання **3.273** – **3.294**):

3.273. $\sin^2 x - \sin 2x - 3\cos^2 x > 0.$

Відповідь: $x \in \left(\operatorname{arctg} 3 + \pi k, \frac{3\pi}{4} + \pi k\right), k \in \mathbf{Z}.$

3.273.* [1, § 21, приклад 2, с. 122] $\sin^2 x - 4\sin x \cos x - 5\cos^2 x \geq 0.$

Відповідь: $x \in \left[\operatorname{arctg} 5 + \pi k, \frac{3\pi}{4} + \pi k\right], k \in \mathbf{Z}.$

3.274. $\sin^2 x + \sin 2x - 3\cos^2 x \geq 0.$

Відповідь: $x \in \left[\frac{\pi}{4} + \pi k, \pi - \operatorname{arctg} 3 + \pi k\right], k \in \mathbf{Z}.$

•

3.275. $\sin 2x > \cos x$.

Відповідь: $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.276. $\cos 2x \operatorname{tg} x \geq 0$.

Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, -\frac{\pi}{4} + \pi n\right] \cup \left[\pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n\right], n \in \mathbf{Z}$.

3.277. $\sin 4x \operatorname{tg} x \leq 0$.

Відповідь: $x \in \left[\frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{3\pi}{4} + \pi n\right] \cup \{\pi n\}, n \in \mathbf{Z}$.

3.278. $\sin x < |\cos x|$. Відповідь: $x \in \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \frac{9\pi}{4} + 2\pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.279. $\cos x > |\sin x|$. Відповідь: $\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

•

3.280. $\cos^3 x - \sin^3 x > 1 + \sin x \cos x$.

Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.281. $2\sin^2 x - \sin x + \sin 3x < 1$.

Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right) \cup$
 $\cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.282. $2\sin x \cos x + \cos 3x > \cos x$.

Відповідь: $x \in \left(2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right) \cup$
 $\cup \left(\pi + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.283. $\sin x + \sin 3x > (\sin x + \cos x)^2 - 1$.

Відповідь: $x \in \left(2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right) \cup$
 $\cup \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

•

3.284. $\left|\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right| \leq 1$. Відповідь: $x \in \left[\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right], k \in \mathbf{Z}$.

3.285. $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} > \sqrt{3}$.

Відповідь: $x \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi k; \pi - \arcsin \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

3.286. $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1$. Відповідь: $x \in \left(2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

•

3.287. $\log_2 \cos x \geq \log_2 \operatorname{tg} x$.

Відповідь: $x \in \left(2\pi k, \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbf{Z}$.

$$\mathbf{3.288.} \log_{2 \sin x} \operatorname{ctg} x > -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Відповідь: } x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \arcsin \frac{\sqrt{17}-1}{4} + 2\pi k \right), k \in \mathbf{Z}.$$

$$\mathbf{3.289.} \log_{\sin x} \operatorname{tg} x < 2 \log_{\operatorname{tg} x} \sin x + 1.$$

$$\text{Відповідь: } x \in \left(2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) \cup \left(\arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right), n \in \mathbf{Z}.$$

$$\mathbf{3.290.} \log_{\operatorname{tg} x} \left(\frac{\sin x}{2} \right) < 2.$$

$$\text{Відповідь: } x \in (2\pi n, \arcsin(\sqrt{2}-1) + 2\pi n) \cup \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right), n \in \mathbf{Z}.$$

$$\mathbf{3.291.} \log_{\operatorname{ctg} x} \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} < 1.$$

$$\text{Відповідь: } x \in \left(-\pi + 2\pi n, -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right), n \in \mathbf{Z}.$$

$$\mathbf{3.292.} \log_{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin^2 x - \frac{5}{12}} < -1. \text{ Відповідь: } x \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{3} + \pi k \right), k \in \mathbf{Z}.$$

$$\mathbf{3.293.} \log_{2 \sin x} \sqrt{1 + 2 \cos 2x} < \frac{1}{2}. \text{ Відповідь: } x \in \left(2\pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k \right) \cup \\ \cup \left(\arcsin \frac{\sqrt{13}-1}{4} + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k \right) \cup \left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \pi - \arcsin \frac{\sqrt{13}-1}{4} + 2\pi k \right) \cup \\ \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \pi + 2\pi k \right), k \in \mathbf{Z}.$$

$$\mathbf{3.294.} \sqrt{\operatorname{tg} x - 1} (\log_{\operatorname{tg} x} (2 + 4 \cos^2 x) - 2) \geq 0.$$

$$\text{Відповідь: } x \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{3} + \pi k \right], k \in \mathbf{Z}.$$

3.5. Переріз періодичних множин з неперіодичними

Група А

Знайти корені рівняння, які належать заданому проміжку (завдання

3.295 – 3.338):

$$\mathbf{3.295.} \sin^2 x - \sin x = 0, \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]. \text{ Відповідь: } x = 0, \frac{\pi}{2}.$$

$$\mathbf{3.296.} \cos 4x (1 - \sqrt{2} \sin 2x) = 0, \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]. \text{ Відповідь: } x = \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}.$$

$$\mathbf{3.297.} \sin^2 2x - \frac{1}{2} \sin 2x = 0, \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]. \text{ Відповідь: } x = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{3\pi}{2}.$$

3.298. $\sin^2 3x - 2 \sin 3x + 1 = 0, \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Відповідь: $x = \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$.

3.299. $\cos^2 \frac{x}{2} - \sqrt{2} \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = 0, [\pi, 3\pi]$. Відповідь: $x \in \emptyset$.

3.300. $\operatorname{tg}^2 \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 3 = 0, [2\pi, 3\pi]$.

Відповідь: $x = \frac{13\pi}{6}, \frac{8\pi}{3}$.

3.301. $\sin^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0, [-5\pi, -\pi]$.

Відповідь: $x = -\frac{5\pi}{4}, -\frac{13\pi}{4}$.

3.302. $2 \cos^2 x + 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 3 \sin^2 x, [\pi, 2\pi]$.

Відповідь: $x = \pi, 2\pi - \arccos \frac{3}{5}$.

3.303. $3 \sin(\pi - x) = 2 \cos^2 x, \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$. Відповідь: $x = \frac{13\pi}{6}$.

3.304. $\sin^4 x + \cos^2 2(x - \pi) = 2, [-3\pi, -\pi]$. Відповідь: $x = -\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}$.

3.305. $\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{\pi - x}{2}, [1; 5]$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$.

3.306. $2 \cos x - 2 \sin x = -3, [\pi, 2\pi]$. Відповідь: $x \in \emptyset$.

3.307. $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0, [2; 8]$. Відповідь: $x = \frac{7\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$.

3.308. $\sqrt{3} \sin^2 x - 2 \sin \left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cos \left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \sqrt{3} \cos^2 x = 0, [3; 13]$.

Відповідь: $x = \frac{4\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{3}, \frac{17\pi}{6}, \frac{10\pi}{3}, \frac{23\pi}{6}$.

3.309. $\sin^4 x - 4 \sin^2 x \cos^2 x + 3 \cos^4 x = 0, \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Відповідь: $x = \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}$.

3.310. $5 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 2, [-2, 1]$. Відповідь: $x = -\arctg \frac{5}{3}, \frac{\pi}{4}$.

3.311. $\sin 2x + 2 \cos^2 x - 2 = 2 \cos 2x, [2, 5]$. Відповідь: $x = \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$.

3.312. $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, [0, 2\pi]$. Відповідь: $x = \frac{5\pi}{6}$.

3.313. $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, [2\pi, 4\pi]$. Відповідь: $x = \frac{13\pi}{6}$.

3.314. $\sin 2x - \sin^2 2x = \cos^2 2x - \cos 2x, [1, 5]$. Відповідь: $x = \pi, \frac{5\pi}{4}$.

- 3.315.** $3 \sin x + 4 \cos x = \frac{5}{2}, [\pi, 2\pi]$. Відповідь: $x = \frac{5\pi}{3} + \arcsin \frac{3}{5}$.
- 3.316.** $\sin 5x = \sin 3x, \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Відповідь: $x = \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \pi, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}$.
- 3.316.*** [1, § 22, приклад 1, с. 124]
 $\cos 5x + \cos x = 0, [2; 3\pi/2]$. Відповідь: $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$.
- 3.317.** $\operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg} x = 0, [1; 4]$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}$.
- 3.318.** $\cos x = \sin 2x, [4, 7]$. Відповідь: $x = \frac{3\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}$.
- 3.319.** $\sin x + \sin 3x = \sin 4x, [\pi, 2\pi]$. Відповідь: $x = \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.
- 3.320.** $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0, \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.
Відповідь: $x = \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$.
- 3.321.** $\sin 2x - \cos x - 2 \sin x + 1 = 0, [1; 6]$. Відповідь: $x = \frac{5\pi}{6}$.
- 3.322.** $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = -1, [3; 6]$. Відповідь: $x = \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$.
- 3.323.** $\sin 9x + \sin 5x + 2 \sin^2 x = 1, [0, \pi]$.
Відповідь: $x = \frac{\pi}{42}, \frac{5\pi}{42}, \frac{\pi}{4}, \frac{13\pi}{42}, \frac{17\pi}{42}, \frac{25\pi}{42}, \frac{29\pi}{42}, \frac{3\pi}{4}, \frac{37\pi}{42}, \frac{41\pi}{42}$.
- 3.324.** $\cos 5x + \cos 3x + 1 = 2 \cos^2 2x, [-\pi, 0]$.
Відповідь: $x = -\frac{\pi}{8}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{3\pi}{8}, -\frac{5\pi}{8}, -\frac{7\pi}{8}$.
- 3.325.** $\sin x \sin 3x = \sin 2x \sin 4x, \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Відповідь: $x = \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \pi, \frac{6\pi}{5}, \frac{7\pi}{5}$.
- 3.326.** $\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}, \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$. Відповідь: $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$.
- 3.327.** $4 \sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 4x, \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \pi$.
- 3.328.** $\cos^2 x = \sin^2 5x, \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{12}$.
- 3.329.** $3(\cos x - \sin x) = 1 + \cos 2x - \sin 2x, [3; 6]$. Відповідь: $x = \frac{5\pi}{4}$.
- 3.330.** $(1 + \sin 2x)(\cos x - \sin x) = \cos x + \sin x, [-3; 1]$. Відповідь: $x = -\frac{\pi}{4}, 0$.
- 3.331.** $2 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{4}\right), [-4; -2]$. Відповідь: $x = -\pi$.
- 3.332.** $\sin(\pi - x) + \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin^2 x}{\sin 2x}, [-3; 2]$. Відповідь: $x = -\frac{2\pi}{3}$.

3.333. $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 1, \left[\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \right]$. Відповідь: $x = \pi$.

3.334. $8 \cos^4 x - \cos 4x = 1, [-3; 1]$. Відповідь: $x = -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$.

3.335. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}, \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right]$.

Відповідь: $x = -\frac{4\pi}{3}, -\frac{7\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}$.

3.336. $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}, [0, \pi]$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{8}$.

3.337. $\cos^4 2x + \sin^4 2x = \sin 2x \cos 2x, \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$. Відповідь: $x = \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}$.

3.338. $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4} \sin^2 2x, \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right]$. Відповідь: $x = -\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$.

Група Б

Розв'язати рівняння (завдання **3.339 – 3.352**):

3.339. $\frac{3 \operatorname{tg}^2 x - 4 \cos^2 x - 1}{\sqrt{5x - x^2 - 4}} = 0$. Відповідь: $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$.

3.340. $\frac{\operatorname{ctg}^2 x - 8 \sin^2 x - 1}{\sqrt{7x - x^2 - 6}} = 0$. Відповідь: $x = \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$.

3.341. $\cos 2x \sqrt{x+4} = 0$. Відповідь: $x = -4; x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z} : n \geq -3$.

3.341.* [1, § 22, приклад 2, с. 124]

$\sqrt{x+3}(\sin x - \sqrt{3} \cos x) = 0$. Відповідь: $x = -3; x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z} : n \geq -1$.

3.342. $\frac{\sin 3x}{\sqrt{x+\pi}} = 0$. Відповідь: $x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z} : n \geq -2$.

3.343. $\sin 2x \sqrt{4+3x-x^2} = 0$. Відповідь: $x \in \{-1; 4; 0; \pi/2; \pi\}$.

3.344. $\sin 2x \sqrt{x^2-3x-4} = 0$.

Відповідь: $x = -1; x = 4; x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z} : n \neq 0; 1; 2$.

3.345. $\sin 2x \log_3(4+3x-x^2) = 0$.

Відповідь: $x \in \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3-\sqrt{21}}{2}, \frac{3+\sqrt{21}}{2} \right\}$.

3.346. $\sin x \log_2(x^2-3x-4) = 0$.

Відповідь: $x = \pi n, n \in \mathbf{Z} : n \neq 0; 1; x = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}$.

3.347. $\operatorname{ctg}(\pi x) \log_2(4x-3x^2) = 0$. Відповідь: $x \in \{1/2; 1/3\}$.

3.348. $(\operatorname{tg}(\pi x/4) + 1)(\log_3(37x-6x^2) - \log_3 6) = 0$. Відповідь: $x \in \{3; 1/6\}$.

•

3.349. $\log \frac{4-x^2-3x}{8} (\cos x - \cos 3x) = \log \frac{4-x^2-3x}{8} \sin 2x$. Відповідь: $x = \pi/6$.

3.350. $\log \frac{9x-x^2-14}{7} (\sin 3x - \sin x) = \log \frac{9x-x^2-14}{7} \cos 2x$.

Відповідь: $x \in \{5\pi/6; 13\pi/6\}$.

3.351. $\log \frac{-x^2-6x}{10} (\sin 3x + \sin x) = \log \frac{-x^2-6x}{10} \sin 2x$. Відповідь: $x = -5\pi/3$.

3.352. $\log \frac{-x^2+6x}{11} (-\cos 3x - \cos x) = \log \frac{-x^2+6x}{11} (-\cos 2x)$.

Відповідь: $x \in \{\pi/3; 5\pi/3\}$.

•

Розв'язати нерівності (завдання **3.353** – **3.396**):

3.353. $\sqrt{2-x-x^2}(\cos x + \cos 2x) \geq 0$. Відповідь: $x \in \{-2\} \cup [-\pi/3; 1]$.

3.354. $\sqrt{4x-x^2+5}(2\sin^2 x - \sin x) \leq 0$.

Відповідь: $x \in [0; \pi/6] \cup [5\pi/6; \pi] \cup \{-1; 5\}$.

3.355. $\sqrt{5+9x-2x^2}(\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x) \leq 0$.

Відповідь: $x \in [\pi/2; 3\pi/4] \cup [3\pi/2; 5] \cup \{-1/2\}$.

3.356. $\sqrt{6-x-x^2}(\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3) \leq 0$.

Відповідь: $x \in [-3; \arctg 3 - \pi] \cup [-\pi/4; \arctg 3] \cup \{2\}$.

3.357. $\sqrt{7x-x^2-6}(2(\sqrt{2}+1)\cos x - \sqrt{2}-4\cos^2 x) \geq 0$.

Відповідь: $x \in [1; \pi/3] \cup [5\pi/3; 7\pi/4] \cup \{6\}$.

3.358. $\sqrt{12-x-x^2}(\operatorname{ctg}^2 x + (\sqrt{3}-1)\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}) \leq 0$.

Відповідь: $x \in [-4, -7\pi/6] \cup [-3\pi/4; -\pi/6] \cup [\pi/4; 5\pi/6] \cup \{3\}$.

3.359. $\frac{\sqrt{5x-x^2-4}}{\sin 2x} \geq 0$. Відповідь: $x \in [1; \pi/2] \cup (\pi; 4]$.

3.360. $\frac{\sqrt{5,9x-x^2-4,9}}{\sin 2x} \geq 0$. Відповідь: $x \in [1; \pi/2] \cup (\pi; 3\pi/2] \cup \{4, 9\}$.

3.361. $\frac{\sqrt{4x-x^2-3}}{\cos 2x} \geq 0$. Відповідь: $x \in \{1\} \cup (3\pi/4; 3]$.

3.362. $\frac{\sqrt{4,9x-x^2-3,9}}{\cos 2x} \leq 0$. Відповідь: $x \in [1; 3\pi/4] \cup \{3, 9\}$.

3.363. $\sqrt{\cos 2x(9-x^2)} \geq 0$.

Відповідь: $x \in [-3; -3\pi/4] \cup (-\pi/4; \pi/4) \cup (3\pi/4; 3] \cup \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} : n \in \mathbf{Z} \right\}$.

3.363.* [1, § 22, приклад 3, с. 125] $\sqrt{\operatorname{ctg} 2x(x^2-2x-3)} \leq 0$.

Відповідь: $x \in \left[-1; -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left(0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \mid n \in \mathbf{Z} \right\}$.

3.364. $\sqrt{\operatorname{tg} 2x(x^2+x-6)} \leq 0$. Відповідь: $x \in [-3; -3\pi/4] \cup (-\pi/2; -\pi/4) \cup (0; \pi/4) \cup (\pi/2; 2] \cup \left\{ \frac{\pi n}{2} : n \in \mathbf{Z} \right\}$.

•

3.365. $\sqrt{\sin 3x(x^2-4x+3)} \geq 0$.

Відповідь: $x \in [0; 1] \cup [3; \pi] \cup \{\pi/3; 2\pi/3\} \cup \left[\frac{2\pi n}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3} \right], n \in \mathbf{Z} : n \neq 0; 1$.

3.366. $\sqrt{\operatorname{ctg} 2x}(x^2 + x - 6) \geq 0$. Відповідь: $x \in (-\pi, -3] \cup [2; 3\pi/4] \cup \{-3\pi/4; -\pi/4; \pi/4\} \cup \left(\frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right], n \in \mathbf{Z} : n \neq -2; -1; 0; 1$.

3.367. $\sqrt{x^2 - x - 2} \operatorname{tg} 2x \leq 0$.
Відповідь: $x \in \{-1; 2\} \cup \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \frac{\pi n}{2}\right], n \in \mathbf{Z} : n \neq 0; 1$.

3.367.* [1, § 22, приклад 4, с. 126] $\frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}{\operatorname{ctg} 2x} \geq 0$.

Відповідь: $x \in \{3\} \cup \left(-\frac{\pi}{2}; -1\right] \cup \left(\frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right), k \in \mathbf{Z} : k \neq 0; \pm 1$.

3.368. $\sqrt{x^2 - 5x}(\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{ctg} x) \leq 0$.
Відповідь: $x \in \{5\} \cup \left[\frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right], n \in \mathbf{Z} : n \neq 0; 1$.

3.369. $\sqrt{x^2 - 5}(\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{ctg} x) \leq 0$.
Відповідь: $x \in \{\sqrt{5}\} \cup \left[-\frac{3\pi}{4}, -\sqrt{5}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right], n \in \mathbf{Z} : n \neq 0; -1$.

3.370. $\sqrt{x^2 + 3x - 4}(2 \sin^2 x + \sin x) \leq 0$. Відповідь: $x \in \{-4; 1\} \cup \left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, 2\pi n\right] \cup \left[\pi + 2\pi m, \frac{7\pi}{6} + 2\pi m\right], n \in \mathbf{Z} : n \neq 0, m \in \mathbf{Z} : m \neq -1$.

•

3.371. $|\operatorname{ctg}(\pi x)|(16 - x^2) \geq 0$.
Відповідь: $x \in \left\{n + \frac{1}{2} : n \in \mathbf{Z}\right\} \cup (k, k + 1), k \in \mathbf{Z} : -4 \leq k \leq 3$.

3.372. $\left|\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}\right|(25 - x^2) \geq 0$.
Відповідь: $x \in \{2n : n \in \mathbf{Z}\} \cup (2k - 1, 2k + 1), k \in \mathbf{Z} : |k| \leq 2$.

•

3.373. $(4 - x^2)\operatorname{tg}^2(\pi x) > 0$. Відповідь: $x \in (-2; -3/2) \cup (-3/2; -1) \cup (-1; -1/2) \cup (-1/2; 0) \cup (0; 1/2) \cup (1/2; 1) \cup (1; 3/2) \cup (3/2; 2)$.

3.373.* [1, § 22, приклад 5, с. 126] $|\operatorname{ctg} \pi x|(x^2 - 5x + 4) < 0$.
Відповідь: $x \in (1; 3/2) \cup (3/2; 2) \cup (2; 5/2) \cup (5/2; 3) \cup (3; 7/2) \cup (7/2; 4)$.

3.374. $(4x^2 - 12x + 5)\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x}{2} < 0$. Відповідь: $x \in (1/2; 1) \cup (1; 2) \cup (2; 5/2)$.

3.375. $(4x - x^2 - 3) \left| 25^{\cos^2 x} - \sqrt{5} \right| > 0$.

Відповідь: $x \in (1; \pi/3) \cup (\pi/3; 2\pi/3) \cup (2\pi/3; 3)$.

3.376. $(x^2 + x - 2) \left| 2^{\operatorname{ctg}^2 x} - 2 \right| < 0$.

Відповідь: $x \in (-2; -\pi/4) \cup (-\pi/4; 0) \cup (0; \pi/4) \cup (\pi/4; 1)$.

3.377. $(x^2 - x - 2)(4^{\sin^2 x} - \sqrt{2})^2 < 0$.

Відповідь: $x \in (-1; -\pi/6) \cup (-\pi/6; \pi/6) \cup (\pi/6; 2)$.

3.378. $(4 - x^2)(3^{\operatorname{tg}^2 x} - 3)^2 > 0$.

Відповідь: $x \in (-2; -\pi/2) \cup (-\pi/2; -\pi/4) \cup (-\pi/4; \pi/4) \cup (\pi/4; \pi/2) \cup (\pi/2; 2)$.

•

3.379. $x^2 + \frac{\sin 2x}{|\sin 2x|} x - 6 \leq 0$.

Відповідь: $x \in [-3; -\pi/2) \cup (-\pi/2; 0) \cup (0; \pi/2) \cup (\pi/2; 3]$.

3.380. $x^2 - 2 \frac{\operatorname{tg} x}{|\operatorname{tg} x|} x - 8 \leq 0$.

Відповідь: $x \in [-4; -\pi) \cup [-2; -\pi/2) \cup (-\pi/2; 0) \cup (0; \pi/2) \cup (\pi/2; 2) \cup (\pi; 4]$.

3.381. $\frac{|x+4|}{x+4} \operatorname{ctg} 2x \leq 0$. Відповідь: $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -4\right) \cup \left(\frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right] \cup$

$\cup \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}\right), n \in \mathbf{Z} : n \leq -4; k \in \mathbf{Z} : k \geq -3$.

•

3.382. $\sin x \log_2(x^2 - 3x - 4) > 0$. Відповідь: $x \in (2\pi n, \pi + 2\pi n), n \in \mathbf{Z} : n \neq 0$;

$x \in \left(\frac{3 - \sqrt{29}}{2}, -1\right) \cup \left(4, \frac{3 + \sqrt{29}}{2}\right)$.

3.383. $\sin x \log_2(x^2 - 3x - 4) < 0$. Відповідь: $x \in (-\pi + 2\pi n, 2\pi n)$,

$n \in \mathbf{Z} : n \neq 0; 1; x \in \left(-\pi, \frac{3 - \sqrt{29}}{2}\right) \cup \left(\frac{3 + \sqrt{29}}{2}, 2\pi\right)$.

3.384. $\sin 2x \log_3(4 + 3x - x^2) \geq 0$.

Відповідь: $x \in \left(-1, \frac{3 - \sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3 + \sqrt{21}}{2}\right]$.

3.385. $\sin 2x \log_3(4 + 3x - x^2) \leq 0$.

Відповідь: $x \in \left[\frac{3 - \sqrt{21}}{2}, 0\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \cup \left[\frac{3 + \sqrt{21}}{2}, 4\right)$.

3.386. $\log_{|\sin x|}(x^2 - 8x + 23) > \frac{3}{\log_2 |\sin x|}$.

Відповідь: $x \in (3; \pi) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 5\right)$.

•

3.387. $\sqrt{5x - 4 - x^2} \log_{\sin x}(\sqrt{5} - 1) < 0$. Відповідь: $x \in (1; \pi/2) \cup (\pi/2; \pi)$.

3.388. $\sqrt{x + 12 - x^2} \log_{\sin(x/2)}(\sqrt{3} + 1) < 0$. Відповідь: $x \in (0; \pi) \cup (\pi; 4)$.

3.389. $(x + 1)\sqrt{3 - 2x} \log_{\cos x}(\sqrt{2} + 1) < 0$. Відповідь: $x \in (-1; 0) \cup (0; 3/2)$.

3.390. $(x - 2)\sqrt{5 - x} \log_{\sin(x/2)}(\sqrt{5} - 1) < 0$. Відповідь: $x \in (2, \pi) \cup (\pi, 5)$.

3.391. $\sqrt{\sin x}(2^x - 4) < 0$. Відповідь: $x \in (0; 2) \cup (2\pi n, \pi + 2\pi n), n \in \mathbf{Z} : n \leq -1$.

3.392. $\sqrt{\cos(x/2)(3^x - 3)} \geq 0$. Відповідь: $x \in [1; \pi] \cup [-\pi + 4\pi n, \pi + 4\pi n] \cup \{\pi + 2\pi m\}, n \in \mathbf{Z} : n \geq 1, m \in \mathbf{Z} : m \leq -1$.

3.393. $\sqrt{\sin 2x} \log_3(x^2 - 3x - 3) \leq 0$. Відповідь: $x \in \left(\frac{3 + \sqrt{21}}{2}; 4\right] \cup \left\{\frac{\pi n}{2}\right\},$

$n \in \mathbf{Z} : n \neq 0; 1; 2$.

3.394. $\sqrt{\sin 2x} \log_3(x^2 - 3x - 3) \geq 0$.

Відповідь: $x \in [4; 3\pi/2] \cup \left[\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right], n \in \mathbf{Z} : n \neq 0; 1$.

3.395. $\frac{\sqrt{\log_3(7x - x^2 - 9)}}{\sin 2x - \cos x} \geq 0$. Відповідь: $x \in (5\pi/6; 3\pi/2) \cup \{2; 5\}$.

3.396. $\sqrt{4 \cos^2 x - 1} \log_{\cos x} \frac{x - 5}{2x - 1} \geq 0$.

Відповідь: $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, 2\pi k\right) \cup \left\{-\frac{\pi}{3}\right\} \cup \left(2\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right], k \in \mathbf{Z} : k \neq 0$.

•

3.397. Знайти всі розв'язки нерівності $\log_{(5-x)} \frac{x-1}{x-2} < 0$, які задовольняють нерівність $\sqrt{3 \operatorname{ctg}^2 3x - 1} \geq 0$.

Відповідь: $x \in \left[-\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}, \frac{\pi k}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi k}{3}, \frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}\right], k = 0, -1, -2, \dots;$

$x \in [2\pi/9; 1) \cup (4; 4\pi/3) \cup (4\pi/3; 13\pi/9] \cup [14\pi/9; 5)$.

Розв'язати системи (завдання **3.398** – **3.400**):

3.398.
$$\begin{cases} \log_{(5-x)} \frac{x+1}{x-3} < 0, \\ \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 3x} \geq 0. \end{cases}$$

Відповідь: $\left[\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{3}\right], k = -2, -3, \dots; x \in [17\pi/12; 19\pi/12]$.

3.399.
$$\begin{cases} \cos 6x + \cos 8x = 0, \\ \cos 3x = 2 \sin^2 2x, \\ |x| < 5. \end{cases} \quad \text{Відповідь: } x \in \left\{-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

3.400.
$$\begin{cases} \cos 13x = \cos x, \\ \cos 2x + \sin 5x = 1, \\ |x| < 3. \end{cases} \quad \text{Відповідь: } x \in \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}.$$

3.6. Рівняння і нерівності з прихованим параметром

Група А

Розв'язати рівняння (завдання **3.401** – **3.412**):

3.401. $\operatorname{tg}(4 \sin x) = 0$. Відповідь: $x = \pi n, n \in \mathbf{Z}; x = (-1)^k \arcsin \frac{\pi}{4} + \pi k,$

$k \in \mathbf{Z}; x = (-1)^{m+1} \arcsin \frac{\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbf{Z}.$

3.402. $\operatorname{tg}(3 \cos x) = 1$. Відповідь: $x = \pm \arccos \frac{\pi}{12} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$;

$x = \pm \left(\pi - \arccos \frac{\pi}{4} \right) + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

3.402.* [1, § 23, приклад 1, с. 128] $\operatorname{tg}(3 \cos x) = \sqrt{3}$. Відповідь:

$x = \pm \arccos \frac{\pi}{9} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$; $x = \pm \left(\pi - \arccos \frac{2\pi}{9} \right) + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.403. $\operatorname{ctg}(3 \cos x) = \sqrt{3}$. Відповідь: $x = \pm \arccos \frac{\pi}{18} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$;

$x = \pm \left(\pi - \arccos \frac{5\pi}{18} \right) + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

3.404. $\sin \sqrt{x} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Відповідь: $x = \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \right)^2, n \in \mathbf{N}$; $x = \left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi m \right)^2, m \in \mathbf{Z} : m \geq 0$.

3.405. $\cos \sqrt{x} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Відповідь: $x = \left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \right)^2, n \in \mathbf{N}$; $x = \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi m \right)^2, m \in \mathbf{Z} : m \geq 0$.

3.406. $\sin(\pi x^2) = 0$. Відповідь: $x = \pm \sqrt{n}, n \in \mathbf{Z} : n \geq 0$.

3.407. $\cos(\pi x^2) = -1$. Відповідь: $x = \pm \sqrt{2n+1}, n \in \mathbf{Z} : n \geq 0$.

3.408. $\operatorname{tg}(\pi \cdot 3^x) = 1$. Відповідь: $x = \log_3 \left(\frac{1}{4} + n \right), n \in \mathbf{Z} : n \geq 0$.

3.409. $\operatorname{ctg}(\pi \cdot 2^x) = \sqrt{3}$. Відповідь: $x = \log_2 \left(\frac{1}{6} + n \right), n \in \mathbf{Z} : n \geq 0$.

3.410. $\sin \frac{8\pi}{x^2+4} = 1$. Відповідь: $x \in \{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\}$.

3.410.* [1, § 23, приклад 2, с. 129]

$\sin \frac{4\pi}{x^2+2} = 0$. Відповідь: $x \in \{0; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$.

3.411. $\cos^2 \frac{6\pi}{x^2+3} = 1$. Відповідь: $x \in \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$.

3.412. $\cos^2 \frac{8\pi}{x^2+6} = 1$. Відповідь: $x = \pm \sqrt{2}$.

Група Б

Розв'язати рівняння (завдання **3.413** – **3.429**):

3.413. $\cos^2(2\pi \sin^2(\pi x)) = 1$. Відповідь: $x = m/4, m \in \mathbf{Z}$.

3.414. $\sin^2(\pi \cos^2(\pi x)) = 1$. Відповідь: $x = \frac{1}{4} + \frac{m}{2}, m \in \mathbf{Z}$.

3.415. $\operatorname{tg}^2(\pi \cos^2(\pi x)) = 1$. Відповідь: $x = \pm \frac{1}{6} + m, m \in \mathbf{Z}; x = \pm \frac{1}{3} + k, k \in \mathbf{Z}$.

3.416. $\operatorname{ctg}^2(\pi \sin^2(\pi x)) = 1$.

Відповідь: $x = \pm \frac{1}{6} + m, m \in \mathbf{Z}; x = \pm \frac{1}{3} + k, k \in \mathbf{Z}$.

•

3.417. $\sin(\pi(x^2 + x + 1)) = \sin(\pi x^2)$.

Відповідь: $x = 2n - 1, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 16m}}{4}, m \in \mathbf{Z} : m \geq 0$.

3.418. $\cos(\pi(x^2 + 4x + 1)) = \cos(\pi x^2)$.

Відповідь: $x = \frac{2n - 1}{4}, n \in \mathbf{Z}; x = \frac{-2 \pm \sqrt{2 + 4m}}{2}, m \in \mathbf{Z} : m \geq 0$.

3.419. $\operatorname{ctg}(\pi x^2) = \operatorname{ctg}(2\pi x)$.

Відповідь: $x = 1 \pm \sqrt{1 + n}, n \in \mathbf{N} : n \neq k^2 - 1, k \in \mathbf{N}$.

•

3.420. $\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{x^2 + x + 1} = -\sqrt{3}$. Відповідь: $x = \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$.

3.421. $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Відповідь: $x = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$.

•

3.422. $\cos(\pi(\cos^2 2x - 2\cos^2 x + 1)) = 1$. Відповідь: $x = \pi n/4, n \in \mathbf{Z}$.

3.423. $\sin\left(\frac{\pi}{2}(\cos^2 2x + 6\cos^2 x + 1)\right) = 0$.

Відповідь: $x = \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbf{Z}; x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{17} - 3}{2} + \pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3.424. $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{13} \cos^2 2x\right) = \operatorname{tg}(2\pi \cos^2 x)$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}; x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{13 - 5\sqrt{13}}{6} + \pi m, m \in \mathbf{Z}$.

•

3.425. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \sin x\right)$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3.426. $\sin\left(\frac{\pi}{6} \cos 2x\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3} \sin x\right)$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; x = \pm \arcsin(2 - \sqrt{3}) + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

3.427. $\sin(\pi \cos x) = \cos(\pi \sin x)$. Відповідь: $x = \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k,$

$k \in \mathbf{Z}; x = \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

•