

7.28. $x^4 - 2ax^2 + a = 0$.

Відповідь: 1) при $a \leq 0$ $x = \pm\sqrt{a + \sqrt{a^2 - a}}$; 2) при $a \in (0; 1)$ $x \in \emptyset$;
3) при $a \geq 1$ $x = \pm\sqrt{a \pm \sqrt{a^2 - a}}$.

7.29. $ax^4 - 2x^2 - 3 = 0$.

Відповідь: 1) при $a \leq 0$ $x \in \emptyset$; 2) при $a > 0$ $x = \pm\sqrt{\frac{1 + \sqrt{3a + 1}}{a}}$.

7.30. $ax^4 + 2(a - 1)x^2 + 1 = 0$.

Відповідь: 1) при $a < 0$ $x = \pm\sqrt{\frac{1 - a - \sqrt{a^2 - 3a + 1}}{a}}$; 2) при $a = 0$
 $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) при $a \in \left(0, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right]$ $x = \pm\sqrt{\frac{1 - a \pm \sqrt{a^2 - 3a + 1}}{a}}$;
4) при $a > \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ $x \in \emptyset$.

7.31. $ax^4 + 4x^2 + 5 - a = 0$.

Відповідь: 1) при $a < 0$ $x = \pm\sqrt{\frac{-2 - \sqrt{a^2 - 5a + 4}}{a}}$; 2) при $a \in [0; 5)$
 $x \in \emptyset$; 3) при $a \geq 5$ $x = \pm\sqrt{\frac{-2 + \sqrt{a^2 - 5a + 4}}{a}}$.

7.32. $(a + 1)x^4 - 2(a - 1)x^2 + 1 = 0$.

Відповідь: 1) при $a < -1$ $x = \pm\sqrt{\frac{a - 1 - \sqrt{a^2 - 3a}}{a + 1}}$; 2) при $a \in [-1; 3)$
 $x \in \emptyset$; 3) при $a \geq 3$ $x = \pm\sqrt{\frac{a - 1 \pm \sqrt{a^2 - 3a}}{a + 1}}$.

7.33. $(a + 1)x^4 + 2(a - 1)x^2 + 1 = 0$.

Відповідь: 1) при $a < -1$ $x = \pm\sqrt{\frac{1 - a - \sqrt{a^2 - 3a}}{a + 1}}$; 2) при $a = -1$
 $x = \pm 1/2$; 3) при $a \in (-1; 0]$ $x = \pm\sqrt{\frac{1 - a \pm \sqrt{a^2 - 3a}}{a + 1}}$; 4) при $a > 0$
 $x \in \emptyset$.

•

7.34. $x^2 - 2x + a > 0$.

Відповідь: 1) при $a < 1$ $x \in (-\infty, 1 - \sqrt{1 - a}) \cup (1 + \sqrt{1 - a}, \infty)$;
2) при $a = 1$ $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$; 3) при $a > 1$ $x \in \mathbf{R}$.

7.35. $x^2 + 2x + a \leq 0$.

Відповідь: 1) при $a < 1$ $x \in [-1 - \sqrt{1 - a}, -1 + \sqrt{1 - a}]$;
2) при $a = 1$ $x = -1$; 3) при $a > 1$ $x \in \emptyset$.

7.36. $x^2 - (3a + 1)x + 2a^2 + a < 0$.

Відповідь: 1) при $a < -1$ $x \in (2a + 1, a)$; 2) при $a = -1$ $x \in \emptyset$;
3) при $a > -1$ $x \in (a, 2a + 1)$.

7.36.* [1, § 45, приклад 7, с. 264]

$x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8 < 0$. Відповідь: 1) при $a < -3$ $x \in (4; -2a-2)$;

2) при $a = -3$ $x \in \emptyset$; 3) при $a > -3$ $x \in (-2a-2; 4)$.

7.37. $x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + a \geq 0$.

Відповідь: 1) при $a < -1$ $x \in (-\infty, 2a+1] \cup [a, \infty)$; 2) при $a = -1$ $x \in \mathbf{R}$;

3) при $a > -1$ $x \in (-\infty, a] \cup [2a+1, \infty)$.

7.38. $ax^2 - 4x - 2 < 0$.

Відповідь: 1) при $a \in (-\infty, -2)$ $x \in \mathbf{R}$;

2) при $a = -2$ $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$;

3) при $a \in (-2; 0)$ $x \in \left(-\infty, \frac{2+\sqrt{2(2+a)}}{a}\right) \cup \left(\frac{2-\sqrt{2(2+a)}}{a}, \infty\right)$;

4) при

$a = 0$ $x \in (-1/2; \infty)$; 5) при $a \in (0, \infty)$ $x \in \left(\frac{2-\sqrt{2(2+a)}}{a}, \frac{2+\sqrt{2(2+a)}}{a}\right)$.

7.38.* [1, § 45, приклад 8, с. 266] $(a-1)x^2 - 2(a+2)x + a+1 \leq 0$.

Відповідь: 1) при $a > 1$ $x \in \left[\frac{a+2-\sqrt{4a+5}}{a-1}; \frac{a+2+\sqrt{4a+5}}{a-1}\right]$; 2) при

$a = 1$ $x \in [1/3, \infty)$; 3) при $a \in (-5/4; 1)$ $x \in \left(-\infty, \frac{a+2+\sqrt{4a+5}}{a-1}\right] \cup$

$\cup \left(\frac{a+2-\sqrt{4a+5}}{a-1}, \infty\right)$; 4) при $a \leq -5/4$ $x \in \mathbf{R}$.

7.39. $ax^2 + 2ax - x^2 + 4 \leq 0$.

Відповідь: 1) при $a < 1$ $x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{2}{1-a}, \infty\right)$;

2) при $a = 1$ $x \in (-\infty, -2]$; 3) при $a \in (1; 2)$ $x \in \left[\frac{2}{1-a}, -2\right]$;

4) при $a = 2$ $x = -2$; 5) при $a > 2$ $x \in \left[-2, \frac{2}{1-a}\right]$.

7.40. $ax^2 - 2ax + 1 > 0$.

Відповідь: 1) при $a < 0$ $x \in \left(1 + \frac{\sqrt{a^2-a}}{a}, 1 - \frac{\sqrt{a^2-a}}{a}\right)$; 2) при $a \in [0; 1)$

$x \in \mathbf{R}$; 3) при $a \geq 1$ $\left(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{a^2-a}}{a}\right) \cup \left(1 + \frac{\sqrt{a^2-a}}{a}, \infty\right)$.

7.41. $(a+2)x^2 - x - 2 < 0$.

Відповідь: 1) при $a < -17/8$ $x \in \mathbf{R}$; 2) при $a = -17/8$

$x \in (-\infty, -4) \cup (-4, \infty)$; 3) при $a \in (-17/8, -2)$

$x \in \left(-\infty, \frac{1+\sqrt{8a+17}}{2(a+2)}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{8a+17}}{2(a+2)}, \infty\right)$; 4) при $a = -2$ $x \in (2, \infty)$;

5) при $a > -2$ $x \in \left(\frac{1-\sqrt{8a+17}}{2(a+2)}, \frac{1+\sqrt{8a+17}}{2(a+2)}\right)$.

•

7.42. $\begin{cases} 2x < 3a+2, \\ 3x > 2a+1. \end{cases}$

Відповідь: 1) при $a \leq -\frac{4}{5}$ $x \in \emptyset$; 2) при $a > -\frac{4}{5}$ $x \in \left(\frac{2a+1}{3}, \frac{3a+2}{2}\right)$.

$$7.42.* [1, \S 45, \text{приклад } 10, \text{с. } 268; \S 46, \text{приклад } 10, \text{с. } 294] \begin{cases} x \leq 3a + 4, \\ x \geq a - 2. \end{cases}$$

Відповідь: 1) при $a > -3$ $x \in [a - 2; 3a + 4]$; 2) при $a = -3$ $x = -5$; 3) при $a < -3$ $x \in \emptyset$.

$$7.43. \begin{cases} x \leq 4 - a, \\ x \geq \frac{4}{a}. \end{cases}$$

Відповідь: 1) при $a < 0$ $x \in [4/a; 4 - a]$; 2) при $a \in [0; 2) \cup (2; \infty)$ $x \in \emptyset$; 3) при $a = 2$ $x = 2$.

$$7.44. \begin{cases} x \leq 4 - a, \\ ax \geq 4. \end{cases} \quad \text{Відповідь: 1) при } a < 0 \text{ } x \in (-\infty; 4/a];$$

2) при $a \in [0; 2) \cup (2; \infty)$ $x \in \emptyset$; 3) при $a = 2$ $x = 2$.

$$7.44.* [1, \S 45, \text{приклад } 11, \text{с. } 269; \S 46, \text{приклад } 12, \text{с. } 296] \begin{cases} x > \frac{1}{a+2}, \\ (2-a)x \leq 1. \end{cases}$$

Відповідь: 1) при $a \in (-\infty, -2) \cup (0; 2)$ $x \in \left(\frac{1}{a+2}, \frac{1}{2-a}\right]$;

2) при $a \in [-2; 0]$ $x \in \emptyset$; 3) при $a \geq 2$ $x \in \left(\frac{1}{a+2}, \infty\right)$.

$$7.45. \begin{cases} x > 4 - a, \\ x \geq \frac{4}{a}. \end{cases}$$

Відповідь: 1) при $a < 0$ $x \in (4 - a, \infty)$; 2) при $a = 0$ $x \in \emptyset$; 3) при $a \in (0; 2) \cup (2; \infty)$ $x \in [4/a; \infty)$; 4) при $a = 2$ $x \in (2, \infty)$.

$$7.46. \begin{cases} x > 4 - a, \\ ax \geq 4. \end{cases}$$

Відповідь: 1) при $a \leq 0$ $x \in \emptyset$; 2) при $a \in (0; 2) \cup (2; \infty)$ $x \in [4/a; \infty)$; 3) при $a = 2$ $x \in (2, \infty)$.

$$7.47. \begin{cases} x > 4 - a, \\ x \leq \frac{4}{a}. \end{cases}$$

Відповідь: 1) при $a \in (-\infty; 0] \cup \{2\}$ $x \in \emptyset$; 2) при $a \in (0; 2) \cup (2; \infty)$ $x \in (4 - a; 4/a]$.

$$7.48. \begin{cases} x > 4 - a, \\ ax \leq 4. \end{cases} \quad \text{Відповідь: 1) при } a \leq 0 \text{ } x \in (4 - a; \infty);$$

2) при $a \in (0; 2) \cup (2; \infty)$ $x \in (4 - a; 4/a]$; 3) при $a = 2$ $x \in \emptyset$.

$$7.49. \begin{cases} x < \frac{1}{a}, \\ x \geq \frac{2}{a+1}. \end{cases}$$

Відповідь: 1) при $a \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$ $x \in \left[\frac{2}{a+1}, \frac{1}{a}\right)$;

2) при $a \in [-1; 0] \cup [1; \infty)$ $x \in \emptyset$.

$$7.50. \begin{cases} ax < 1, \\ (a+1)x \geq 2. \end{cases}$$

Відповідь: 1) при $a \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ $x \in \emptyset$; 2) при $a \in (-1; 0]$ $x \in \left[\frac{2}{a+1}, \infty\right)$; 3) при $a \in (0; 1)$ $x \in \left[\frac{2}{a+1}, \frac{1}{a}\right)$.

$$7.51. \begin{cases} x+a \geq 0, \\ ax < 1. \end{cases}$$

Відповідь: 1) при $a \leq 0$ $x \in [-a; \infty)$; 2) при $a > 0$ $x \in [-a; 1/a)$.

$$7.52. \begin{cases} x \leq 2, \\ x \geq a, \\ x^2 - a \leq 0. \end{cases} \quad \text{Відповідь: при } a \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \quad x \in \emptyset;$$

2) при $a = 0$ $x = 0$; 3) при $a \in (0; 1)$ $x \in [a, \sqrt{a}]$; 4) при $a = 1$ $x = 1$.

$$7.53. \begin{cases} x \leq 4-a, \\ ax < 4. \end{cases}$$

Відповідь: 1) при $a \leq 0$ $x \in \mathbf{R}$;

2) при $a \in (0; 2) \cup (2; \infty)$ $x \in (-\infty; 4/a)$; 3) при $a = 2$ $x \in (-\infty; 2]$.

$$7.53.* [1, \S 45, \text{приклад } 12, \text{с. } 272; \S 46 \text{приклад } 11, \text{с. } 295] \begin{cases} x < 3a+4, \\ x \geq a-2. \end{cases}$$

Відповідь: 1) при $a \geq -3$ $x \in \mathbf{R}$;

2) при $a < -3$ $x \in (-\infty, 3a+4) \cup [a-2, \infty)$.

$$7.54. \begin{cases} ax > 1, \\ (a+1)x \leq 2. \end{cases}$$

Відповідь: 1) при $a \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ $x \in \mathbf{R}$; 2) при $a \in (-1; 0]$ $x \in \left(-\infty; \frac{2}{a+1}\right]$; 3) при $a \in (0; 1)$ $x \in \left(-\infty; \frac{2}{a+1}\right] \cup \left(\frac{1}{a}; \infty\right)$.

$$7.55. \begin{cases} ax < 1, \\ (a+1)x \geq 2. \end{cases}$$

Відповідь: 1) при $a > 1$ $x \in \left(-\infty; \frac{1}{a}\right) \cup \left[\frac{2}{a+1}, \infty\right)$; 2) при $a \in [0; 1]$ $x \in \mathbf{R}$;

3) при $a \in [-1; 0)$ $x \in \left(\frac{1}{a}; \infty\right)$; 4) при $a < -1$ $x \in \left(-\infty; \frac{2}{a+1}\right] \cup \left(\frac{1}{a}; \infty\right)$.

$$7.56. \begin{cases} x-a < 0, \\ ax \geq 1. \end{cases}$$

Відповідь: 1) при $a \geq 1$ $x \in \mathbf{R}$; 2) при $a \in (0; 1)$ $x \in (-\infty; a) \cup [1/a; \infty)$;

3) при $a \in (-1; 0]$ $x \in (-\infty; a)$; 4) при $a \leq -1$ $x \in (-\infty; 1/a]$.

$$7.57. \begin{cases} x^2 - 4 = 0, \\ x^2 + 2a > 0, \\ x - a \leq 0. \end{cases} \quad \text{Відповідь: 1) при } a \leq -2 \quad x \in \emptyset;$$

2) при $a \in (-2; 2)$ $x = -2$; 3) при $a \geq 2$ $x = \pm 2$.

$$7.57.* [1, \S 45, \text{приклад } 13, \text{с. } 272] \begin{cases} x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8 = 0, \\ x^2 + 2a > 0, \\ x - 4a^2 \leq 0. \end{cases}$$

Відповідь: 1) при $a \in (-\infty, -8] \cup (-1/2; 1)$ $x = -2a - 2$; 2) при $a \in (-8; -3) \cup (-3; -2) \cup [1, \infty)$ $x \in \{4; -2a - 2\}$; 3) при $a \in \{-3\} \cup [-2, -1]$ $x = 4$; 4) при $a \in (-1, -1/2]$ $x \in \emptyset$.

7.58. $x^2 + x \frac{x-a}{|x-a|} - 2 = 0$.

Відповідь: 1) при $a > 2$ $x \in \{-1; 2\}$; 2) при $a \in [1; 2]$ $x = -1$; 3) при $a \in (-1; 1)$ $x = \pm 1$; 4) при $a \in [-2; -1]$ $x = 1$; 5) при $a < -2$ $x \in \{-2; 1\}$.

Група Б

Розв'язати рівняння, нерівності і системи з параметром a (завдання **7.59** – **7.119**):

7.59. $3 - a \sin x = 2 \sin x - 3a$.

Відповідь: 1) при $a \in (-\infty; -5/4) \cup (-1/2; \infty)$ $x \in \emptyset$;

2) при $a \in [-5/4; -1/2]$ $x = (-1)^k \arcsin \frac{3a+3}{a+2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

7.60. $a \cos x - 2 = 3 \cos x + 4a$.

Відповідь: 1) при $a \in (-\infty; -5/3) \cup (1/5; \infty)$ $x \in \emptyset$;

2) при $a \in [-5/3; 1/5]$ $x = \pm \arccos \frac{4a+2}{a-3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

7.61. $a^2 \cos 5x - 2a = 4 \cos 5x + 1$.

Відповідь: 1) при $a \in (-\infty; -3] \cup [1 - \sqrt{6}; 1] \cup [1 + \sqrt{6}; \infty)$ $x = \pm \frac{1}{5} \arccos \frac{2a+1}{a^2-4} + \frac{2\pi k}{5}$, $k \in \mathbf{Z}$; 2) при $a \in (-3; 1 - \sqrt{6}) \cup (1; 1 + \sqrt{6})$ $x \in \emptyset$.

7.62. $a^2 \sin^2 x - 5 = 4 \sin^2 x + a^2 - a - 11$.

Відповідь: 1) при $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 3)$ $x \in \emptyset$; 2) при $a = -2$ $x \in \mathbf{R}$;

3) при $a \geq 3$ $x = \pm \arcsin \sqrt{\frac{a-3}{a-2}} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

7.62.* [1, § 45, приклад 15, с. 274] $\frac{4-a}{\cos^2 5x} = a + 3$.

Відповідь: 1) при $a \in [1/2; 4)$ $x = \pm \frac{1}{5} \arccos \sqrt{\frac{4-a}{a+3}} + \frac{\pi k}{5}$, $k \in \mathbf{Z}$;

2) при $a \in (-\infty, 1/2) \cup [4, \infty)$ $x \in \emptyset$.

7.63. $\sin^2 x + \sin x + a = 0$.

Відповідь: 1) при $a \in (-\infty, 2) \cup (1/4, \infty)$ $x \in \emptyset$;

2) при $a \in [-2; 0)$ $x = (-1)^k \arcsin \frac{-1 + \sqrt{1-4a}}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;

3) при $a \in [0; \frac{1}{4}]$ $x = (-1)^k \arcsin \frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

7.64. $\cos 2x - \sin x = a$.

Відповідь: 1) при $a \in (-\infty, -2) \cup (9/8, \infty)$ $x \in \emptyset$;

2) при $a \in [-2; 0)$ $x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{9-8a}-1}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;

3) при $a \in [0, \frac{9}{8}]$ $x = (-1)^k \arcsin \frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.