Ірраціональні рівняння і нерівності

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 9 (частина третя)

Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Рівняння з кількома квадратними коренями

Якщо рівняння чи нерівність містить кілька виразів під знаком кореня парного степеня, то доцільно вказати умови, якими задається його область визначення (ОДЗ).

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+5}=\sqrt{x+4}. \tag{1}$$

Розв'язання. ОДЗ рівняння визначається умовами:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 2x+5 \geq 0, \\ x+4 \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Підкреслимо, що в подібній ситуації нерівності, як правило, можна не розв'язувати. Так, в нашому прикладі ми зробимо перетворення рівняння (1), знайдемо корені перетвореного рівняння і перевіримо, які з коренів задовольняють нерівності системи (2), а які — не задовольняють.

Рівняння з кількома квадратними коренями

Якщо рівняння чи нерівність містить кілька виразів під знаком кореня парного степеня, то доцільно вказати умови, якими задається його область визначення (ОДЗ).

П р и к л а д 1. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+5}=\sqrt{x+4}. \tag{1}$$

Р о з в' я з а н н я. ОДЗ рівняння визначається умовами:

$$\begin{cases} x+1 \ge 0, \\ 2x+5 \ge 0, \\ x+4 \ge 0. \end{cases} \tag{2}$$

Підкреслимо, що в подібній ситуації нерівності, як правило, можна не розв'язувати. Так, в нашому прикладі ми зробимо перетворення рівняння (1), знайдемо корені перетвореного рівняння і перевіримо, які з коренів задовольняють нерівності системи (2), а які — не задовольняють.

Рівняння з кількома квадратними коренями

Якщо рівняння чи нерівність містить кілька виразів під знаком кореня парного степеня, то доцільно вказати умови, якими задається його область визначення (ОДЗ).

П р и к л а д 1. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+5}=\sqrt{x+4}. \tag{1}$$

Р о з в' я з а н н я. ОДЗ рівняння визначається умовами:

$$\begin{cases} x+1\geq 0, \\ 2x+5\geq 0, \\ x+4\geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Підкреслимо, що в подібній ситуації нерівності, як правило, можна не розв'язувати. Так, в нашому прикладі ми зробимо перетворення рівняння (1), знайдемо корені перетвореного рівняння і перевіримо, які з коренів задовольняють нерівності системи (2), а які — не задовольняють.

Рівняння з кількома квадратними коренями

Якщо рівняння чи нерівність містить кілька виразів під знаком кореня парного степеня, то доцільно вказати умови, якими задається його область визначення (ОДЗ).

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+5}=\sqrt{x+4}. \qquad (1)$$

Розв'язання. ОДЗ рівняння визначається умовами:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 2x+5 \geq 0, \\ x+4 \geq 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Підкреслимо, що в подібній ситуації нерівності, як правило, можна не розв'язувати. Так, в нашому прикладі ми зробимо перетворення рівняння (1), знайдемо корені перетвореного рівняння і перевіримо, які з коренів задовольняють нерівності системи (2), а які — не задовольняють.

Рівняння з кількома квадратними коренями

Виконаємо перетворення заданого рівняння

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+5}=\sqrt{x+4}, \tag{1}$$

рівносильні на його області визначення.
Зазначимо, що піднесення до квадрату обох частин рівняння (1) не є (!) рівносильним перетворенням на ОДЗ, оскільки ліва частина рівняння (1) може набувати від'ємних значень. Тому спочатку перепишемо рівняння (1) у вигляді

$$\sqrt{x+1}=\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+5}. \tag{3}$$

Тепер обидві частини рівняння (3) невід'ємні на ОДЗ, і тому на ОДЗ їх можна піднести до квадрату:
$\left(\sqrt{x+1}\right)^2=\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+5}\right)^2 \iff$

$\iff x+1=x+4+2\sqrt{x+4}\sqrt{2x+5}+2x+5.$

Рівняння з кількома квадратними коренями

Виконаємо перетворення заданого рівняння

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+5}=\sqrt{x+4}, \qquad (1)$$

рівносильні на його області визначення.
Зазначимо, що піднесення до квадрату обох частин рівняння (1) не є (!) рівносильним перетворенням на ОДЗ, оскільки ліва частина рівняння (1) може набувати від'ємних значень. Тому спочатку перепишемо рівняння (1) у вигляді

$$\sqrt{x+1}=\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+5}. \qquad (3)$$

Тепер обидві частини рівняння (3) невід'ємні на ОДЗ, і тому на ОДЗ їх можна піднести до квадрату:
$\left(\sqrt{x+1}\right)^2=\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+5}\right)^2 \iff$

$\iff x+1=x+4+2\sqrt{x+4}\sqrt{2x+5}+2x+5.$

Рівняння з кількома квадратними коренями

Виконаємо перетворення заданого рівняння

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+5}=\sqrt{x+4}, \tag{1}$$

рівносильні на його області визначення.
Зазначимо, що піднесення до квадрату обох частин рівняння (1) не є (!) рівносильним перетворенням на ОДЗ, оскільки ліва частина рівняння (1) може набувати від'ємних значень. Тому спочатку перепишемо рівняння (1) у вигляді

$$\sqrt{x+1}=\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+5}. \tag{3}$$

Тепер обидві частини рівняння (3) невід'ємні на ОДЗ, і тому на ОДЗ їх можна піднести до квадрату:
$\left(\sqrt{x+1}\right)^2=\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+5}\right)^2 \iff$

$\iff x+1=x+4+2\sqrt{x+4}\sqrt{2x+5}+2x+5.$

Рівняння з кількома квадратними коренями

З урахуванням того, що на ОДЗ справедлива рівність $\sqrt{x+4}\sqrt{2x+5}=\sqrt{(x+4)(2x+5)}$, перетворимо рівняння до вигляду $x+1=x+4+2\sqrt{(x+4)(2x+5)}+2x+5 \iff$

$\iff -2x-8=2\sqrt{2x^2+5x+8x+20} \iff$

$\iff \sqrt{2x^2+13x+20}=-x-4$.

Перетворюючи отримане рівняння у відповідності з теоремою

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \iff \begin{cases} g(x)\geq 0, \\ f(x)=(g(x))^2, \end{cases}$$

отримуємо

$$\sqrt{2x^2+13x+20}=-x-4 \iff \begin{cases} -x-4\geq 0, \\ 2x^2+13x+20=(-x-4)^2. \end{cases}$$

Розв'язуємо квадратне рівняння системи:

$2x^2+13x+20=(-x-4)^2 \iff$

$\iff 2x^2+13x+20=x^2+8x+16 \iff$

$\iff x^2+5x+4=0 \iff \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=-4. \end{array}\right.$

Рівняння з кількома квадратними коренями

З урахуванням того, що на ОДЗ справедлива рівність $\sqrt{x+4}\sqrt{2x+5} = \sqrt{(x+4)(2x+5)}$, перетворимо рівняння до вигляду $x+1 = x+4+2\sqrt{(x+4)(2x+5)}+2x+5 \iff$

$\iff -2x-8 = 2\sqrt{2x^2+5x+8x+20} \iff$

$\iff \sqrt{2x^2+13x+20} = -x-4$.

Перетворюючи отримане рівняння у відповідності з теоремою

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = (g(x))^2, \end{cases}$$

отримуємо

$$\sqrt{2x^2+13x+20} = -x-4 \iff \begin{cases} -x-4 \geq 0, \\ 2x^2+13x+20 = (-x-4)^2. \end{cases}$$

Розв'язуємо квадратне рівняння системи:

$2x^2+13x+20 = (-x-4)^2 \iff$

$\iff 2x^2+13x+20 = x^2+8x+16 \iff$

$$\iff x^2+5x+4 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=-4. \end{array}\right.$$

Рівняння з кількома квадратними коренями

З урахуванням того, що на ОДЗ справедлива рівність $\sqrt{x+4}\sqrt{2x+5}=\sqrt{(x+4)(2x+5)}$, перетворимо рівняння до вигляду $x+1=x+4+2\sqrt{(x+4)(2x+5)}+2x+5 \iff$

$\iff -2x-8=2\sqrt{2x^2+5x+8x+20} \iff$

$\iff \sqrt{2x^2+13x+20}=-x-4.$

Перетворюючи отримане рівняння у відповідності з теоремою

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \iff \begin{cases} g(x)\geq 0, \\ f(x)=(g(x))^2, \end{cases}$$

отримуємо

$$\sqrt{2x^2+13x+20}=-x-4 \iff \begin{cases} -x-4\geq 0, \\ 2x^2+13x+20=(-x-4)^2. \end{cases}$$

Розв'язуємо квадратне рівняння системи:

$2x^2+13x+20=(-x-4)^2 \iff$

$\iff 2x^2+13x+20=x^2+8x+16 \iff$

$\iff x^2+5x+4=0 \iff \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=-4. \end{array}\right.$

Рівняння з кількома квадратними коренями

Нарешті, перевіримо, чи задовольняють знайдені корені $x=-1$, $x=-4$ нерівності записаних вище систем:

$$\text{ОДЗ:} \quad \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 2x+5 \geq 0, \\ x+4 \geq 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} -x-4 \geq 0, \\ 2x^2+13x+20=(-x-4)^2. \end{cases} \tag{4}$$

Корінь $x=-1$ належить ОДЗ, оскільки задовольняє нерівності системи (2), але не задовольняє нерівність $-x-4 \geq 0$ системи (4) і тому не є розв'язком цієї системи.

Корінь $x=-4$ є розв'язком системи (4), але не належить ОДЗ, оскільки не задовольняє нерівність $x+1 \geq 0$ системи (2).

Отже, задане рівняння не має розв'язків.

Відповідь: $x \in \varnothing$.

Рівняння з кількома квадратними коренями

Нарешті, перевіримо, чи задовольняють знайдені корені $x=-1$, $x=-4$ нерівності записаних вище систем:

$$\text{ОДЗ:}\quad \begin{cases} x+1\geq 0,\\ 2x+5\geq 0,\\ x+4\geq 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} -x-4\geq 0,\\ 2x^2+13x+20=(-x-4)^2. \end{cases} \tag{4}$$

Корінь $x=-1$ належить ОДЗ, оскільки задовольняє нерівності системи (2), але не задовольняє нерівність $-x-4\geq 0$ системи (4) і тому не є розв'язком цієї системи.

Корінь $x=-4$ є розв'язком системи (4), але не належить ОДЗ, оскільки не задовольняє нерівність $x+1\geq 0$ системи (2).

Отже, задане рівняння не має розв'язків.

Відповідь: $x\in\varnothing$.

Рівняння з кількома квадратними коренями

Нарешті, перевіримо, чи задовольняють знайдені корені $x=-1$, $x=-4$ нерівності записаних вище систем:

$$\text{ОДЗ:}\quad \begin{cases} x+1\geq 0, \\ 2x+5\geq 0, \\ x+4\geq 0, \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} -x-4\geq 0, \\ 2x^2+13x+20=(-x-4)^2. \end{cases} \qquad (4)$$

Корінь $x=-1$ належить ОДЗ, оскільки задовольняє нерівності системи (2), але не задовольняє нерівність $-x-4\geq 0$ системи (4) і тому не є розв'язком цієї системи.

Корінь $x=-4$ є розв'язком системи (4), але не належить ОДЗ, оскільки не задовольняє нерівність $x+1\geq 0$ системи (2).

Отже, задане рівняння не має розв'язків.

Відповідь: $x\in\varnothing$.

Рівняння з кількома квадратними коренями

Нарешті, перевіримо, чи задовольняють знайдені корені $x=-1$, $x=-4$ нерівності записаних вище систем:

$$\text{ОДЗ:} \quad \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 2x+5 \geq 0, \\ x+4 \geq 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} -x-4 \geq 0, \\ 2x^2+13x+20 = (-x-4)^2. \end{cases} \tag{4}$$

Корінь $x=-1$ належить ОДЗ, оскільки задовольняє нерівності системи (2), але не задовольняє нерівність $-x-4 \geq 0$ системи (4) і тому не є розв'язком цієї системи.

Корінь $x=-4$ є розв'язком системи (4), але не належить ОДЗ, оскільки не задовольняє нерівність $x+1 \geq 0$ системи (2).

Отже, задане рівняння не має розв'язків.

Відповідь: $x \in \varnothing$.

Рівняння з кількома квадратними коренями

Нарешті, перевіримо, чи задовольняють знайдені корені $x=-1$, $x=-4$ нерівності записаних вище систем:

$$\text{ОДЗ:}\quad \begin{cases} x+1\geq 0, \\ 2x+5\geq 0, \\ x+4\geq 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} -x-4\geq 0, \\ 2x^2+13x+20=(-x-4)^2. \end{cases} \tag{4}$$

Корінь $x=-1$ належить ОДЗ, оскільки задовольняє нерівності системи (2), але не задовольняє нерівність $-x-4\geq 0$ системи (4) і тому не є розв'язком цієї системи.

Корінь $x=-4$ є розв'язком системи (4), але не належить ОДЗ, оскільки не задовольняє нерівність $x+1\geq 0$ системи (2).

Отже, задане рівняння не має розв'язків.

Відповідь: $x\in\varnothing$.

Комментар

В розглянутому прикладі мы виконали перевірку коренів квадратного рівняння підстановкою їх в нерівності систем

$$\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 2x+5 \geq 0, \\ x+4 \geq 0, \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} -x-4 \geq 0, \\ 2x^2+13x+20 = (-x-4)^2, \end{cases} \quad (4)$$

не розв'язуючи самих нерівностей. Зазначимо, що якщо знайти ОДЗ, розв'язавши систему (2), то можна помітити, що система (4) не має розв'язків, які б належали ОДЗ.

Дійсно, знаходимо ОДЗ, розв'язуючи систему (2):

$$\text{ОДЗ:} \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 2x+5 \geq 0, \\ x+4 \geq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -1, \\ x \geq -5/2, \\ x \geq -4, \end{cases} \iff x \in [-1, \infty).$$

Оскільки $-x-4 \geq 0 \iff x \in (-\infty, -4]$, то нерівність системи (4) не має розв'язків, які б належали проміжку $[-1, \infty)$. Тепер стає зайвим розв'язання квадратного рівняння в системі (4).

Комментар

В розглянутому прикладі мы виконали перевірку коренів квадратного рівняння підстановкою їх в нерівності систем

$$\begin{cases} x+1\geq 0,\\ 2x+5\geq 0,\\ x+4\geq 0,\end{cases}\quad (2)\qquad \begin{cases} -x-4\geq 0,\\ 2x^2+13x+20=(-x-4)^2,\end{cases}\quad (4)$$

не розв'язуючи самих нерівностей. Зазначимо, що якщо знайти ОДЗ, розв'язавши систему (2), то можна помітити, що система (4) не має розв'язків, які б належали ОДЗ. Дійсно, знаходимо ОДЗ, розв'язуючи систему (2):

$$\text{ОДЗ:}\begin{cases} x+1\geq 0,\\ 2x+5\geq 0,\\ x+4\geq 0,\end{cases}\Longleftrightarrow \begin{cases} x\geq -1,\\ x\geq -5/2,\\ x\geq -4,\end{cases}\Longleftrightarrow x\in[-1,\infty).$$

Оскільки $-x-4\geq 0 \Longleftrightarrow x\in(-\infty,-4]$, то нерівність системи (4) не має розв'язків, які б належали проміжку $[-1,\infty)$. Тепер стає зайвим розв'язання квадратного рівняння в системі (4).

Комментар

В розглянутому прикладі мы виконали перевірку коренів квадратного рівняння підстановкою їх в нерівності систем

$$\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 2x+5 \geq 0, \\ x+4 \geq 0, \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} -x-4 \geq 0, \\ 2x^2+13x+20 = (-x-4)^2, \end{cases} \quad (4)$$

не розв'язуючи самих нерівностей. Зазначимо, що якщо знайти ОДЗ, розв'язавши систему (2), то можна помітити, що система (4) не має розв'язків, які б належали ОДЗ. Дійсно, знаходимо ОДЗ, розв'язуючи систему (2):

$$\text{ОДЗ:} \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 2x+5 \geq 0, \\ x+4 \geq 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ x \geq -5/2, \\ x \geq -4, \end{cases} \Longleftrightarrow x \in [-1, \infty).$$

Оскільки $-x-4 \geq 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, -4]$, то нерівність системи (4) не має розв'язків, які б належали проміжку $[-1, \infty)$. Тепер стає зайвим розв'язання квадратного рівняння в системі (4).

Нерівність з кількома квадратними коренями

Приклад 2. Розв'язати нерівність
$\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}\le 1$.

Розв'язання. Визначимо ОДЗ нерівності:

$$\begin{cases} x-1\ge 0, \\ 2-x\ge 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\ge 1, \\ x\le 2, \end{cases} \Longleftrightarrow x\in[1;2].$$

Оскільки на ОДЗ обидві частини нерівності невід'ємні, то на ОДЗ їх можна піднести до квадрату, так що при $x\in[1;2]$ матимемо

$$x-1+2\sqrt{(x-1)(2-x)}+2-x\le 1 \Longleftrightarrow \sqrt{(x-1)(2-x)}\le 0.$$

Отже, задана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x\in[1;2], \quad (\text{ОДЗ}) \\ \sqrt{(x-1)(2-x)}\le 0. \end{cases}$$

Оскільки обидві частини нерівності системи також невід'ємні на ОДЗ, то, підносячи їх до квадрату, при $x\in[1;2]$ отримуємо нерівність $(x-1)(2-x)\le 0$, для розв'язання якої застосуємо графічний метод.

Нерівність з кількома квадратними коренями

Приклад 2. Розв'язати нерівність
$\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}\le 1$.

Розв'язання. Визначимо ОДЗ нерівності:

$$\begin{cases} x-1\ge 0, \\ 2-x\ge 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\ge 1, \\ x\le 2, \end{cases} \Longleftrightarrow x\in[1;2].$$

Оскільки на ОДЗ обидві частини нерівності невід'ємні, то на ОДЗ їх можна піднести до квадрату, так що при $x\in[1;2]$ матимемо

$$x-1+2\sqrt{(x-1)(2-x)}+2-x\le 1 \Longleftrightarrow \sqrt{(x-1)(2-x)}\le 0.$$

Отже, задана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x\in[1;2], \quad (\text{ОДЗ}) \\ \sqrt{(x-1)(2-x)}\le 0. \end{cases}$$

Оскільки обидві частини нерівності системи також невід'ємні на ОДЗ, то, підносячи їх до квадрату, при $x\in[1;2]$ отримуємо нерівність $(x-1)(2-x)\le 0$, для розв'язання якої застосуємо графічний метод.

Нерівність з кількома квадратними коренями

П р и к л а д 2. Розв'язати нерівність
$\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}\leq 1$.

Р о з в' я з а н н я. Визначимо ОДЗ нерівності:

$$\begin{cases} x-1\geq 0, \\ 2-x\geq 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\geq 1, \\ x\leq 2, \end{cases} \Longleftrightarrow x\in[1;2].$$

Оскільки на ОДЗ обидві частини нерівності невід'ємні, то на ОДЗ їх можна піднести до квадрату, так що при $x\in[1;2]$ матимемо

$$x-1+2\sqrt{(x-1)(2-x)}+2-x\leq 1 \Longleftrightarrow \sqrt{(x-1)(2-x)}\leq 0.$$

Отже, задана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x\in[1;2], \quad (\text{ОДЗ}) \\ \sqrt{(x-1)(2-x)}\leq 0. \end{cases}$$

Оскільки обидві частини нерівності системи також невід'ємні на ОДЗ, то, підносячи їх до квадрату, при $x\in[1;2]$ отримуємо нерівність $(x-1)(2-x)\leq 0$, для розв'язання якої застосуємо графічний метод.

Нерівність з кількома квадратними коренями

П р и к л а д 2. Розв'язати нерівність
$\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}\le 1$.

Р о з в' я з а н н я. Визначимо ОДЗ нерівності:

$$\begin{cases} x-1\ge 0, \\ 2-x\ge 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\ge 1, \\ x\le 2, \end{cases} \Longleftrightarrow x\in[1;2].$$

Оскільки на ОДЗ обидві частини нерівності невід'ємні, то на ОДЗ їх можна піднести до квадрату, так що при $x\in[1;2]$ матимемо

$$x-1+2\sqrt{(x-1)(2-x)}+2-x\le 1 \Longleftrightarrow \sqrt{(x-1)(2-x)}\le 0.$$

Отже, задана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x\in[1;2], \quad (\text{ОДЗ}) \\ \sqrt{(x-1)(2-x)}\le 0. \end{cases}$$

Оскільки обидві частини нерівності системи також невід'ємні на ОДЗ, то, підносячи їх до квадрату, при $x\in[1;2]$ отримуємо нерівність $(x-1)(2-x)\le 0$, для розв'язання якої застосуємо графічний метод.

Нерівність з кількома квадратними коренями

Приклад 2. Розв'язати нерівність
$\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}\le 1$.

Розв'язання. Визначимо ОДЗ нерівності:

$$\begin{cases} x-1\ge 0, \\ 2-x\ge 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x\ge 1, \\ x\le 2, \end{cases} \iff x\in[1;2].$$

Оскільки на ОДЗ обидві частини нерівності невід'ємні, то на ОДЗ їх можна піднести до квадрату, так що при $x\in[1;2]$ матимемо

$$x-1+2\sqrt{(x-1)(2-x)}+2-x\le 1 \iff \sqrt{(x-1)(2-x)}\le 0.$$

Отже, задана нерівність рівносильна системі

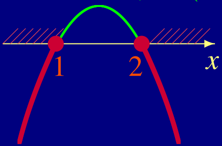
$$\begin{cases} x\in[1;2], \quad \text{(ОДЗ)} \\ \sqrt{(x-1)(2-x)}\le 0. \end{cases}$$

Оскільки обидві частини нерівності системи також невід'ємні на ОДЗ, то, підносячи їх до квадрату, при $x\in[1;2]$ отримуємо нерівність $(x-1)(2-x)\le 0$, для розв'язання якої застосуємо графічний метод.

Нерівність з кількома квадратними коренями

Графіком функції $y=(x-1)(2-x)$ є парабола, вітки якої направлені вниз. Вона перетинає вісь Ox у двох точках: $x=1$ і $x=2$, які є коренями рівняння $(x-1)(2-x)=0$. Зобразимо ескіз параболи $y=(x-1)(2-x)$ і відмітимо ту її частину, яка лежить нижче осі Ox, включаючи також точки $x=1$ і $x=2$. Спроектуємо відмічену частину параболи на вісь Ox:

$y=(x-1)(2-x)$



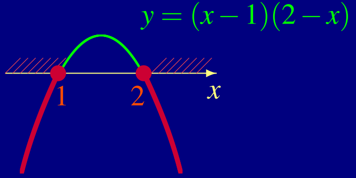
Отже, $(x-1)(2-x)\le 0 \iff x\in(-\infty,1]\cup[2,\infty)$.

Далі маємо

$$\begin{cases} x\in[1;2], & \text{(ОДЗ)} \\ \sqrt{(x-1)(2-x)}\le 0. \end{cases} \iff \begin{cases} x\in[1;2], & \text{(ОДЗ)} \\ x\in(-\infty,1]\cup[2,\infty), \end{cases}$$

Нерівність з кількома квадратними коренями

Графіком функції $y=(x-1)(2-x)$ є парабола, вітки якої направлені вниз. Вона перетинає вісь Ox у двох точках: $x=1$ і $x=2$, які є коренями рівняння $(x-1)(2-x)=0$. Зобразимо ескіз параболи $y=(x-1)(2-x)$ і відмітимо ту її частину, яка лежить нижче осі Ox, включаючи також точки $x=1$ і $x=2$. Спроектуємо відмічену частину параболи на вісь Ox:



Отже, $(x-1)(2-x)\le 0 \iff x\in(-\infty,1]\cup[2,\infty)$.

Далі маємо

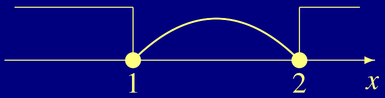
$$\begin{cases} x\in[1;2], \quad \text{(ОДЗ)} \\ \sqrt{(x-1)(2-x)}\le 0. \end{cases} \iff \begin{cases} x\in[1;2], \quad \text{(ОДЗ)} \\ x\in(-\infty,1]\cup[2,\infty), \end{cases}$$

Нерівність з кількома квадратними коренями

Нарешті, розв'язуючи систему

$$\begin{cases} x \in [1;2]\,, & \mathrm{I} \\ x \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty)\,, & \mathrm{II} \end{cases}$$

тобто перетинаючи множини $\mathrm{I} = [1;2]$ і $\mathrm{II} = (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$, знаходимо множину розв'язків заданої нерівності:



$$\mathrm{I} \cap \mathrm{II} = \{2;1\}$$

Тут множини I і II мають тільки дві спільні точки: $x = 1$ і $x = 2$. Тому $\mathrm{I} \cap \mathrm{II} = \{2;1\} = \{1;2\}$ – множина, яка складається з двох точок: $x = 1$ і $x = 2$.

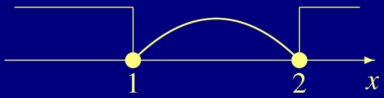
Відповідь: $x \in \{2;1\}$.

Нерівність з кількома квадратними коренями

Нарешті, розв'язуючи систему

$$\begin{cases} x \in [1;2], & \mathrm{I} \\ x \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty), & \mathrm{II} \end{cases}$$

тобто перетинаючи множини $\mathrm{I} = [1;2]$ і $\mathrm{II} = (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$, знаходимо множину розв'язків заданої нерівності:



$\mathrm{I} \cap \mathrm{II} = \{2;1\}$

Тут множини I і II мають тільки дві спільні точки: $x = 1$ і $x = 2$. Тому $\mathrm{I} \cap \mathrm{II} = \{2;1\} = \{1;2\}$ – множина, яка складається з двох точок: $x = 1$ і $x = 2$.

В і д п о в і д ь: $x \in \{2;1\}$.

Приклади (метод заміни змінних)

Приклад 3. Розв'язати нерівність
$\sqrt{x+4-6\sqrt{x-5}}+\sqrt{x+20-10\sqrt{x-5}} \geq 2$.

Розв'язання. Розв'яжемо нерівність методом заміни змінних. Нехай $t=\sqrt{x-5}$. Тоді $t^2=x-5$, звідки $x=t^2+5$, і нерівність набуває вигляду

$$\sqrt{t^2+5+4-6t}+\sqrt{t^2+5+20-10t} \geq 2 \iff$$

$$\iff \sqrt{t^2-6t+9}+\sqrt{t^2-10t+25} \geq 2 \iff$$

$$\iff \sqrt{(t-3)^2}+\sqrt{(t-5)^2} \geq 2 \iff |t-3|+|t-5| \geq 2.$$

Отриману нерівність розглянуто в Уроці 4 (частина друга), де вона розв'язана методом інтервалів, а також графічним методом.
Розглянемо розв'язання нерівності графічним методом.

Приклади (метод заміни змінних)

Приклад 3. Розв'язати нерівність
$\sqrt{x+4-6\sqrt{x-5}}+\sqrt{x+20-10\sqrt{x-5}} \geq 2$.

Розв'язання. Розв'яжемо нерівність методом заміни змінних. Нехай $t=\sqrt{x-5}$. Тоді $t^2=x-5$, звідки $x=t^2+5$, і нерівність набуває вигляду

$$\sqrt{t^2+5+4-6t}+\sqrt{t^2+5+20-10t} \geq 2 \iff$$

$$\iff \sqrt{t^2-6t+9}+\sqrt{t^2-10t+25} \geq 2 \iff$$

$$\iff \sqrt{(t-3)^2}+\sqrt{(t-5)^2} \geq 2 \iff |t-3|+|t-5| \geq 2.$$

Отриману нерівність розглянуто в Уроці 4 (частина друга), де вона розв'язана методом інтервалів, а також графічним методом.
Розглянемо розв'язання нерівності графічним методом.

Приклади (метод заміни змінних)

Приклад 3. Розв'язати нерівність
$\sqrt{x+4-6\sqrt{x-5}}+\sqrt{x+20-10\sqrt{x-5}}\geq 2$.

Розв'язання. Розв'яжемо нерівність методом заміни змінних. Нехай $t=\sqrt{x-5}$. Тоді $t^2=x-5$, звідки $x=t^2+5$, і нерівність набуває вигляду

$$\sqrt{t^2+5+4-6t}+\sqrt{t^2+5+20-10t}\geq 2 \iff$$

$$\iff \sqrt{t^2-6t+9}+\sqrt{t^2-10t+25}\geq 2 \iff$$

$$\iff \sqrt{(t-3)^2}+\sqrt{(t-5)^2}\geq 2 \iff |t-3|+|t-5|\geq 2.$$

Отриману нерівність розглянуто в Уроці 4 (частина друга), де вона розв'язана методом інтервалів, а також графічним методом.
Розглянемо розв'язання нерівності графічним методом.

Приклади (метод заміни змінних)

Приклад 3. Розв'язати нерівність

$$\sqrt{x+4-6\sqrt{x-5}}+\sqrt{x+20-10\sqrt{x-5}}\geq 2\,.$$

Розв'язання. Розв'яжемо нерівність методом заміни змінних. Нехай $t=\sqrt{x-5}$. Тоді $t^2=x-5$, звідки $x=t^2+5$, і нерівність набуває вигляду

$$\sqrt{t^2+5+4-6t}+\sqrt{t^2+5+20-10t}\geq 2 \iff$$

$$\iff \sqrt{t^2-6t+9}+\sqrt{t^2-10t+25}\geq 2 \iff$$

$$\iff \sqrt{(t-3)^2}+\sqrt{(t-5)^2}\geq 2 \iff |t-3|+|t-5|\geq 2\,.$$

Отриману нерівність розглянуто в Уроці 4 (частина друга), де вона розв'язана методом інтервалів, а також графічним методом.

Розглянемо розв'язання нерівності графічним методом.

Приклади (метод заміни змінних)

Приклад 3. Розв'язати нерівність
$\sqrt{x+4-6\sqrt{x-5}}+\sqrt{x+20-10\sqrt{x-5}}\geq 2$.

Розв'язання. Розв'яжемо нерівність методом заміни змінних. Нехай $t=\sqrt{x-5}$. Тоді $t^2=x-5$, звідки $x=t^2+5$, і нерівність набуває вигляду

$$\sqrt{t^2+5+4-6t}+\sqrt{t^2+5+20-10t}\geq 2 \iff$$

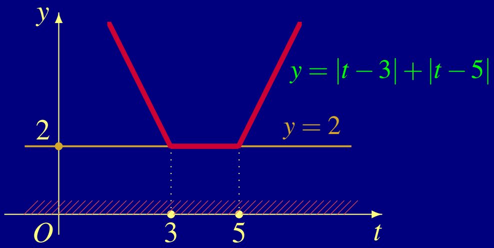
$$\iff \sqrt{t^2-6t+9}+\sqrt{t^2-10t+25}\geq 2 \iff$$

$$\iff \sqrt{(t-3)^2}+\sqrt{(t-5)^2}\geq 2 \iff |t-3|+|t-5|\geq 2.$$

Отриману нерівність розглянуто в Уроці 4 (частина друга), де вона розв'язана методом інтервалів, а також графічним методом.
Розглянемо розв'язання нерівності графічним методом.

Приклади (метод заміни змінних)

Знаходимо ті частини графіка функції $y = |t-3| + |t-5|$, які розміщені або вище прямої $y = 2$, або співпадають з частиною цієї прямої, і проектуємо їх на вісь Ot:



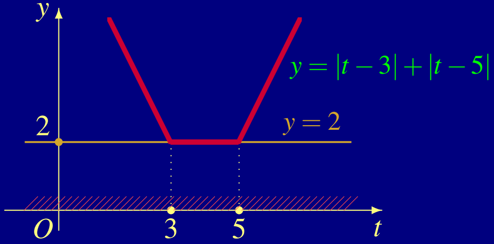
Отже, $|t-3| + |t-5| \geq 2 \iff t \in \mathbf{R}$.

Після зворотної заміни $t = \sqrt{x-5}$ відзначимо, що множиною розв'язків умови $\sqrt{x-5} \in \mathbf{R}$ є область визначення функції $y = \sqrt{x-5}$, тобто множина $[5, \infty)$.

В і д п о в і д ь: $x \in [5, \infty)$.

Приклади (метод заміни змінних)

Знаходимо ті частини графіка функції $y = |t-3| + |t-5|$, які розміщені або вище прямої $y = 2$, або співпадають з частиною цієї прямої, і проектуємо їх на вісь Ot:



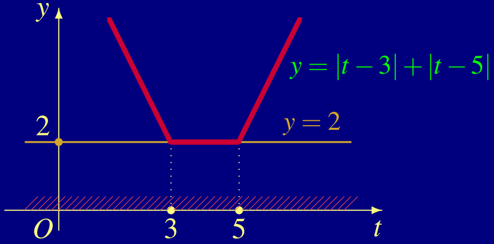
Отже, $|t-3| + |t-5| \geq 2 \iff t \in \mathbf{R}$.

Після зворотної заміни $t = \sqrt{x-5}$ відзначимо, що множиною розв'язків умови $\sqrt{x-5} \in \mathbf{R}$ є область визначення функції $y = \sqrt{x-5}$, тобто множина $[5, \infty)$.

Відповідь: $x \in [5, \infty)$.

Приклади (метод заміни змінних)

Знаходимо ті частини графіка функції $y = |t-3| + |t-5|$, які розміщені або вище прямої $y = 2$, або співпадають з частиною цієї прямої, і проектуємо їх на вісь Ot:



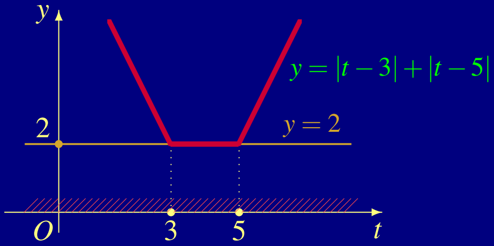
Отже, $|t-3| + |t-5| \geq 2 \iff t \in \mathbf{R}$.

Після зворотної заміни $t = \sqrt{x-5}$ відзначимо, що множиною розв'язків умови $\sqrt{x-5} \in \mathbf{R}$ є область визначення функції $y = \sqrt{x-5}$, тобто множина $[5, \infty)$.

Відповідь: $x \in [5, \infty)$.

Приклади (метод заміни змінних)

Знаходимо ті частини графіка функції $y = |t-3| + |t-5|$, які розміщені або вище прямої $y = 2$, або співпадають з частиною цієї прямої, і проектуємо їх на вісь Ot:



Отже, $|t-3| + |t-5| \geq 2 \iff t \in \mathbf{R}$.

Після зворотної заміни $t = \sqrt{x-5}$ відзначимо, що множиною розв'язків умови $\sqrt{x-5} \in \mathbf{R}$ є область визначення функції $y = \sqrt{x-5}$, тобто множина $[5, \infty)$.

Відповідь: $x \in [5, \infty)$.

Приклади (метод заміни змінних)

Приклад 4. Розв'язати рівняння
$\sqrt{x+4-6\sqrt{x-5}}+\sqrt{x+20-10\sqrt{x-5}}=2$.

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння методом заміни змінних. Як і в попередньому прикладі, за допомогою заміни $t=\sqrt{x-5}$ (при цьому $x=t^2+5$) отримуємо рівняння

$$\sqrt{t^2+5+4-6t}+\sqrt{t^2+5+20-10t}=2 \iff$$

$$\iff \sqrt{t^2-6t+9}+\sqrt{t^2-10t+25}=2 \iff$$

$$\iff \sqrt{(t-3)^2}+\sqrt{(t-5)^2}=2 \iff |t-3|+|t-5|=2.$$

Отримане рівняння розглянуто в Уроці 4 (частина друга).
Розглянемо розв'язання рівняння графічним методом.

Приклади (метод заміни змінних)

П р и к л а д 4. Розв'язати рівняння
$\sqrt{x+4-6\sqrt{x-5}}+\sqrt{x+20-10\sqrt{x-5}}=2$.

Р о з в' я з а н н я. Розв'яжемо рівняння методом заміни змінних. Як і в попередньому прикладі, за допомогою заміни $t=\sqrt{x-5}$ (при цьому $x=t^2+5$) отримуємо рівняння

$$\sqrt{t^2+5+4-6t}+\sqrt{t^2+5+20-10t}=2 \iff$$

$$\iff \sqrt{t^2-6t+9}+\sqrt{t^2-10t+25}=2 \iff$$

$$\iff \sqrt{(t-3)^2}+\sqrt{(t-5)^2}=2 \iff |t-3|+|t-5|=2.$$

Отримане рівняння розглянуто в Уроці 4 (частина друга).
Розглянемо розв'язання рівняння графічним методом.

Приклади (метод заміни змінних)

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x+4-6\sqrt{x-5}}+\sqrt{x+20-10\sqrt{x-5}}=2\,.$$

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння методом заміни змінних. Як і в попередньому прикладі, за допомогою заміни $t=\sqrt{x-5}$ (при цьому $x=t^2+5$) отримуємо рівняння

$$\sqrt{t^2+5+4-6t}+\sqrt{t^2+5+20-10t}=2 \iff$$

$$\iff \sqrt{t^2-6t+9}+\sqrt{t^2-10t+25}=2 \iff$$

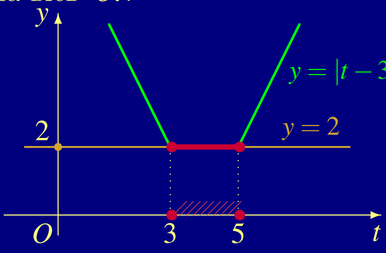
$$\iff \sqrt{(t-3)^2}+\sqrt{(t-5)^2}=2 \iff |t-3|+|t-5|=2\,.$$

Отримане рівняння розглянуто в Уроці 4 (частина друга).

Розглянемо розв'язання рівняння графічним методом.

Приклади (метод заміни змінних)

Знаходимо частину графіка функції $y = |x-3| + |x-5|$, яка співпадає з частиною прямої $y = 2$, і проектуємо її на вісь Ot:

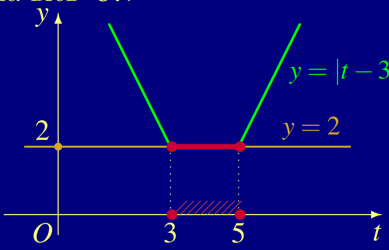


Отже,
$|t-3| + |t-5| = 2 \iff$
$\iff t \in [3;5]$.

Після зворотної заміни $t = \sqrt{x-5}$ маємо
$\sqrt{x-5} \in [3;5] \iff 3 \le \sqrt{x-5} \le 5$.
Оскільки всі частини подвійної нерівності невід'ємні, то після піднесення їх до квадрату отримаємо рівносильну нерівність, тобто
$3 \le \sqrt{x-5} \le 5 \iff 9 \le x-5 \le 25 \iff 14 \le x \le 30$.
Відповідь: $x \in [14;30]$.

Приклади (метод заміни змінних)

Знаходимо частину графіка функції $y = |x-3| + |x-5|$, яка співпадає з частиною прямої $y = 2$, і проектуємо її на вісь Ot:



Отже,
$|t-3| + |t-5| = 2 \iff$
$\iff t \in [3;5]$.

Після зворотної заміни $t = \sqrt{x-5}$ маємо
$\sqrt{x-5} \in [3;5] \iff 3 \le \sqrt{x-5} \le 5$.

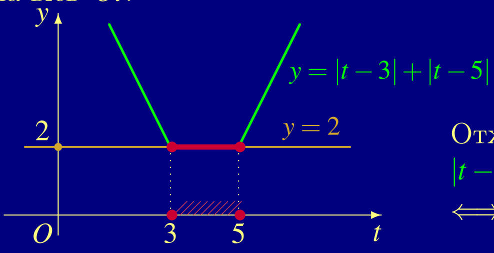
Оскільки всі частини подвійної нерівності невід'ємні, то після піднесення їх до квадрату отримаємо рівносильну нерівність, тобто

$3 \le \sqrt{x-5} \le 5 \iff 9 \le x-5 \le 25 \iff 14 \le x \le 30$.

Відповідь: $x \in [14;30]$.

Приклади (метод заміни змінних)

Знаходимо частину графіка функції $y = |x-3| + |x-5|$, яка співпадає з частиною прямої $y = 2$, і проектуємо її на вісь Ot:



Отже,

$|t-3| + |t-5| = 2 \iff$

$\iff t \in [3;5]$.

Після зворотної заміни $t = \sqrt{x-5}$ маємо

$\sqrt{x-5} \in [3;5] \iff 3 \le \sqrt{x-5} \le 5$.

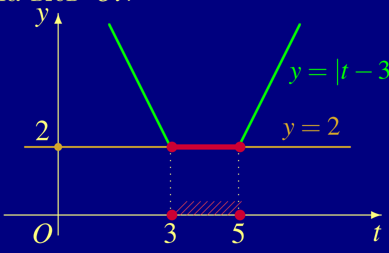
Оскільки всі частини подвійної нерівності невід'ємні, то після піднесення їх до квадрату отримаємо рівносильну нерівність, тобто

$3 \le \sqrt{x-5} \le 5 \iff 9 \le x-5 \le 25 \iff 14 \le x \le 30$.

Відповідь: $x \in [14;30]$.

Приклади (метод заміни змінних)

Знаходимо частину графіка функції $y = |x-3| + |x-5|$, яка співпадає з частиною прямої $y = 2$, і проектуємо її на вісь Ot:



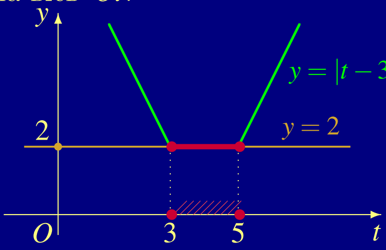
Отже,
$|t-3| + |t-5| = 2 \iff$
$\iff t \in [3;5]$.

Після зворотної заміни $t = \sqrt{x-5}$ маємо
$\sqrt{x-5} \in [3;5] \iff 3 \le \sqrt{x-5} \le 5$.
Оскільки всі частини подвійної нерівності невід'ємні, то після піднесення їх до квадрату отримаємо рівносильну нерівність, тобто
$3 \le \sqrt{x-5} \le 5 \iff 9 \le x-5 \le 25 \iff 14 \le x \le 30$.

Відповідь: $x \in [14;30]$.

Приклади (метод заміни змінних)

Знаходимо частину графіка функції $y = |x-3| + |x-5|$, яка співпадає з частиною прямої $y = 2$, і проектуємо її на вісь Ot:



Отже,
$|t-3| + |t-5| = 2 \iff$
$\iff t \in [3;5]$.

Після зворотної заміни $t = \sqrt{x-5}$ маємо
$\sqrt{x-5} \in [3;5] \iff 3 \le \sqrt{x-5} \le 5$.
Оскільки всі частини подвійної нерівності невід'ємні, то після піднесення їх до квадрату отримаємо рівносильну нерівність, тобто
$3 \le \sqrt{x-5} \le 5 \iff 9 \le x-5 \le 25 \iff 14 \le x \le 30$.
Відповідь: $x \in [14;30]$.

Приклади (метод заміни змінних)

Приклад 5. Розв'язати нерівність
$\sqrt[3]{x+12}+\sqrt[3]{14-x}\le 2$.

Розв'язання. Переносячи один з коренів в праву частину нерівності, а потім підносячи обидві частини нерівності до третього степеня, отримуємо

$$\sqrt[3]{14-x}\le 2-\sqrt[3]{x+12} \iff \left(\sqrt[3]{14-x}\right)^3\le\left(2-\sqrt[3]{x+12}\right)^3 \iff$$

$$\iff 14-x\le 2^3-3\cdot 2^2\sqrt[3]{x+12}+3\cdot 2\left(\sqrt[3]{x+12}\right)^2-(x+12) \iff$$

$$\iff 14-x\le 8-12\sqrt[3]{x+12}+6\left(\sqrt[3]{x+12}\right)^2-x-12 \iff$$

$$\iff 0\le 6\left(\sqrt[3]{x+12}\right)^2-12\sqrt[3]{x+12}-18 \iff$$

$$\iff \left(\sqrt[3]{x+12}\right)^2-2\sqrt[3]{x+12}-3\ge 0.$$

Тепер нерівність розв'язується методом заміни змінних. Покладаючи $t=\sqrt[3]{x+12}$, отримуємо квадратну нерівність $t^2-2t-3\ge 0$.

Приклади (метод заміни змінних)

Приклад 5. Розв'язати нерівність
$\sqrt[3]{x+12}+\sqrt[3]{14-x}\le 2$.

Розв'язання. Переносячи один з коренів в праву частину нерівності, а потім підносячи обидві частини нерівності до третього степеня, отримуємо

$$\sqrt[3]{14-x}\le 2-\sqrt[3]{x+12} \iff \left(\sqrt[3]{14-x}\right)^3\le\left(2-\sqrt[3]{x+12}\right)^3 \iff$$

$$\iff 14-x\le 2^3-3\cdot 2^2\sqrt[3]{x+12}+3\cdot 2\left(\sqrt[3]{x+12}\right)^2-(x+12) \iff$$

$$\iff 14-x\le 8-12\sqrt[3]{x+12}+6\left(\sqrt[3]{x+12}\right)^2-x-12 \iff$$

$$\iff 0\le 6\left(\sqrt[3]{x+12}\right)^2-12\sqrt[3]{x+12}-18 \iff$$

$$\iff \left(\sqrt[3]{x+12}\right)^2-2\sqrt[3]{x+12}-3\ge 0.$$

Тепер нерівність розв'язується методом заміни змінних. Покладаючи $t=\sqrt[3]{x+12}$, отримуємо квадратну нерівність $t^2-2t-3\ge 0$.

Приклади (метод заміни змінних)

Приклад 5. Розв'язати нерівність
$\sqrt[3]{x+12}+\sqrt[3]{14-x}\le 2\,.$

Розв'язання. Переносячи один з коренів в праву частину нерівності, а потім підносячи обидві частини нерівності до третього степеня, отримуємо

$$\sqrt[3]{14-x}\le 2-\sqrt[3]{x+12} \iff \left(\sqrt[3]{14-x}\right)^3\le\left(2-\sqrt[3]{x+12}\right)^3 \iff$$

$$\iff 14-x\le 2^3-3\cdot 2^2\sqrt[3]{x+12}+3\cdot 2\left(\sqrt[3]{x+12}\right)^2-(x+12) \iff$$

$$\iff 14-x\le 8-12\sqrt[3]{x+12}+6\left(\sqrt[3]{x+12}\right)^2-x-12 \iff$$

$$\iff 0\le 6\left(\sqrt[3]{x+12}\right)^2-12\sqrt[3]{x+12}-18 \iff$$

$$\iff \left(\sqrt[3]{x+12}\right)^2-2\sqrt[3]{x+12}-3\ge 0\,.$$

Тепер нерівність розв'язується методом заміни змінних. Покладаючи $t=\sqrt[3]{x+12}$, отримуємо квадратну нерівність $t^2-2t-3\ge 0\,.$

Приклади (метод заміни змінних)

П р и к л а д 5. Розв'язати нерівність
$\sqrt[3]{x+12}+\sqrt[3]{14-x}\leq 2$.

Р о з в' я з а н н я. Переносячи один з коренів в праву частину нерівності, а потім підносячи обидві частини нерівності до третього степеня, отримуємо

$$\sqrt[3]{14-x}\leq 2-\sqrt[3]{x+12} \iff \left(\sqrt[3]{14-x}\right)^3\leq\left(2-\sqrt[3]{x+12}\right)^3 \iff$$

$$\iff 14-x\leq 2^3-3\cdot 2^2\sqrt[3]{x+12}+3\cdot 2\left(\sqrt[3]{x+12}\right)^2-(x+12) \iff$$

$$\iff 14-x\leq 8-12\sqrt[3]{x+12}+6\left(\sqrt[3]{x+12}\right)^2-x-12 \iff$$

$$\iff 0\leq 6\left(\sqrt[3]{x+12}\right)^2-12\sqrt[3]{x+12}-18 \iff$$

$$\iff \left(\sqrt[3]{x+12}\right)^2-2\sqrt[3]{x+12}-3\geq 0.$$

Тепер нерівність розв'язується методом заміни змінних. Покладаючи $t=\sqrt[3]{x+12}$, отримуємо квадратну нерівність $t^2-2t-3\geq 0$.

Приклади (метод заміни змінних)

П р и к л а д 5. Розв'язати нерівність
$\sqrt[3]{x+12}+\sqrt[3]{14-x}\le 2$.

Р о з в' я з а н н я. Переносячи один з коренів в праву частину нерівності, а потім підносячи обидві частини нерівності до третього степеня, отримуємо

$$\sqrt[3]{14-x}\le 2-\sqrt[3]{x+12} \iff \left(\sqrt[3]{14-x}\right)^3 \le \left(2-\sqrt[3]{x+12}\right)^3 \iff$$

$$\iff 14-x\le 2^3-3\cdot 2^2\sqrt[3]{x+12}+3\cdot 2\left(\sqrt[3]{x+12}\right)^2-(x+12) \iff$$

$$\iff 14-x\le 8-12\sqrt[3]{x+12}+6\left(\sqrt[3]{x+12}\right)^2-x-12 \iff$$

$$\iff 0\le 6\left(\sqrt[3]{x+12}\right)^2-12\sqrt[3]{x+12}-18 \iff$$

$$\iff \left(\sqrt[3]{x+12}\right)^2-2\sqrt[3]{x+12}-3\ge 0.$$

Тепер нерівність розв'язується методом заміни змінних. Покладаючи $t=\sqrt[3]{x+12}$, отримуємо квадратну нерівність $t^2-2t-3\ge 0$.

Приклади (метод заміни змінних)

Приклад 5. Розв'язати нерівність
$\sqrt[3]{x+12}+\sqrt[3]{14-x}\le 2\,.$

Розв'язання. Переносячи один з коренів в праву частину нерівності, а потім підносячи обидві частини нерівності до третього степеня, отримуємо

$$\sqrt[3]{14-x}\le 2-\sqrt[3]{x+12} \iff \left(\sqrt[3]{14-x}\right)^3\le\left(2-\sqrt[3]{x+12}\right)^3 \iff$$

$$\iff 14-x\le 2^3-3\cdot 2^2\sqrt[3]{x+12}+3\cdot 2\left(\sqrt[3]{x+12}\right)^2-(x+12) \iff$$

$$\iff 14-x\le 8-12\sqrt[3]{x+12}+6\left(\sqrt[3]{x+12}\right)^2-x-12 \iff$$

$$\iff 0\le 6\left(\sqrt[3]{x+12}\right)^2-12\sqrt[3]{x+12}-18 \iff$$

$$\iff \left(\sqrt[3]{x+12}\right)^2-2\sqrt[3]{x+12}-3\ge 0\,.$$

Тепер нерівність розв'язується методом заміни змінних. Покладаючи $t=\sqrt[3]{x+12}$, отримуємо квадратну нерівність $t^2-2t-3\ge 0\,.$

Приклади (метод заміни змінних)

Приклад 5. Розв'язати нерівність
$\sqrt[3]{x+12}+\sqrt[3]{14-x}\le 2$.

Розв'язання. Переносячи один з коренів в праву частину нерівності, а потім підносячи обидві частини нерівності до третього степеня, отримуємо

$$\sqrt[3]{14-x}\le 2-\sqrt[3]{x+12} \iff \left(\sqrt[3]{14-x}\right)^3 \le \left(2-\sqrt[3]{x+12}\right)^3 \iff$$

$$\iff 14-x\le 2^3-3\cdot 2^2\sqrt[3]{x+12}+3\cdot 2\left(\sqrt[3]{x+12}\right)^2-(x+12) \iff$$

$$\iff 14-x\le 8-12\sqrt[3]{x+12}+6\left(\sqrt[3]{x+12}\right)^2-x-12 \iff$$

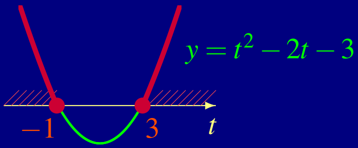
$$\iff 0\le 6\left(\sqrt[3]{x+12}\right)^2-12\sqrt[3]{x+12}-18 \iff$$

$$\iff \left(\sqrt[3]{x+12}\right)^2-2\sqrt[3]{x+12}-3\ge 0.$$

Тепер нерівність розв'язується методом заміни змінних. Покладаючи $t=\sqrt[3]{x+12}$, отримуємо квадратну нерівність $t^2-2t-3\ge 0$.

Приклади (метод заміни змінних)

Розв'язуючи квадратну нерівність $t^2-2t-3\geq 0$ графічним методом, відмічаємо частини параболи



$y=t^2-2t-3$, які лежать вище осі Ot (включаючи точки $t=-1$ і $t=3$) і проектуємо їх на вісь Ot: $t\in(-\infty,-1]\cup[3,\infty)$.

Далі, після зворотної заміни $t=\sqrt[3]{x+12}$ необхідно розв'язати умову

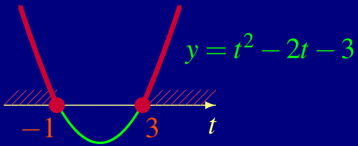
$$\sqrt[3]{x+12}\in(-\infty,-1]\cup[3,\infty)\iff\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x+12}\in(-\infty,-1],\\ \sqrt[3]{x+12}\in[3,\infty),\end{array}\right.\iff$$

$$\iff\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x+12}\leq -1,\\ \sqrt[3]{x+12}\geq 3,\end{array}\right.\iff\left[\begin{array}{l}x+12\leq -1,\\ x+12\geq 27,\end{array}\right.\iff\left[\begin{array}{l}x\leq -13,\\ x\geq 15.\end{array}\right.$$

Відповідь: $x\in(-\infty,-13]\cup[15,\infty)$.

Приклади (метод заміни змінних)

Розв'язуючи квадратну нерівність $t^2 - 2t - 3 \geq 0$ графічним методом, відмічаємо частини параболи



$y = t^2 - 2t - 3$, які лежать вище осі Ot (включаючи точки $t = -1$ і $t = 3$) і проектуємо їх на вісь Ot: $t \in (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$.

Далі, після зворотної заміни $t = \sqrt[3]{x+12}$ необхідно розв'язати умову

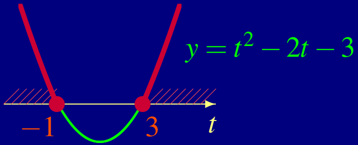
$$\sqrt[3]{x+12} \in (-\infty, -1] \cup [3, \infty) \iff \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x+12} \in (-\infty, -1], \\ \sqrt[3]{x+12} \in [3, \infty), \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x+12} \leq -1, \\ \sqrt[3]{x+12} \geq 3, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x+12 \leq -1, \\ x+12 \geq 27, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \leq -13, \\ x \geq 15. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x \in (-\infty, -13] \cup [15, \infty)$.

Приклади (метод заміни змінних)

Розв'язуючи квадратну нерівність $t^2-2t-3\geq 0$ графічним методом, відмічаємо частини параболи



$y=t^2-2t-3$, які лежать вище осі Ot (включаючи точки $t=-1$ і $t=3$) і проектуємо їх на вісь Ot: $t\in(-\infty,-1]\cup[3,\infty)$.

Далі, після зворотної заміни $t=\sqrt[3]{x+12}$ необхідно розв'язати умову

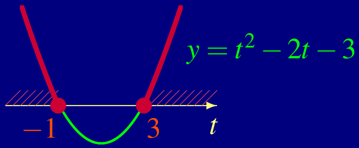
$$\sqrt[3]{x+12}\in(-\infty,-1]\cup[3,\infty)\iff\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x+12}\in(-\infty,-1],\\ \sqrt[3]{x+12}\in[3,\infty),\end{array}\right.\iff$$

$$\iff\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x+12}\leq -1,\\ \sqrt[3]{x+12}\geq 3,\end{array}\right.\iff\left[\begin{array}{l}x+12\leq -1,\\ x+12\geq 27,\end{array}\right.\iff\left[\begin{array}{l}x\leq -13,\\ x\geq 15.\end{array}\right.$$

Відповідь: $x\in(-\infty,-13]\cup[15,\infty)$.

Приклади (метод заміни змінних)

Розв'язуючи квадратну нерівність $t^2 - 2t - 3 \geq 0$ графічним методом, відмічаємо частини параболи



$y = t^2 - 2t - 3$, які лежать вище осі Ot (включаючи точки $t = -1$ і $t = 3$) і проектуємо їх на вісь Ot: $t \in (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$.

Далі, після зворотної заміни $t = \sqrt[3]{x+12}$ необхідно розв'язати умову

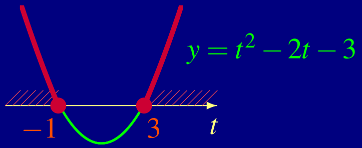
$$\sqrt[3]{x+12} \in (-\infty, -1] \cup [3, \infty) \iff \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x+12} \in (-\infty, -1], \\ \sqrt[3]{x+12} \in [3, \infty), \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x+12} \leq -1, \\ \sqrt[3]{x+12} \geq 3, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x+12 \leq -1, \\ x+12 \geq 27, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \leq -13, \\ x \geq 15. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x \in (-\infty, -13] \cup [15, \infty)$.

Приклади (метод заміни змінних)

Розв'язуючи квадратну нерівність $t^2-2t-3\geq 0$ графічним методом, відмічаємо частини параболи



$y=t^2-2t-3$, які лежать вище осі Ot (включаючи точки $t=-1$ і $t=3$) і проектуємо їх на вісь Ot: $t\in(-\infty,-1]\cup[3,\infty)$.

Далі, після зворотної заміни $t=\sqrt[3]{x+12}$ необхідно розв'язати умову

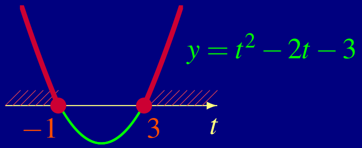
$$\sqrt[3]{x+12}\in(-\infty,-1]\cup[3,\infty)\iff\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x+12}\in(-\infty,-1],\\ \sqrt[3]{x+12}\in[3,\infty),\end{array}\right.\iff$$

$$\iff\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x+12}\leq -1,\\ \sqrt[3]{x+12}\geq 3,\end{array}\right.\iff\left[\begin{array}{l}x+12\leq -1,\\ x+12\geq 27,\end{array}\right.\iff\left[\begin{array}{l}x\leq -13,\\ x\geq 15.\end{array}\right.$$

Відповідь: $x\in(-\infty,-13]\cup[15,\infty)$.

Приклади (метод заміни змінних)

Розв'язуючи квадратну нерівність $t^2 - 2t - 3 \geq 0$ графічним методом, відмічаємо частини параболи



$y = t^2 - 2t - 3$, які лежать вище осі Ot (включаючи точки $t = -1$ і $t = 3$) і проектуємо їх на вісь Ot: $t \in (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$.

Далі, після зворотної заміни $t = \sqrt[3]{x+12}$ необхідно розв'язати умову

$$\sqrt[3]{x+12} \in (-\infty, -1] \cup [3, \infty) \iff \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x+12} \in (-\infty, -1], \\ \sqrt[3]{x+12} \in [3, \infty), \end{array} \right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x+12} \leq -1, \\ \sqrt[3]{x+12} \geq 3, \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} x+12 \leq -1, \\ x+12 \geq 27, \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} x \leq -13, \\ x \geq 15. \end{array} \right.$$

Відповідь: $x \in (-\infty, -13] \cup [15, \infty)$.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.). Розв'яжіть рівняння $x-5+\sqrt{2x^2-14x+13}=0$.

Розв'язання. Переписуючи рівняння у вигляді
$\sqrt{2x^2-14x+13}=5-x$
і перетворюючи його у відповідності з теоремою

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x)\ge 0, \\ f(x)=(g(x))^2, \end{cases}$$

отримуємо

$$\sqrt{2x^2-14x+13}=5-x \Longleftrightarrow \begin{cases} 5-x\ge 0, \\ 2x^2-14x+13=(5-x)^2. \end{cases}$$

Розв'язуємо квадратне рівняння системи:

$$2x^2-14x+13=(5-x)^2 \Longleftrightarrow 2x^2-14x+13=25-10x+x^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x^2-4x-12=0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=6. \end{array}\right.$$

Корінь $x=6$ не задовольняє нерівність $5-x\ge 0$ і тому не є розв'язком заданого рівняння.

Відповідь: -2.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.).
Розв'яжіть рівняння $x-5+\sqrt{2x^2-14x+13}=0$.

Розв'язання. Переписуючи рівняння у вигляді
$\sqrt{2x^2-14x+13}=5-x$
і перетворюючи його у відповідності з теоремою

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x)\geq 0, \\ f(x)=(g(x))^2, \end{cases}$$

отримуємо

$$\sqrt{2x^2-14x+13}=5-x \Longleftrightarrow \begin{cases} 5-x\geq 0, \\ 2x^2-14x+13=(5-x)^2. \end{cases}$$

Розв'язуємо квадратне рівняння системи:
$2x^2-14x+13=(5-x)^2 \Longleftrightarrow 2x^2-14x+13=25-10x+x^2 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow x^2-4x-12=0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=6. \end{array}\right.$$

Корінь $x=6$ не задовольняє нерівність $5-x\geq 0$ і тому не є розв'язком заданого рівняння.

Відповідь: -2.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.). Розв'яжіть рівняння $x-5+\sqrt{2x^2-14x+13}=0$.

Розв'язання. Переписуючи рівняння у вигляді

$$\sqrt{2x^2-14x+13}=5-x$$

і перетворюючи його у відповідності з теоремою

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \iff \begin{cases} g(x)\geq 0, \\ f(x)=(g(x))^2, \end{cases}$$

отримуємо

$$\sqrt{2x^2-14x+13}=5-x \iff \begin{cases} 5-x\geq 0, \\ 2x^2-14x+13=(5-x)^2. \end{cases}$$

Розв'язуємо квадратне рівняння системи:

$$2x^2-14x+13=(5-x)^2 \iff 2x^2-14x+13=25-10x+x^2 \iff$$

$$\iff x^2-4x-12=0 \iff \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=6. \end{array} \right.$$

Корінь $x=6$ не задовольняє нерівність $5-x\geq 0$ і тому не є розв'язком заданого рівняння.

Відповідь: -2.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.). Розв'яжіть рівняння $x-5+\sqrt{2x^2-14x+13}=0$.

Розв'язання. Переписуючи рівняння у вигляді
$\sqrt{2x^2-14x+13}=5-x$
і перетворюючи його у відповідності з теоремою

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x)\geq 0, \\ f(x)=(g(x))^2, \end{cases}$$

отримуємо

$$\sqrt{2x^2-14x+13}=5-x \Longleftrightarrow \begin{cases} 5-x\geq 0, \\ 2x^2-14x+13=(5-x)^2. \end{cases}$$

Розв'язуємо квадратне рівняння системи:

$$2x^2-14x+13=(5-x)^2 \Longleftrightarrow 2x^2-14x+13=25-10x+x^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x^2-4x-12=0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=6. \end{array} \right.$$

Корінь $x=6$ не задовольняє нерівність $5-x\geq 0$ і тому не є розв'язком заданого рівняння.

Відповідь: -2.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.).
Розв'яжіть рівняння $x-5+\sqrt{2x^2-14x+13}=0$.

Розв'язання. Переписуючи рівняння у вигляді
$\sqrt{2x^2-14x+13}=5-x$
і перетворюючи його у відповідності з теоремою

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x)\geq 0, \\ f(x)=(g(x))^2, \end{cases}$$

отримуємо

$$\sqrt{2x^2-14x+13}=5-x \Longleftrightarrow \begin{cases} 5-x\geq 0, \\ 2x^2-14x+13=(5-x)^2. \end{cases}$$

Розв'язуємо квадратне рівняння системи:
$2x^2-14x+13=(5-x)^2 \Longleftrightarrow 2x^2-14x+13=25-10x+x^2 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow x^2-4x-12=0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=6. \end{array}\right.$$

Корінь $x=6$ не задовольняє нерівність $5-x\geq 0$ і тому не є розв'язком заданого рівняння.

Відповідь: -2.

Приклади із ЗНО

Приклад 7 (Пробне тестування ЗНО, 2012 р.). Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-2}\sqrt{2x+1}=\sqrt{3}$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має більше одного кореня, то у відповіді зазначте добуток усіх коренів. Якщо рівняння не має коренів, то у відповіді запишіть число 100.

Розв'язання. ОДЗ рівняння визначається умовами:

$$\begin{cases} x-2\geq 0, \\ 2x+1\geq 0. \end{cases}$$

Оскільки обидві частини рівняння невід'ємні на ОДЗ, то на ОДЗ їх можна піднести до квадрату:

$$\left(\sqrt{x-2}\sqrt{2x+1}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2 \iff (x-2)(2x+1)=3 \iff$$

$$\iff 2x^2+x-4x-2-3=0 \iff 2x^2-3x-5=0.$$

Приклади із ЗНО

Приклад 7 (Пробне тестування ЗНО, 2012 р.). Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-2}\sqrt{2x+1}=\sqrt{3}$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має більше одного кореня, то у відповіді зазначте добуток усіх коренів. Якщо рівняння не має коренів, то у відповіді запишіть число 100.

Розв'язання. ОДЗ рівняння визначається умовами:

$$\begin{cases} x-2\geq 0, \\ 2x+1\geq 0. \end{cases}$$

Оскільки обидві частини рівняння невід'ємні на ОДЗ, то на ОДЗ їх можна піднести до квадрату:

$$\left(\sqrt{x-2}\sqrt{2x+1}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2 \iff (x-2)(2x+1)=3 \iff$$

$$\iff 2x^2+x-4x-2-3=0 \iff 2x^2-3x-5=0.$$

Приклади із ЗНО

Приклад 7 (Пробне тестування ЗНО, 2012 р.). Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-2}\sqrt{2x+1}=\sqrt{3}$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має більше одного кореня, то у відповіді зазначте добуток усіх коренів. Якщо рівняння не має коренів, то у відповіді запишіть число 100.

Розв'язання. ОДЗ рівняння визначається умовами:

$$\begin{cases} x-2\geq 0, \\ 2x+1\geq 0. \end{cases}$$

Оскільки обидві частини рівняння невід'ємні на ОДЗ, то на ОДЗ їх можна піднести до квадрату:

$$\left(\sqrt{x-2}\sqrt{2x+1}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2 \iff (x-2)(2x+1)=3 \iff$$
$$\iff 2x^2+x-4x-2-3=0 \iff 2x^2-3x-5=0.$$

Приклади із ЗНО

Розв'язуючи квадратне рівняння $2x^2-3x-5=0$, знаходимо дискримінант
$D=(-3)^2-4\cdot2\cdot(-5)=9+40=49$
і корені рівняння: $x=\dfrac{3\pm7}{2\cdot2}$, тобто

$$x_1=\frac{3-7}{4}=-1\,,\quad x_2=\frac{3+7}{2\cdot2}=\frac{10}{2\cdot2}=\frac{5}{2}=2{,}5\,.$$

Перевіримо, чи задовольняють знайдені корені $x=-1$, $x=2{,}5$ нерівності:

$$\text{ОДЗ:}\quad \begin{cases} x-2\geq0,\\ 2x+1\geq0.\end{cases}$$

Корінь $x=-1$ не належить ОДЗ, оскільки не задовольняє нерівність $x-2\geq0$. Корінь $x=2{,}5$ задовольняє обом нерівностям системи і, отже, є розв'язком заданого рівняння.

Відповідь: $2{,}5$.

Приклади із ЗНО

Розв'язуючи квадратне рівняння $2x^2-3x-5=0$, знаходимо дискримінант
$D=(-3)^2-4\cdot2\cdot(-5)=9+40=49$
і корені рівняння: $\quad x=\dfrac{3\pm7}{2\cdot2}$, тобто

$$x_1=\frac{3-7}{4}=-1\,,\quad x_2=\frac{3+7}{2\cdot2}=\frac{10}{2\cdot2}=\frac{5}{2}=2,5\,.$$

Перевіримо, чи задовольняють знайдені корені $x=-1$, $x=2,5$ нерівності:

$$\text{ОДЗ:}\quad \begin{cases} x-2\ge0,\\ 2x+1\ge0.\end{cases}$$

Корінь $x=-1$ не належить ОДЗ, оскільки не задовольняє нерівність $x-2\ge0$. Корінь $x=2,5$ задовольняє обом нерівностям системи і, отже, є розв'язком заданого рівняння.

Відповідь: 2,5.

Приклади із ЗНО

Розв'язуючи квадратне рівняння $2x^2 - 3x - 5 = 0$, знаходимо дискримінант

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 + 40 = 49$

і корені рівняння: $x = \dfrac{3 \pm 7}{2 \cdot 2}$, тобто

$$x_1 = \frac{3-7}{4} = -1\,, \quad x_2 = \frac{3+7}{2\cdot 2} = \frac{10}{2\cdot 2} = \frac{5}{2} = 2,5\,.$$

Перевіримо, чи задовольняють знайдені корені $x = -1$, $x = 2,5$ нерівності:

$$\text{ОДЗ:} \quad \begin{cases} x - 2 \geq 0, \\ 2x + 1 \geq 0. \end{cases}$$

Корінь $x = -1$ не належить ОДЗ, оскільки не задовольняє нерівність $x - 2 \geq 0$. Корінь $x = 2,5$ задовольняє обом нерівностям системи і, отже, є розв'язком заданого рівняння.

Відповідь: $2,5$.

Приклади із ЗНО

П р и к л а д 8 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2009 р.). Розв'яжіть нерівність $2\sqrt{x^2-6x+9}-\sqrt{(x-1)^2+4x}\le x$.

Р о з в' я з а н н я. Помітимо, що підкорінні вирази є повними квадратами. Дійсно,

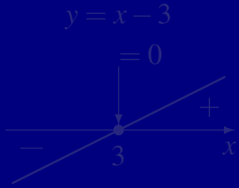
$x^2-6x+9=(x-3)^2$,

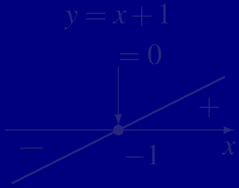
$(x-1)^2+4x=x^2-2x+1+4x=x^2+2x+1=(x+1)^2$.

Тому $2\sqrt{x^2-6x+9}-\sqrt{(x-1)^2+4x}\le x \iff$

$\iff 2\sqrt{(x-3)^2}-\sqrt{(x+1)^2}\le x \iff 2|x-3|-|x+1|\le x$.

Розв'яжемо отриману нерівність методом інтервалів. Зобразимо криві знаків підмодульних виразів:





Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2009 р.).
Розв'яжіть нерівність $2\sqrt{x^2-6x+9}-\sqrt{(x-1)^2+4x}\le x$.

Розв'язання. Помітимо, що підкорінні вирази є повними квадратами. Дійсно,

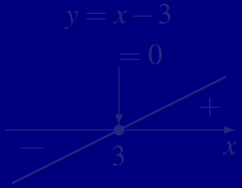
$x^2-6x+9=(x-3)^2$,

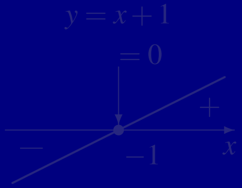
$(x-1)^2+4x=x^2-2x+1+4x=x^2+2x+1=(x+1)^2$.

Тому $2\sqrt{x^2-6x+9}-\sqrt{(x-1)^2+4x}\le x \iff$

$\iff 2\sqrt{(x-3)^2}-\sqrt{(x+1)^2}\le x \iff 2|x-3|-|x+1|\le x$.

Розв'яжемо отриману нерівність методом інтервалів.
Зобразимо криві знаків підмодульних виразів:





Приклади із ЗНО

П р и к л а д 8 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2009 р.).
Розв'яжіть нерівність $2\sqrt{x^2-6x+9}-\sqrt{(x-1)^2+4x}\le x$.

Р о з в' я з а н н я. Помітимо, що підкорінні вирази є повними квадратами. Дійсно,

$x^2-6x+9=(x-3)^2$,

$(x-1)^2+4x=x^2-2x+1+4x=x^2+2x+1=(x+1)^2$.

Тому $2\sqrt{x^2-6x+9}-\sqrt{(x-1)^2+4x}\le x \iff$

$\iff 2\sqrt{(x-3)^2}-\sqrt{(x+1)^2}\le x \iff 2|x-3|-|x+1|\le x$.

Розв'яжемо отриману нерівність методом інтервалів.
Зобразимо криві знаків підмодульних виразів:

Приклади із ЗНО

П р и к л а д 8 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2009 р.). Розв'яжіть нерівність $2\sqrt{x^2-6x+9}-\sqrt{(x-1)^2+4x}\le x$.

Р о з в' я з а н н я. Помітимо, що підкорінні вирази є повними квадратами. Дійсно,

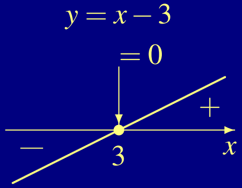
$x^2-6x+9=(x-3)^2$,

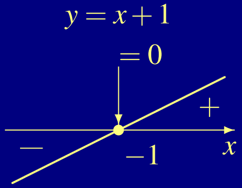
$(x-1)^2+4x=x^2-2x+1+4x=x^2+2x+1=(x+1)^2$.

Тому $2\sqrt{x^2-6x+9}-\sqrt{(x-1)^2+4x}\le x \iff$

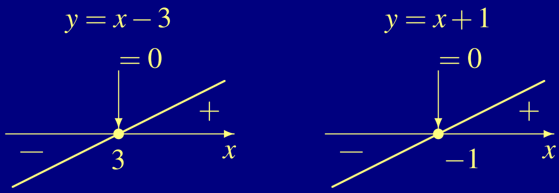
$\iff 2\sqrt{(x-3)^2}-\sqrt{(x+1)^2}\le x \iff 2|x-3|-|x+1|\le x$.

Розв'яжемо отриману нерівність методом інтервалів. Зобразимо криві знаків підмодульних виразів:





Приклади із ЗНО



Маємо три різні комбінації знаків цих виразів:

	$x < -1$	$-1 < x < 3$	$x > 3$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$

Приклади із ЗНО

	-1		3	x
$x-3$	$-$	$-$	$+$	
$x+1$	$-$	$+$	$+$	

Отже,

$$2\,|x-3|-|x+1|\le x \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(-\infty,-1), \\ -2(x-3)+(x+1)\le x, \end{cases} \\ \begin{cases} x\in[-1;3), \\ -2(x-3)-(x+1)\le x, \end{cases} \\ \begin{cases} x\in[3,\infty), \\ 2(x-3)-(x+1)\le x. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'яжемо кожну з нерівностей, які входять до систем:

1) $-2(x-3)+(x+1)\le x \iff -2x+6+x+1-x\le 0 \iff$

$\iff -2x\le -7 \iff x\ge 7/2 \iff x\in[7/2,\infty)$;

2) $-2(x-3)-(x+1)\le x \iff -2x+6-x-1-x\le 0 \iff$

$\iff -4x\le -5 \iff x\ge 5/4 \iff x\in[5/4,\infty)$;

3) $2(x-3)-(x+1)\le x \iff 2x-6-x-1-x\le 0 \iff$

$\iff -7\le 0 \quad$ (істина) $\iff x\in\mathbf{R}$.

Приклади із ЗНО

	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,\infty)$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$

Отже,

$$2|x-3|-|x+1|\le x \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(-\infty,-1), \\ -2(x-3)+(x+1)\le x, \end{cases} \\ \begin{cases} x\in[-1;3), \\ -2(x-3)-(x+1)\le x, \end{cases} \\ \begin{cases} x\in[3,\infty), \\ 2(x-3)-(x+1)\le x. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'яжемо кожну з нерівностей, які входять до систем:

1) $-2(x-3)+(x+1)\le x \iff -2x+6+x+1-x\le 0 \iff$
$\iff -2x\le -7 \iff x\ge 7/2 \iff x\in[7/2,\infty)$;

2) $-2(x-3)-(x+1)\le x \iff -2x+6-x-1-x\le 0 \iff$
$\iff -4x\le -5 \iff x\ge 5/4 \iff x\in[5/4,\infty)$;

3) $2(x-3)-(x+1)\le x \iff 2x-6-x-1-x\le 0 \iff$
$\iff -7\le 0$ (істина) $\iff x\in\mathbf{R}$.

Приклади із ЗНО

	-1		3	x
$x-3$	$-$	$-$	$+$	
$x+1$	$-$	$+$	$+$	

Отже,

$$2\,|x-3|-|x+1|\le x \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(-\infty,-1), \\ -2(x-3)+(x+1)\le x, \end{cases} \\ \begin{cases} x\in[-1;3), \\ -2(x-3)-(x+1)\le x, \end{cases} \\ \begin{cases} x\in[3,\infty), \\ 2(x-3)-(x+1)\le x. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'яжемо кожну з нерівностей, які входять до систем:

1) $-2(x-3)+(x+1)\le x \Longleftrightarrow -2x+6+x+1-x\le 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow -2x\le -7 \Longleftrightarrow x\ge 7/2 \Longleftrightarrow x\in[7/2,\infty)$;

2) $-2(x-3)-(x+1)\le x \Longleftrightarrow -2x+6-x-1-x\le 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow -4x\le -5 \Longleftrightarrow x\ge 5/4 \Longleftrightarrow x\in[5/4,\infty)$;

3) $2(x-3)-(x+1)\le x \Longleftrightarrow 2x-6-x-1-x\le 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow -7\le 0 \quad$ (істина) $\Longleftrightarrow x\in\mathbf{R}$.

Приклади із ЗНО

$-1 \qquad 3 \qquad x$

$x-3$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$

Отже,

$$2\,|x-3|-|x+1|\le x \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(-\infty,-1), \\ -2(x-3)+(x+1)\le x, \end{cases} \\ \begin{cases} x\in[-1;3), \\ -2(x-3)-(x+1)\le x, \end{cases} \\ \begin{cases} x\in[3,\infty), \\ 2(x-3)-(x+1)\le x. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'яжемо кожну з нерівностей, які входять до систем:

1) $-2(x-3)+(x+1)\le x \iff -2x+6+x+1-x\le 0 \iff$
$\iff -2x\le -7 \iff x\ge 7/2 \iff x\in[7/2,\infty)$;

2) $-2(x-3)-(x+1)\le x \iff -2x+6-x-1-x\le 0 \iff$
$\iff -4x\le -5 \iff x\ge 5/4 \iff x\in[5/4,\infty)$;

3) $2(x-3)-(x+1)\le x \iff 2x-6-x-1-x\le 0 \iff$
$\iff -7\le 0 \quad (\text{істина}) \iff x\in\mathbf{R}$.

Приклади із ЗНО

$x-3$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$

Отже,

$$2|x-3|-|x+1|\le x \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(-\infty,-1), \\ -2(x-3)+(x+1)\le x, \end{cases} \\ \begin{cases} x\in[-1;3), \\ -2(x-3)-(x+1)\le x, \end{cases} \\ \begin{cases} x\in[3,\infty), \\ 2(x-3)-(x+1)\le x. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'яжемо кожну з нерівностей, які входять до систем:

1) $-2(x-3)+(x+1)\le x \Longleftrightarrow -2x+6+x+1-x\le 0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow -2x\le -7 \Longleftrightarrow x\ge 7/2 \Longleftrightarrow x\in[7/2,\infty)$;

2) $-2(x-3)-(x+1)\le x \Longleftrightarrow -2x+6-x-1-x\le 0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow -4x\le -5 \Longleftrightarrow x\ge 5/4 \Longleftrightarrow x\in[5/4,\infty)$;

3) $2(x-3)-(x+1)\le x \Longleftrightarrow 2x-6-x-1-x\le 0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow -7\le 0$ (істина) $\Longleftrightarrow x\in\mathbf{R}$.

Приклади із ЗНО

Після розв'язання нерівностей сукупність набуває вигляду:

$$\left[\begin{array}{ll}\begin{cases} x \in (-\infty, -1), & \mathbf{I} \\ x \in [7/2, \infty), & \mathbf{II} \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [-1; 3), & \mathbf{III} \\ x \in [5/4, \infty), & \mathbf{IV} \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [3, \infty), & \mathbf{V} \\ x \in \mathbf{R}. & \mathbf{VI} \end{cases}\end{array}\right.$$

Розв'язуємо системи:

$\mathrm{I} \cap \mathrm{II} = \varnothing$

$\mathrm{III} \cap \mathrm{IV} = [5/4, 3)$

Розв'язками третьої системи є всі $x \in [3, \infty)$, оскільки всі точки множини V є спільними точками множин V і VI.

Після розв'язання систем маємо сукупність

$$\left[\begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ x \in [5/4; 3), \\ x \in [3, \infty), \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \in [5/4; 3), \\ x \in [3, \infty). \end{array}\right.$$

Приклади із ЗНО

Після розв'язання нерівностей сукупність набуває вигляду:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty, -1), & \text{I} \\ x \in [7/2, \infty), & \text{II} \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [-1;3), & \text{III} \\ x \in [5/4, \infty), & \text{IV} \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [3, \infty), & \text{V} \\ x \in \mathbf{R}. & \text{VI} \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язуємо системи:

$\text{I} \cap \text{II} = \varnothing$

$\text{III} \cap \text{IV} = [5/4, 3)$

Розв'язками третьої системи є всі $x \in [3, \infty)$, оскільки всі точки множини V є спільними точками множин V і VI.

Після розв'язання систем маємо сукупність

$$\left[\begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ x \in [5/4;3), \\ x \in [3, \infty), \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \in [5/4;3), \\ x \in [3, \infty). \end{array}\right.$$

Приклади із ЗНО

Після розв'язання нерівностей сукупність набуває вигляду:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(-\infty,-1), & \mathbf{I} \\ x\in[7/2,\infty), & \mathbf{II} \end{cases} \\ \begin{cases} x\in[-1;3), & \mathbf{III} \\ x\in[5/4,\infty), & \mathbf{IV} \end{cases} \\ \begin{cases} x\in[3,\infty), & \mathbf{V} \\ x\in\mathbf{R}. & \mathbf{VI} \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язуємо системи:

$\mathrm{I}\cap\mathrm{II}=\varnothing$

$\mathrm{III}\cap\mathrm{IV}=[5/4,3)$

Розв'язками третьої системи є всі $x\in[3,\infty)$, оскільки всі точки множини V є спільними точками множин V і VI.

Після розв'язання систем маємо сукупність

$$\left[\begin{array}{l} x\in\varnothing, \\ x\in[5/4;3), \\ x\in[3,\infty), \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x\in[5/4;3), \\ x\in[3,\infty). \end{array}\right.$$

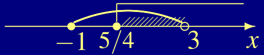
Приклади із ЗНО

Після розв'язання нерівностей сукупність набуває вигляду:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x \in (-\infty, -1), & \mathbf{I} \\ x \in [7/2, \infty), & \mathbf{II} \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [-1; 3), & \mathbf{III} \\ x \in [5/4, \infty), & \mathbf{IV} \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [3, \infty), & \mathbf{V} \\ x \in \mathbf{R}. & \mathbf{VI} \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язуємо системи:

$\mathrm{I} \cap \mathrm{II} = \varnothing$



$\mathrm{III} \cap \mathrm{IV} = [5/4, 3)$

Розв'язками третьої системи є всі $x \in [3, \infty)$, оскільки всі точки множини V є спільними точками множин V і VI.

Після розв'язання систем маємо сукупність

$$\left[\begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ x \in [5/4; 3), \\ x \in [3, \infty), \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \in [5/4; 3), \\ x \in [3, \infty). \end{array}\right.$$

Приклади із ЗНО

Після розв'язання нерівностей сукупність набуває вигляду:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty, -1), & \mathbf{I} \\ x \in [7/2, \infty), & \mathbf{II} \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [-1; 3), & \mathbf{III} \\ x \in [5/4, \infty), & \mathbf{IV} \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [3, \infty), & \mathbf{V} \\ x \in \mathbf{R}. & \mathbf{VI} \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язуємо системи:

$\mathrm{I} \cap \mathrm{II} = \varnothing$

$\mathrm{III} \cap \mathrm{IV} = [5/4, 3)$

Розв'язками третьої системи є всі $x \in [3, \infty)$, оскільки всі точки множини **V** є спільними точками множин **V** і **VI**.

Після розв'язання систем маємо сукупність

$$\left[\begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ x \in [5/4; 3), \\ x \in [3, \infty), \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \in [5/4; 3), \\ x \in [3, \infty). \end{array}\right.$$

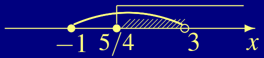
Приклади із ЗНО

Після розв'язання нерівностей сукупність набуває вигляду:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{ll} x \in (-\infty, -1), & \mathbf{I} \\ x \in [7/2, \infty), & \mathbf{II} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{ll} x \in [-1; 3), & \mathbf{III} \\ x \in [5/4, \infty), & \mathbf{IV} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{ll} x \in [3, \infty), & \mathbf{V} \\ x \in \mathbf{R}. & \mathbf{VI} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Розв'язуємо системи:

$\mathbf{I} \cap \mathbf{II} = \varnothing$



$\mathbf{III} \cap \mathbf{IV} = [5/4, 3)$

Розв'язками третьої системи є всі $x \in [3, \infty)$, оскільки всі точки множини **V** є спільними точками множин **V** і **VI**.

Після розв'язання систем маємо сукупність

$$\left[\begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ x \in [5/4; 3), \\ x \in [3, \infty), \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \in [5/4; 3), \\ x \in [3, \infty). \end{array}\right.$$

Приклади із ЗНО

Після розв'язання нерівностей сукупність набуває вигляду:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(-\infty,-1), & \mathbf{I} \\ x\in[7/2,\infty), & \mathbf{II} \end{cases} \\ \begin{cases} x\in[-1;3), & \mathbf{III} \\ x\in[5/4,\infty), & \mathbf{IV} \end{cases} \\ \begin{cases} x\in[3,\infty), & \mathbf{V} \\ x\in\mathbf{R}. & \mathbf{VI} \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язуємо системи:

$\mathbf{I}\cap\mathbf{II}=\varnothing$

$\mathbf{III}\cap\mathbf{IV}=[5/4,3)$

Розв'язками третьої системи є всі $x\in[3,\infty)$, оскільки всі точки множини **V** є спільними точками множин **V** і **VI**.

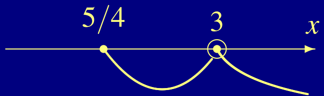
Після розв'язання систем маємо сукупність

$$\left[\begin{array}{l} x\in\varnothing, \\ x\in[5/4;3), \\ x\in[3,\infty), \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x\in[5/4;3), \\ x\in[3,\infty). \end{array}\right.$$

Приклади із ЗНО

$$\left[\begin{array}{ll} x \in [5/4;3), & A \\ x \in [3,\infty). & B \end{array}\right.$$

Нарешті, об'єднуючи множини A і B, отримуємо



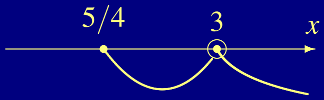
$A \cup B = [5/4,\infty)$.

Відповідь: $x \in [5/4,\infty)$.

Приклади із ЗНО

$$\left[\begin{array}{ll} x \in [5/4;3), & A \\ x \in [3,\infty). & B \end{array}\right.$$

Нарешті, об'єднуючи множини A і B, отримуємо



$A \cup B = [5/4,\infty)$.

Відповідь: $x \in [5/4,\infty)$.

Приклади із ЗНО

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2011 р.). Обчисліть значення виразу

$$\frac{3\sqrt{2}-5}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{24}-\sqrt{300}}{\sqrt{3}}\,.$$

Розв'язання. Спочатку спростимо другий доданок:

$$\frac{\sqrt{24}-\sqrt{300}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{8}-\sqrt{3}\sqrt{100}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(2\sqrt{2}-10)}{\sqrt{3}}=2\sqrt{2}-10\,.$$

Далі маємо

$$\frac{3\sqrt{2}-5}{\sqrt{2}-1}+2\sqrt{2}-10=\frac{3\sqrt{2}-5+(2\sqrt{2}-10)(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1}=$$

$$=\frac{3\sqrt{2}-5+4-2\sqrt{2}-10\sqrt{2}+10}{\sqrt{2}-1}=\frac{9-9\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=$$

$$=\frac{-9(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1}=-9\,.$$

Відповідь: -9.

Приклади із ЗНО

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2011 р.). Обчисліть значення виразу

$$\frac{3\sqrt{2}-5}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{24}-\sqrt{300}}{\sqrt{3}}\,.$$

Розв'язання. Спочатку спростимо другий доданок:

$$\frac{\sqrt{24}-\sqrt{300}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{8}-\sqrt{3}\sqrt{100}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(2\sqrt{2}-10)}{\sqrt{3}}=2\sqrt{2}-10\,.$$

Далі маємо

$$\frac{3\sqrt{2}-5}{\sqrt{2}-1}+2\sqrt{2}-10=\frac{3\sqrt{2}-5+(2\sqrt{2}-10)(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1}=$$

$$=\frac{3\sqrt{2}-5+4-2\sqrt{2}-10\sqrt{2}+10}{\sqrt{2}-1}=\frac{9-9\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=$$

$$=\frac{-9(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1}=-9\,.$$

Відповідь: -9.

Приклади із ЗНО

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2011 р.). Обчисліть значення виразу

$$\frac{3\sqrt{2}-5}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{24}-\sqrt{300}}{\sqrt{3}}.$$

Розв'язання. Спочатку спростимо другий доданок:

$$\frac{\sqrt{24}-\sqrt{300}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{8}-\sqrt{3}\sqrt{100}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(2\sqrt{2}-10)}{\sqrt{3}}=2\sqrt{2}-10.$$

Далі маємо

$$\frac{3\sqrt{2}-5}{\sqrt{2}-1}+2\sqrt{2}-10=\frac{3\sqrt{2}-5+(2\sqrt{2}-10)(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1}=$$

$$=\frac{3\sqrt{2}-5+4-2\sqrt{2}-10\sqrt{2}+10}{\sqrt{2}-1}=\frac{9-9\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=$$

$$=\frac{-9(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1}=-9.$$

Відповідь: -9.

Приклади із ЗНО

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2011 р.). Обчисліть значення виразу

$$\frac{3\sqrt{2}-5}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{24}-\sqrt{300}}{\sqrt{3}}\,.$$

Розв'язання. Спочатку спростимо другий доданок:

$$\frac{\sqrt{24}-\sqrt{300}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{8}-\sqrt{3}\sqrt{100}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(2\sqrt{2}-10)}{\sqrt{3}}=2\sqrt{2}-10\,.$$

Далі маємо

$$\frac{3\sqrt{2}-5}{\sqrt{2}-1}+2\sqrt{2}-10=\frac{3\sqrt{2}-5+(2\sqrt{2}-10)(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1}=$$

$$=\frac{3\sqrt{2}-5+4-2\sqrt{2}-10\sqrt{2}+10}{\sqrt{2}-1}=\frac{9-9\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=$$

$$=\frac{-9(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1}=-9\,.$$

Відповідь: -9.

Приклади із ЗНО

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2011 р.). Обчисліть значення виразу

$$\frac{3\sqrt{2}-5}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{24}-\sqrt{300}}{\sqrt{3}}\,.$$

Розв'язання. Спочатку спростимо другий доданок:

$$\frac{\sqrt{24}-\sqrt{300}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{8}-\sqrt{3}\sqrt{100}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(2\sqrt{2}-10)}{\sqrt{3}}=2\sqrt{2}-10\,.$$

Далі маємо

$$\frac{3\sqrt{2}-5}{\sqrt{2}-1}+2\sqrt{2}-10=\frac{3\sqrt{2}-5+(2\sqrt{2}-10)(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1}=$$

$$=\frac{3\sqrt{2}-5+4-2\sqrt{2}-10\sqrt{2}+10}{\sqrt{2}-1}=\frac{9-9\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=$$

$$=\frac{-9(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1}=-9\,.$$

Відповідь: -9.

Приклади із ЗНО

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2011 р.). Обчисліть значення виразу

$$\frac{3\sqrt{2}-5}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{24}-\sqrt{300}}{\sqrt{3}}.$$

Розв'язання. Спочатку спростимо другий доданок:

$$\frac{\sqrt{24}-\sqrt{300}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{8}-\sqrt{3}\sqrt{100}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(2\sqrt{2}-10)}{\sqrt{3}}=2\sqrt{2}-10.$$

Далі маємо

$$\frac{3\sqrt{2}-5}{\sqrt{2}-1}+2\sqrt{2}-10=\frac{3\sqrt{2}-5+(2\sqrt{2}-10)(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1}=$$

$$=\frac{3\sqrt{2}-5+4-2\sqrt{2}-10\sqrt{2}+10}{\sqrt{2}-1}=\frac{9-9\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=$$

$$=\frac{-9(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1}=-9.$$

Відповідь: -9.