Метод заміни змінних

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 8

Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Приклад

Метод заміни змінних застосовується за першої нагоди до рівнянь і нерівностей виду

$$f(\varphi(x)) = g(\varphi(x)), \quad f(\varphi(x)) < g(\varphi(x))$$

і т.п., оскільки заміна $t = \varphi(x)$ дозволяє спростити початкове рівняння чи нерівність.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x^8 + x^4 - 2 = 0$.

Розв'язання. Після заміни $x^4 = t$ отримуємо квадратне рівняння $t^2 + t - 2 = 0$.
Його корені $t_1 = -2$, $t_2 = 1$.
Тепер, щоб знайти корені рівняння $x^8 + x^4 - 2 = 0$, після зворотної заміни $t = x^4$ необхідно розв'язати сукупність

$$\left[\begin{array}{l} x^4 = -2, \\ x^4 = 1, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ x = \pm 1, \end{array}\right. \iff x = \pm 1.$$

Відповідь: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Приклад

Метод заміни змінних застосовується за першої нагоди до рівнянь і нерівностей виду

$$f(\varphi(x)) = g(\varphi(x)), \quad f(\varphi(x)) < g(\varphi(x))$$

і т.п., оскільки заміна $t = \varphi(x)$ дозволяє спростити початкове рівняння чи нерівність.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x^8 + x^4 - 2 = 0$.

Розв'язання. Після заміни $x^4 = t$ отримуємо квадратне рівняння $t^2 + t - 2 = 0$.

Його корені $t_1 = -2$, $t_2 = 1$.

Тепер, щоб знайти корені рівняння $x^8 + x^4 - 2 = 0$, після зворотної заміни $t = x^4$ необхідно розв'язати сукупність

$$\left[\begin{array}{l} x^4 = -2, \\ x^4 = 1, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ x = \pm 1, \end{array}\right. \iff x = \pm 1.$$

Відповідь: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Приклад

Метод заміни змінних застосовується за першої нагоди до рівнянь і нерівностей виду

$$f(\varphi(x)) = g(\varphi(x)), \quad f(\varphi(x)) < g(\varphi(x))$$

і т.п., оскільки заміна $t = \varphi(x)$ дозволяє спростити початкове рівняння чи нерівність.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x^8 + x^4 - 2 = 0$.

Розв'язання. Після заміни $x^4 = t$ отримуємо квадратне рівняння $t^2 + t - 2 = 0$.
Його корені $t_1 = -2$, $t_2 = 1$.
Тепер, щоб знайти корені рівняння $x^8 + x^4 - 2 = 0$, після зворотної заміни $t = x^4$ необхідно розв'язати сукупність

$$\left[\begin{array}{l} x^4 = -2, \\ x^4 = 1, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ x = \pm 1, \end{array}\right. \iff x = \pm 1.$$

Відповідь: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Приклад

Метод заміни змінних застосовується за першої нагоди до рівнянь і нерівностей виду

$$f(\varphi(x)) = g(\varphi(x)), \quad f(\varphi(x)) < g(\varphi(x))$$

і т.п., оскільки заміна $t = \varphi(x)$ дозволяє спростити початкове рівняння чи нерівність.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x^8 + x^4 - 2 = 0$.

Розв'язання. Після заміни $x^4 = t$ отримуємо квадратне рівняння $t^2 + t - 2 = 0$.
Його корені $t_1 = -2$, $t_2 = 1$.
Тепер, щоб знайти корені рівняння $x^8 + x^4 - 2 = 0$, після зворотної заміни $t = x^4$ необхідно розв'язати сукупність

$$\left[\begin{array}{l} x^4 = -2, \\ x^4 = 1, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ x = \pm 1, \end{array}\right. \iff x = \pm 1.$$

Відповідь: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Приклад

Метод заміни змінних застосовується за першої нагоди до рівнянь і нерівностей виду

$$f(\varphi(x)) = g(\varphi(x)), \quad f(\varphi(x)) < g(\varphi(x))$$

і т.п., оскільки заміна $t = \varphi(x)$ дозволяє спростити початкове рівняння чи нерівність.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x^8 + x^4 - 2 = 0$.

Розв'язання. Після заміни $x^4 = t$ отримуємо квадратне рівняння $t^2 + t - 2 = 0$.
Його корені $t_1 = -2$, $t_2 = 1$.
Тепер, щоб знайти корені рівняння $x^8 + x^4 - 2 = 0$, після зворотної заміни $t = x^4$ необхідно розв'язати сукупність

$$\left[\begin{array}{l} x^4 = -2, \\ x^4 = 1, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ x = \pm 1, \end{array}\right. \iff x = \pm 1.$$

Відповідь: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Логічна схема методу

Процес розв'язання рівнянь і нерівностей методом заміни змінних складається з трьох етапів, які розглянемо на прикладі нерівності $f(\varphi(x)) < g(\varphi(x))$:

- заміною змінних (підстановкою) $t = \varphi(x)$ нерівність $f(\varphi(x)) < g(\varphi(x))$ зводиться до більш простої нерівності $f(t) < g(t)$;
- розв'язується нерівність $f(t) < g(t)$. Результатом розв'язання є доведення рівносильності $f(t) < g(t) \Longleftrightarrow t \in P_*$, де P_* – множина розв'язків нерівності $f(t) < g(t)$;
- розв'язується умова $\varphi(x) \in P_*$. Результатом розв'язання є доведення рівносильності $\varphi(x) \in P_* \Longleftrightarrow x \in P$. Отримана у такий спосіб множина P є, нарешті, множиною розв'язків початкової нерівності $f(\varphi(x)) < g(\varphi(x))$.

Логічна схема методу

Процес розв'язання рівнянь і нерівностей методом заміни змінних складається з трьох етапів, які розглянемо на прикладі нерівності $f(\varphi(x)) < g(\varphi(x))$:

- заміною змінних (підстановкою) $t = \varphi(x)$ нерівність $f(\varphi(x)) < g(\varphi(x))$ зводиться до більш простої нерівності $f(t) < g(t)$;
- розв'язується нерівність $f(t) < g(t)$. Результатом розв'язання є доведення рівносильності $f(t) < g(t) \iff t \in P_*$, де P_* – множина розв'язків нерівності $f(t) < g(t)$;
- розв'язується умова $\varphi(x) \in P_*$. Результатом розв'язання є доведення рівносильності $\varphi(x) \in P_* \iff x \in P$. Отримана у такий спосіб множина P є, нарешті, множиною розв'язків початкової нерівності $f(\varphi(x)) < g(\varphi(x))$.

Логічна схема методу

Процес розв'язання рівнянь і нерівностей методом заміни змінних складається з трьох етапів, які розглянемо на прикладі нерівності $f(\varphi(x)) < g(\varphi(x))$:

- заміною змінних (підстановкою) $t = \varphi(x)$ нерівність $f(\varphi(x)) < g(\varphi(x))$ зводиться до більш простої нерівності $f(t) < g(t)$;
- розв'язується нерівність $f(t) < g(t)$. Результатом розв'язання є доведення рівносильності $f(t) < g(t) \iff t \in P_*$, де P_* – множина розв'язків нерівності $f(t) < g(t)$;
- розв'язується умова $\varphi(x) \in P_*$. Результатом розв'язання є доведення рівносильності $\varphi(x) \in P_* \iff x \in P$. Отримана у такий спосіб множина P є, нарешті, множиною розв'язків початкової нерівності $f(\varphi(x)) < g(\varphi(x))$.

Логічна схема методу

Процес розв'язання рівнянь і нерівностей методом заміни змінних складається з трьох етапів, які розглянемо на прикладі нерівності $f(\varphi(x)) < g(\varphi(x))$:

- заміною змінних (підстановкою) $t = \varphi(x)$ нерівність $f(\varphi(x)) < g(\varphi(x))$ зводиться до більш простої нерівності $f(t) < g(t)$;
- розв'язується нерівність $f(t) < g(t)$. Результатом розв'язання є доведення рівносильності $f(t) < g(t) \Longleftrightarrow t \in P_*$, де P_* – множина розв'язків нерівності $f(t) < g(t)$;
- розв'язується умова $\varphi(x) \in P_*$. Результатом розв'язання є доведення рівносильності $\varphi(x) \in P_* \Longleftrightarrow x \in P$. Отримана у такий спосіб множина P є, нарешті, множиною розв'язків початкової нерівності $f(\varphi(x)) < g(\varphi(x))$.

Логічна схема методу

Можливі наступні види умови $\varphi(x) \in P_*$:

1) $\varphi(x) \in [a,b] \iff a \le \varphi(x) \le b$;
2) $\varphi(x) \in (a,b) \iff a < \varphi(x) < b$;
3) $\varphi(x) \in [a,b) \iff a \le \varphi(x) < b$;
4) $\varphi(x) \in (a,b] \iff a < \varphi(x) \le b$;
5) $\varphi(x) \in (-\infty,a] \iff \varphi(x) \le a$;
6) $\varphi(x) \in (-\infty,a) \iff \varphi(x) < a$;
7) $\varphi(x) \in [a,\infty) \iff \varphi(x) \ge a$;
8) $\varphi(x) \in (a,\infty) \iff \varphi(x) > a$;
9) $\varphi(x) \in \{a\} \iff \varphi(x) = a$;
10) $\varphi(x) \in \varnothing \iff x \in \varnothing$;
11) $\varphi(x) \in \mathbf{R} \iff x \in D(\varphi)$, де $D(\varphi)$ – область визначення функції $\varphi(x)$;
12) $\varphi(x) \in A_1 \cup A_2 \iff \left[\begin{array}{l} \varphi(x) \in A_1, \\ \varphi(x) \in A_2. \end{array}\right.$

Логічна схема методу

Зазначимо, що останнім співвідношенням

$$\varphi(x) \in A_1 \cup A_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \varphi(x) \in A_1, \\ \varphi(x) \in A_2 \end{array} \right.$$

ми скористались в прикладі 1, оскільки $\{-2;1\} = \{-2\} \cup \{1\}$.

Отже, на заключному етапі процесу розв'язання рівнянь і нерівностей методом заміни змінних часто виникає необхідність розв'язання сукупностей чи подвійних нерівностей.

Розглянемо ефективний прийом розв'язання подвійних нерівностей і сукупностей нерівностей графічним методом.

Логічна схема методу

Зазначимо, що останнім співвідношенням

$$\varphi(x) \in A_1 \cup A_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \varphi(x) \in A_1, \\ \varphi(x) \in A_2 \end{array} \right.$$

ми скористались в прикладі 1, оскільки $\{-2;1\} = \{-2\} \cup \{1\}$.

Отже, на заключному етапі процесу розв'язання рівнянь і нерівностей методом заміни змінних часто виникає необхідність розв'язання сукупностей чи подвійних нерівностей.

Розглянемо ефективний прийом розв'язання подвійних нерівностей і сукупностей нерівностей графічним методом.

Логічна схема методу

Зазначимо, що останнім співвідношенням

$$\varphi(x) \in A_1 \cup A_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \varphi(x) \in A_1, \\ \varphi(x) \in A_2 \end{array} \right.$$

ми скористались в прикладі 1, оскільки
$\{-2;1\} = \{-2\} \cup \{1\}$.

Отже, на заключному етапі процесу розв'язання рівнянь і нерівностей методом заміни змінних часто виникає необхідність розв'язання сукупностей чи подвійних нерівностей.

Розглянемо ефективний прийом розв'язання подвійних нерівностей і сукупностей нерівностей графічним методом.

Подвійні нерівності (графічний метод)

Подвійні нерівності – це вирази виду $g_1(x) < f(x) < g_2(x)$, $g_1(x) < f(x) \le g_2(x)$ і т.п., які є скороченим записом відповідно наступних систем нерівностей

$$\begin{cases} f(x) > g_1(x), \\ f(x) < g_2(x), \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) > g_1(x), \\ f(x) \le g_2(x) \end{cases} \qquad \text{і т.п.}$$

Розв'язки нерівності $g_1(x) < f(x) < g_2(x)$ – це ті x, при яких точка графіка $y = f(x)$ лежить вище відповідної точки графіка $y = g_1(x)$ і в той же час нижче відповідної точки графіка $y = g_2(x)$.

Якщо серед нерівностей, що утворюють подвійну нерівність, є нестрогі нерівності: $g_1(x) \le f(x)$ або $f(x) \le g_2(x)$, то до розв'язків нерівності $g_1(x) < f(x) < g_2(x)$ слід приєднати корені відповідних рівнянь: $f(x) = g_1(x)$ чи $f(x) = g_2(x)$.

Подвійні нерівності (графічний метод)

Подвійні нерівності – це вирази виду $g_1(x) < f(x) < g_2(x)$, $g_1(x) < f(x) \leq g_2(x)$ і т.п., які є скороченим записом відповідно наступних систем нерівностей

$$\begin{cases} f(x) > g_1(x), \\ f(x) < g_2(x), \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) > g_1(x), \\ f(x) \leq g_2(x) \end{cases} \qquad \text{і т.п.}$$

Розв'язки нерівності $g_1(x) < f(x) < g_2(x)$ – це ті x, при яких точка графіка $y = f(x)$ лежить вище відповідної точки графіка $y = g_1(x)$ і в той же час нижче відповідної точки графіка $y = g_2(x)$.

Якщо серед нерівностей, що утворюють подвійну нерівність, є нестрогі нерівності: $g_1(x) \leq f(x)$ або $f(x) \leq g_2(x)$, то до розв'язків нерівності $g_1(x) < f(x) < g_2(x)$ слід приєднати корені відповідних рівнянь: $f(x) = g_1(x)$ чи $f(x) = g_2(x)$.

Подвійні нерівності (графічний метод)

Подвійні нерівності – це вирази виду
$g_1(x) < f(x) < g_2(x)$, $g_1(x) < f(x) \leq g_2(x)$ і т.п., які є скороченим записом відповідно наступних систем нерівностей

$$\begin{cases} f(x) > g_1(x), \\ f(x) < g_2(x), \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) > g_1(x), \\ f(x) \leq g_2(x) \end{cases} \qquad \text{і т.п.}$$

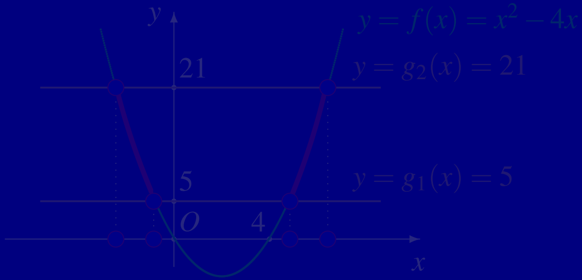
Розв'язки нерівності $g_1(x) < f(x) < g_2(x)$ – це ті x, при яких точка графіка $y = f(x)$ лежить вище відповідної точки графіка $y = g_1(x)$ і в той же час нижче відповідної точки графіка $y = g_2(x)$.

Якщо серед нерівностей, що утворюють подвійну нерівність, є нестрогі нерівності: $g_1(x) \leq f(x)$ або $f(x) \leq g_2(x)$, то до розв'язків нерівності $g_1(x) < f(x) < g_2(x)$ слід приєднати корені відповідних рівнянь: $f(x) = g_1(x)$ чи $f(x) = g_2(x)$.

Подвійні нерівності (графічний метод)

П р и к л а д 2. Розв'язати нерівність $5 < x^2 - 4x < 21$.

Р о з в' я з а н н я. Зобразимо ескізи графіків функцій $y = f(x) = x^2 - 4x$, $y = g_1(x) = 5$, $y = g_2(x) = 21$ і розв'яжемо подвійну нерівність графічним методом. При цьому знаходимо ті частини параболи $y = x^2 - 4x$, які розміщені вище прямої $y = 5$ і в той же час нижче прямої $y = 21$, тобто в смузі між цими прямими.

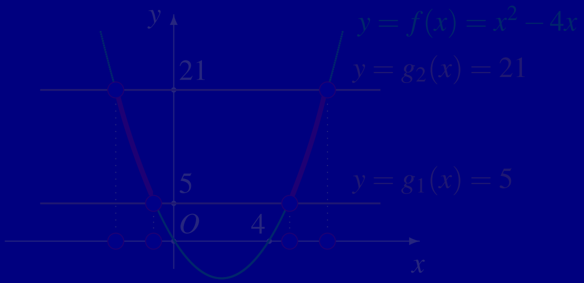


Подвійні нерівності (графічний метод)

П р и к л а д 2. Розв'язати нерівність $5 < x^2 - 4x < 21$.

Р о з в' я з а н н я. Зобразимо ескізи графіків функцій $y = f(x) = x^2 - 4x$, $y = g_1(x) = 5$, $y = g_2(x) = 21$ і розв'яжемо подвійну нерівність графічним методом.

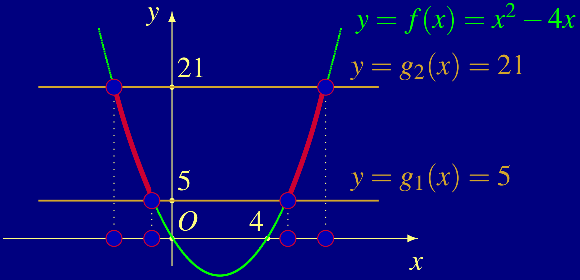
При цьому знаходимо ті частини параболи $y = x^2 - 4x$, які розміщені вище прямої $y = 5$ і в той же час нижче прямої $y = 21$, тобто в смузі між цими прямими.



Подвійні нерівності (графічний метод)

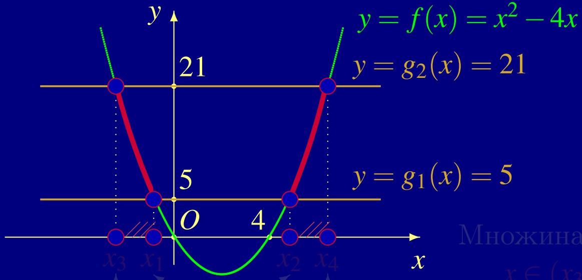
Приклад 2. Розв'язати нерівність $5 < x^2 - 4x < 21$.

Розв'язання. Зобразимо ескізи графіків функцій $y = f(x) = x^2 - 4x$, $y = g_1(x) = 5$, $y = g_2(x) = 21$ і розв'яжемо подвійну нерівність графічним методом. При цьому знаходимо ті частини параболи $y = x^2 - 4x$, які розміщені вище прямої $y = 5$ і в той же час нижче прямої $y = 21$, тобто в смузі між цими прямими.



Подвійні нерівності (графічний метод)

Проектуючи відмічені частини параболи на вісь Ox, знаходимо множину розв'язків подвійної нерівності.



корені рівняння $f(x) = g_1(x)$

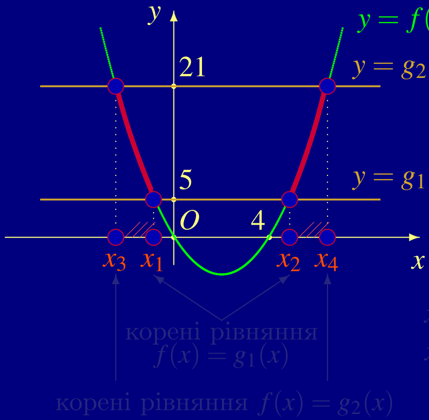
корені рівняння $f(x) = g_2(x)$

Множина розв'язків має вигляд $x \in (x_3, x_1) \cup (x_2, x_4)$, де x_1, x_2 – корені рівняння $x^2 - 4x = 5$, x_3, x_4 – корені рівняння $x^2 - 4x = 21$. Розв'язуючи ці рівняння, відповідно отримуємо $x_1 = -1, x_2 = 5$ і $x_3 = -3, x_4 = 7$.

Відповідь: $x \in (-3; -1) \cup (5; 7)$.

Подвійні нерівності (графічний метод)

Проектуючи відмічені частини параболи на вісь Ox, знаходимо множину розв'язків подвійної нерівності.



Множина розв'язків має вигляд

$x \in (x_3, x_1) \cup (x_2, x_4)$, де

x_1, x_2 – корені рівняння $x^2 - 4x = 5$,

x_3, x_4 – корені рівняння $x^2 - 4x = 21$.

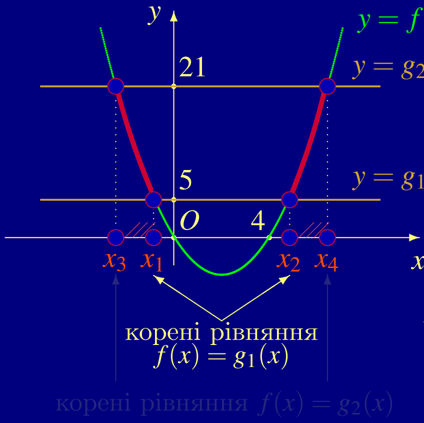
Розв'язуючи ці рівняння, відповідно отримуємо

$x_1 = -1, x_2 = 5$ і $x_3 = -3, x_4 = 7$.

Відповідь: $x \in (-3; -1) \cup (5; 7)$.

Подвійні нерівності (графічний метод)

Проектуючи відмічені частини параболи на вісь Ox, знаходимо множину розв'язків подвійної нерівності.



Множина розв'язків має вигляд

$x \in (x_3, x_1) \cup (x_2, x_4)$, де

x_1, x_2 – корені рівняння $x^2 - 4x = 5$,

x_3, x_4 – корені рівняння $x^2 - 4x = 21$.

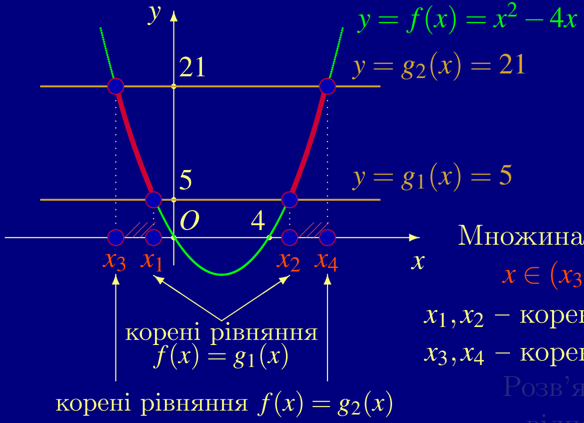
Розв'язуючи ці рівняння, відповідно отримуємо

$x_1 = -1, x_2 = 5$ і $x_3 = -3, x_4 = 7$.

Відповідь: $x \in (-3; -1) \cup (5; 7)$.

Подвійні нерівності (графічний метод)

Проектуючи відмічені частини параболи на вісь Ox, знаходимо множину розв'язків подвійної нерівності.



Множина розв'язків має вигляд

$x \in (x_3, x_1) \cup (x_2, x_4)$, де

x_1, x_2 – корені рівняння $x^2 - 4x = 5$,

x_3, x_4 – корені рівняння $x^2 - 4x = 21$.

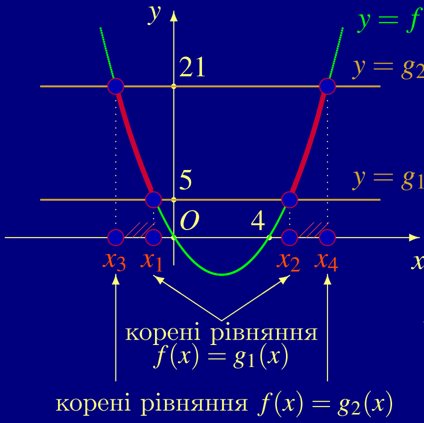
Розв'язуючи ці рівняння, відповідно отримуємо

$x_1 = -1, x_2 = 5$ і $x_3 = -3, x_4 = 7$.

Відповідь: $x \in (-3; -1) \cup (5; 7)$.

Подвійні нерівності (графічний метод)

Проектуючи відмічені частини параболи на вісь Ox, знаходимо множину розв'язків подвійної нерівності.



Множина розв'язків має вигляд

$x \in (x_3, x_1) \cup (x_2, x_4)$, де

x_1, x_2 – корені рівняння $x^2 - 4x = 5$,

x_3, x_4 – корені рівняння $x^2 - 4x = 21$.

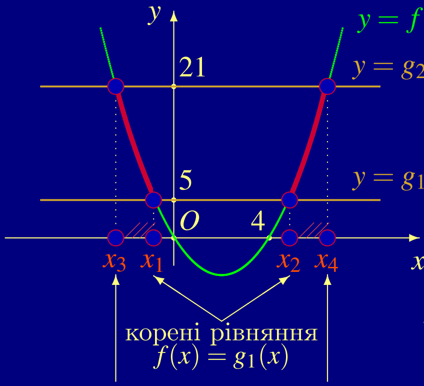
Розв'язуючи ці рівняння, відповідно отримуємо

$x_1 = -1, x_2 = 5$ і $x_3 = -3, x_4 = 7$.

Відповідь: $x \in (-3; -1) \cup (5; 7)$.

Подвійні нерівності (графічний метод)

Проектуючи відмічені частини параболи на вісь Ox, знаходимо множину розв'язків подвійної нерівності.



корені рівняння $f(x) = g_2(x)$

Множина розв'язків має вигляд

$x \in (x_3, x_1) \cup (x_2, x_4)$, де

x_1, x_2 – корені рівняння $x^2 - 4x = 5$,

x_3, x_4 – корені рівняння $x^2 - 4x = 21$.

Розв'язуючи ці рівняння, відповідно отримуємо

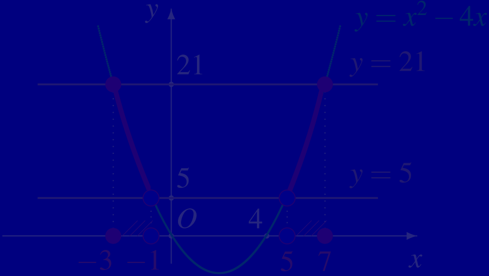
$x_1 = -1, x_2 = 5$ і $x_3 = -3, x_4 = 7$.

Відповідь: $x \in (-3; -1) \cup (5; 7)$.

Подвійні нерівності (графічний метод)

П р и к л а д 3. Розв'язати нерівність $5 < x^2 - 4x \le 21$.

Р о з в' я з а н н я. До множини розв'язків нерівності $5 < x^2 - 4x < 21$, отриманої при розв'язанні попереднього прикладу, приєднаємо корені рівняння $x^2 - 4x = 21$ — точки -3 і 7.

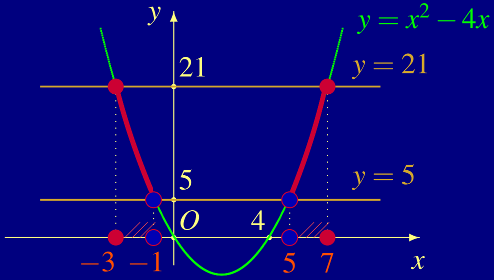


В і д п о в і д ь: $x \in [-3; -1) \cup (5; 7]$.

Подвійні нерівності (графічний метод)

П р и к л а д 3. Розв'язати нерівність $5 < x^2 - 4x \leq 21$.

Р о з в' я з а н н я. До множини розв'язків нерівності $5 < x^2 - 4x < 21$, отриманої при розв'язанні попереднього прикладу, приєднаємо корені рівняння $x^2 - 4x = 21$ — точки -3 і 7.

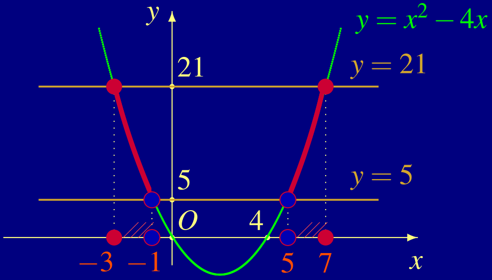


В і д п о в і д ь: $x \in [-3; -1) \cup (5; 7]$.

Подвійні нерівності (графічний метод)

Приклад 3. Розв'язати нерівність $5 < x^2 - 4x \leq 21$.

Розв'язання. До множини розв'язків нерівності $5 < x^2 - 4x < 21$, отриманої при розв'язанні попереднього прикладу, приєднаємо корені рівняння $x^2 - 4x = 21$ — точки -3 і 7.



Відповідь: $x \in [-3; -1) \cup (5; 7]$.

Сукупності (графічний метод)

Розв'язки сукупності

$$\left[\begin{array}{l} f(x) < g_1(x), \\ f(x) > g_2(x) \end{array}\right. \qquad (1)$$

– це ті x, при яких точка графіка $y = f(x)$ лежить або нижче відповідної точки графіка $y = g_1(x)$, або вище відповідної точки графіка $y = g_2(x)$.

Якщо серед нерівностей, що входять до сукупності нерівностей, є нестрогі нерівності: $f(x) \leq g_1(x)$ або $f(x) \geq g_2(x)$, то до розв'язків сукупності (1) слід приєднати корені відповідних рівнянь: $f(x) = g_1(x)$ чи $f(x) = g_2(x)$.

Сукупності (графічний метод)

Розв'язки сукупності

$$\left[\begin{array}{l} f(x) < g_1(x), \\ f(x) > g_2(x) \end{array}\right. \qquad (1)$$

– це ті x, при яких точка графіка $y = f(x)$ лежить або нижче відповідної точки графіка $y = g_1(x)$, або вище відповідної точки графіка $y = g_2(x)$.

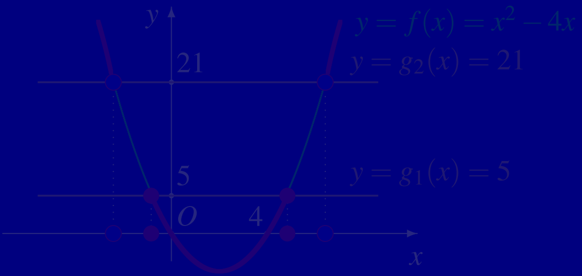
Якщо серед нерівностей, що входять до сукупності нерівностей, є нестрогі нерівності: $f(x) \le g_1(x)$ або $f(x) \ge g_2(x)$, то до розв'язків сукупності (1) слід приєднати корені відповідних рівнянь: $f(x) = g_1(x)$ чи $f(x) = g_2(x)$.

Сукупності (графічний метод)

Приклад 4. Розв'язати сукупність нерівностей

$$\left[\begin{array}{l} x^2-4x>21, \\ x^2-4x\le 5. \end{array}\right.$$

Розв'язання. Розв'язуючи сукупність нерівностей графічним методом, знаходимо ті частини параболи $y=x^2-4x$, які розміщені або вище прямої $y=21$ або нижче прямої $y=5$, тобто поза смугою, обмеженою цими прямими. Крім того, до множини розв'язків необхідно включити корені рівняння $x^2-4x=5$.

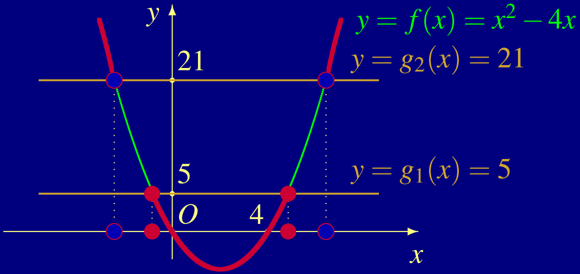


Сукупності (графічний метод)

П р и к л а д 4. Розв'язати сукупність нерівностей

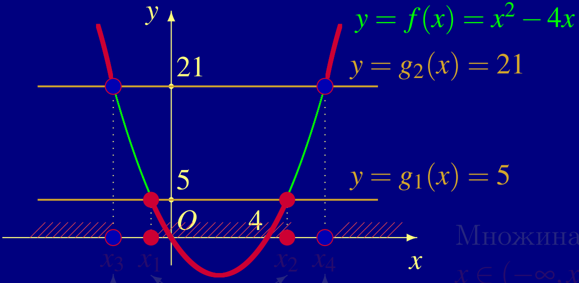
$$\left[\begin{array}{l} x^2-4x>21, \\ x^2-4x\le 5. \end{array}\right.$$

Р о з в' я з а н н я. Розв'язуючи сукупність нерівностей графічним методом, знаходимо ті частини параболи $y=x^2-4x$, які розміщені або вище прямої $y=21$ або нижче прямої $y=5$, тобто поза смугою, обмеженою цими прямими. Крім того, до множини розв'язків необхідно включити корені рівняння $x^2-4x=5$.



Сукупності (графічний метод)

Проектуючи відмічені частини параболи на вісь Ox, знаходимо множину розв'язків.



корені рівняння $f(x) = g_1(x)$

корені рівняння $f(x) = g_2(x)$

Множина розв'язків має вигляд $x \in (-\infty, x_3) \cup [x_1, x_2] \cup (x_4, \infty)$, де

x_1, x_2 – корені рівняння $x^2 - 4x = 5$,

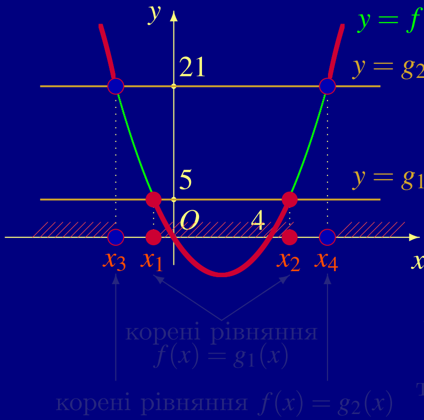
x_3, x_4 – корені рівняння $x^2 - 4x = 21$,

тобто $x_1 = -1, x_2 = 5$ і $x_3 = -3, x_4 = 7$.

Відповідь: $x \in (-\infty, -3) \cup [-1; 5] \cup (7, \infty)$.

Сукупності (графічний метод)

Проектуючи відмічені частини параболи на вісь Ox, знаходимо множину розв'язків.

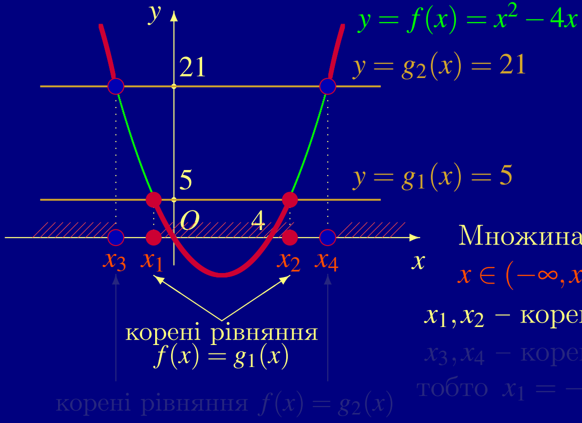


Множина розв'язків має вигляд $x \in (-\infty, x_3) \cup [x_1, x_2] \cup (x_4, \infty)$, де x_1, x_2 – корені рівняння $x^2 - 4x = 5$, x_3, x_4 – корені рівняння $x^2 - 4x = 21$, тобто $x_1 = -1, x_2 = 5$ і $x_3 = -3, x_4 = 7$.

Відповідь: $x \in (-\infty, -3) \cup [-1; 5] \cup (7, \infty)$.

Сукупності (графічний метод)

Проектуючи відмічені частини параболи на вісь Ox, знаходимо множину розв'язків.



Множина розв'язків має вигляд $x \in (-\infty, x_3) \cup [x_1, x_2] \cup (x_4, \infty)$, де

x_1, x_2 – корені рівняння $x^2 - 4x = 5$,

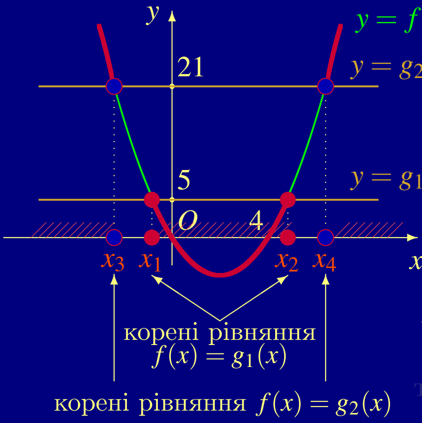
x_3, x_4 – корені рівняння $x^2 - 4x = 21$,

тобто $x_1 = -1, x_2 = 5$ і $x_3 = -3, x_4 = 7$.

Відповідь: $x \in (-\infty, -3) \cup [-1; 5] \cup (7, \infty)$.

Сукупності (графічний метод)

Проектуючи відмічені частини параболи на вісь Ox, знаходимо множину розв'язків.



Множина розв'язків має вигляд $x \in (-\infty, x_3) \cup [x_1, x_2] \cup (x_4, \infty)$, де

x_1, x_2 – корені рівняння $x^2 - 4x = 5$,

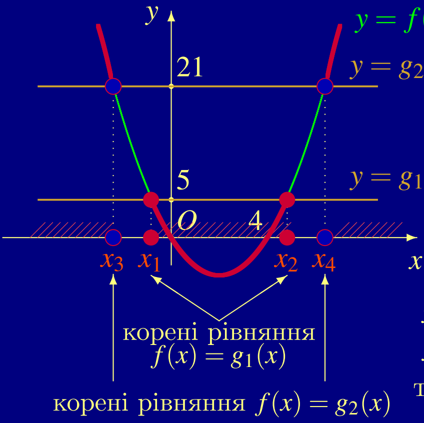
x_3, x_4 – корені рівняння $x^2 - 4x = 21$,

тобто $x_1 = -1, x_2 = 5$ і $x_3 = -3, x_4 = 7$.

Відповідь: $x \in (-\infty, -3) \cup [-1; 5] \cup (7, \infty)$.

Сукупності (графічний метод)

Проектуючи відмічені частини параболи на вісь Ox, знаходимо множину розв'язків.

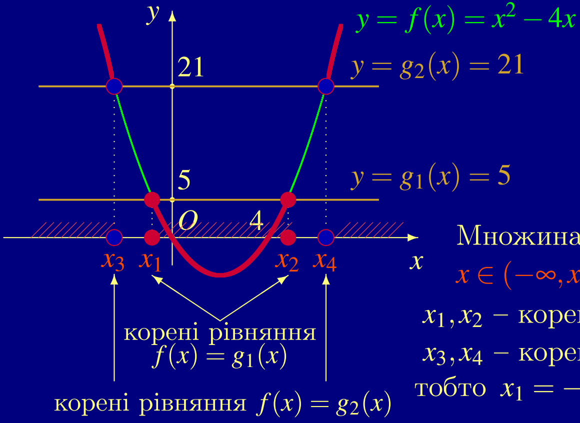


Множина розв'язків має вигляд
$x \in (-\infty, x_3) \cup [x_1, x_2] \cup (x_4, \infty)$, де
x_1, x_2 – корені рівняння $x^2 - 4x = 5$,
x_3, x_4 – корені рівняння $x^2 - 4x = 21$,
тобто $x_1 = -1, x_2 = 5$ і $x_3 = -3, x_4 = 7$.

Відповідь: $x \in (-\infty, -3) \cup [-1; 5] \cup (7, \infty)$.

Сукупності (графічний метод)

Проектуючи відмічені частини параболи на вісь Ox, знаходимо множину розв'язків.



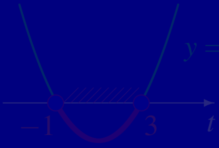
Множина розв'язків має вигляд $x \in (-\infty, x_3) \cup [x_1, x_2] \cup (x_4, \infty)$, де
x_1, x_2 – корені рівняння $x^2 - 4x = 5$,
x_3, x_4 – корені рівняння $x^2 - 4x = 21$,
тобто $x_1 = -1, x_2 = 5$ і $x_3 = -3, x_4 = 7$.

Відповідь: $x \in (-\infty, -3) \cup [-1; 5] \cup (7, \infty)$.

Приклади

Приклад 5. Розв'язати нерівність $x^{18} - 2x^9 - 3 < 0$.

Розв'язання. Після заміни змінних $t = x^9$ отримаємо квадратну нерівність $t^2 - 2t - 3 < 0$, яку розв'яжемо графічним методом. Відмітимо ту частину параболи



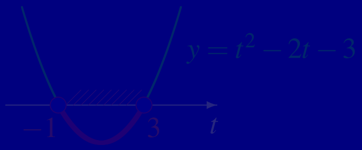
$y = t^2 - 2t - 3$, яка лежить нижче осі Ot, і спроектуємо її на вісь Ot: $t \in (-1;3)$.

Далі, після зворотної заміни $t = x^9$ необхідно розв'язати умову $x^9 \in (-1;3) \iff -1 < x^9 < 3$.

Приклади

Приклад 5. Розв'язати нерівність $x^{18} - 2x^9 - 3 < 0$.

Розв'язання. Після заміни змінних $t = x^9$ отримаємо квадратну нерівність $t^2 - 2t - 3 < 0$, яку розв'яжемо графічним методом. Відмітимо ту частину параболи



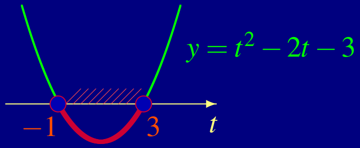
$y = t^2 - 2t - 3$, яка лежить нижче осі Ot, і спроектуємо її на вісь Ot: $t \in (-1;3)$.

Далі, після зворотної заміни $t = x^9$ необхідно розв'язати умову $x^9 \in (-1;3) \iff -1 < x^9 < 3$.

Приклади

Приклад 5. Розв'язати нерівність $x^{18} - 2x^9 - 3 < 0$.

Розв'язання. Після заміни змінних $t = x^9$ отримаємо квадратну нерівність $t^2 - 2t - 3 < 0$, яку розв'яжемо графічним методом. Відмітимо ту частину параболи



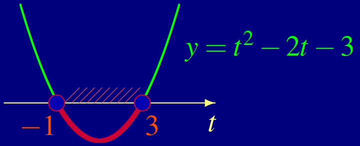
$y = t^2 - 2t - 3$, яка лежить нижче осі Ot, і спроектуємо її на вісь Ot: $t \in (-1;3)$.

Далі, після зворотної заміни $t = x^9$ необхідно розв'язати умову $x^9 \in (-1;3) \iff -1 < x^9 < 3$.

Приклади

П р и к л а д 5. Розв'язати нерівність $x^{18} - 2x^9 - 3 < 0$.

Р о з в' я з а н н я. Після заміни змінних $t = x^9$ отримаємо квадратну нерівність $t^2 - 2t - 3 < 0$, яку розв'яжемо графічним методом. Відмітимо ту частину параболи

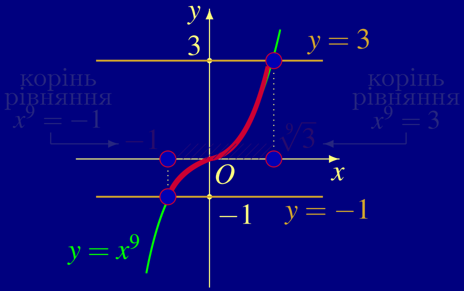


$y = t^2 - 2t - 3$, яка лежить нижче осі Ot, і спроектуємо її на вісь Ot: $t \in (-1; 3)$.

Далі, після зворотної заміни $t = x^9$ необхідно розв'язати умову $x^9 \in (-1; 3) \iff -1 < x^9 < 3$.

Приклади

Розв'язуючи подвійну нерівність $-1 < x^9 < 3$ графічним методом, знаходимо ту частину кривої $y = x^9$, яка розміщена в смузі між прямими $y = -1$ і $y = 3$:

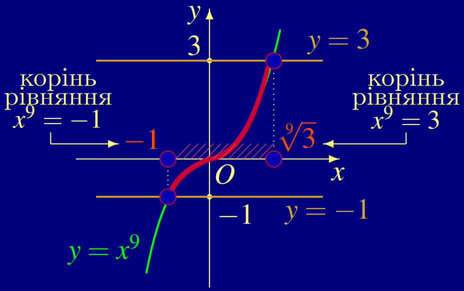


Проектуючи відмічену частину кривої на вісь Ox, знаходимо множину розв'язків подвійної нерівності:
$-1 < x^9 < 3 \iff x \in (-1; \sqrt[9]{3})$.

Відповідь: $x \in (-1; \sqrt[9]{3})$.

Приклади

Розв'язуючи подвійну нерівність $-1 < x^9 < 3$ графічним методом, знаходимо ту частину кривої $y = x^9$, яка розміщена в смузі між прямими $y = -1$ і $y = 3$:



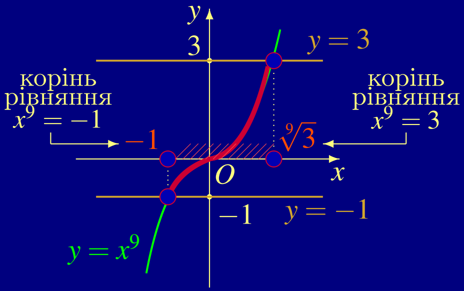
Проектуючи відмічену частину кривої на вісь Ox, знаходимо множину розв'язків подвійної нерівності:

$-1 < x^9 < 3 \iff x \in (-1; \sqrt[9]{3})$.

Відповідь: $x \in (-1; \sqrt[9]{3})$.

Приклади

Розв'язуючи подвійну нерівність $-1 < x^9 < 3$ графічним методом, знаходимо ту частину кривої $y = x^9$, яка розміщена в смузі між прямими $y = -1$ і $y = 3$:



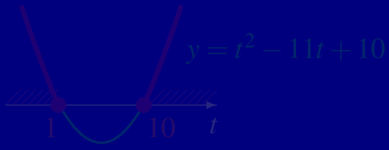
Проектуючи відмічену частину кривої на вісь Ox, знаходимо множину розв'язків подвійної нерівності:
$-1 < x^9 < 3 \iff x \in (-1; \sqrt[9]{3})$.

Відповідь: $x \in (-1; \sqrt[9]{3})$.

Приклади

Приклад 6. Розв'язати нерівність $x^4 - 11x^2 + 10 \geq 0$.

Розв'язання. Після заміни змінних $t = x^2$ отримаємо квадратну нерівність $t^2 - 11t + 10 \geq 0$, яку розв'яжемо графічним методом.



Відмітимо частини параболи $y = t^2 - 11t + 10$, які лежать вище осі Ot (включаючи точки $t = 1$ і $t = 10$) і спроектуємо їх на вісь Ot:
$t \in (-\infty, 1] \cup [10, \infty)$.

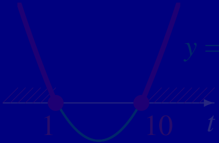
Далі, після зворотної заміни $t = x^2$ необхідно розв'язати умову

$$x^2 \in (-\infty, 1] \cup [10, \infty) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 \in (-\infty, 1], \\ x^2 \in [10, \infty), \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 \leq 1, \\ x^2 \geq 10. \end{array} \right.$$

Приклади

Приклад 6. Розв'язати нерівність $x^4 - 11x^2 + 10 \geq 0$.

Розв'язання. Після заміни змінних $t = x^2$ отримаємо квадратну нерівність $t^2 - 11t + 10 \geq 0$, яку розв'яжемо графічним методом.



Відмітимо частини параболи $y = t^2 - 11t + 10$, які лежать вище осі Ot (включаючи точки $t = 1$ і $t = 10$) і спроектуємо їх на вісь Ot:
$t \in (-\infty, 1] \cup [10, \infty)$.

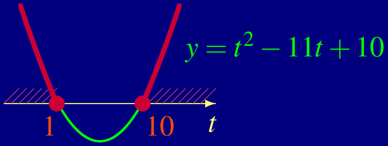
Далі, після зворотної заміни $t = x^2$ необхідно розв'язати умову

$$x^2 \in (-\infty, 1] \cup [10, \infty) \iff \left[\begin{array}{l} x^2 \in (-\infty, 1], \\ x^2 \in [10, \infty), \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} x^2 \leq 1, \\ x^2 \geq 10. \end{array} \right.$$

Приклади

Приклад 6. Розв'язати нерівність $x^4 - 11x^2 + 10 \geq 0$.

Розв'язання. Після заміни змінних $t = x^2$ отримаємо квадратну нерівність $t^2 - 11t + 10 \geq 0$, яку розв'яжемо графічним методом.



Відмітимо частини параболи $y = t^2 - 11t + 10$, які лежать вище осі Ot (включаючи точки $t = 1$ і $t = 10$) і спроектуємо їх на вісь Ot:

$t \in (-\infty, 1] \cup [10, \infty)$.

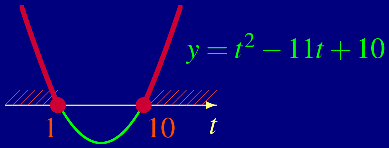
Далі, після зворотної заміни $t = x^2$ необхідно розв'язати умову

$$x^2 \in (-\infty, 1] \cup [10, \infty) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 \in (-\infty, 1], \\ x^2 \in [10, \infty), \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 \leq 1, \\ x^2 \geq 10. \end{array} \right.$$

Приклади

П р и к л а д 6. Розв'язати нерівність $x^4 - 11x^2 + 10 \geq 0$.

Р о з в' я з а н н я. Після заміни змінних $t = x^2$ отримаємо квадратну нерівність $t^2 - 11t + 10 \geq 0$, яку розв'яжемо графічним методом.



Відмітимо частини параболи $y = t^2 - 11t + 10$, які лежать вище осі Ot (включаючи точки $t = 1$ і $t = 10$) і спроектуємо їх на вісь Ot:
$t \in (-\infty, 1] \cup [10, \infty)$.

Далі, після зворотної заміни $t = x^2$ необхідно розв'язати умову

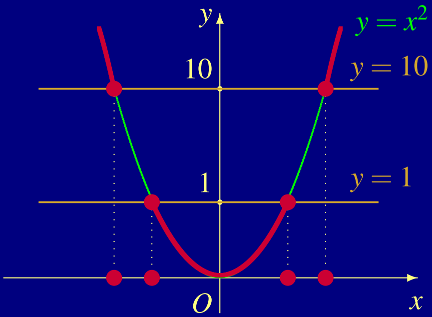
$$x^2 \in (-\infty, 1] \cup [10, \infty) \iff \left[\begin{array}{l} x^2 \in (-\infty, 1], \\ x^2 \in [10, \infty), \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} x^2 \leq 1, \\ x^2 \geq 10. \end{array} \right.$$

Приклади

Розв'язуючи сукупність нерівностей

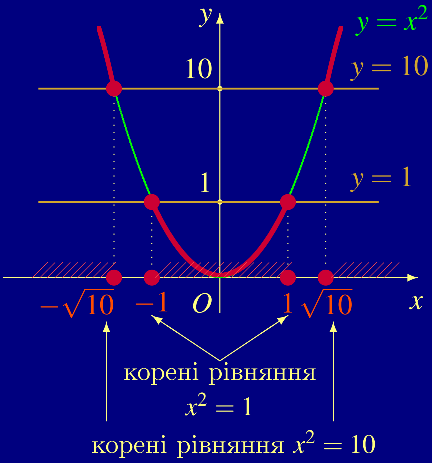
$$\left[\begin{array}{l} x^2 \leq 1, \\ x^2 \geq 10 \end{array}\right.$$

графічним методом, знаходимо ті частини параболи $y = x^2$, які розміщені поза смугою, обмеженою прямими $y = 1$ і $y = 10$:



Приклади

Проектуючи відмічені частини параболи на вісь Ox, знаходимо множину розв'язків початкової нерівності



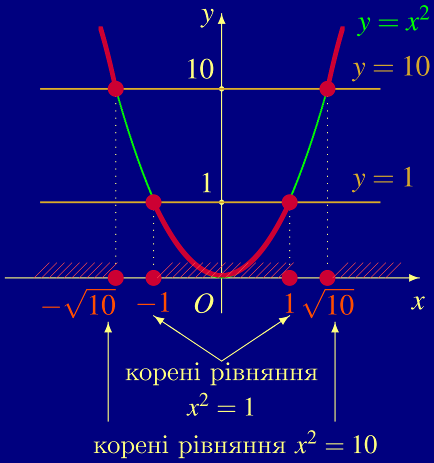
$$x^4 - 11x^2 + 10 \geq 0:$$

$$x \in (-\infty, -\sqrt{10}] \cup [-1; 1] \cup$$
$$\cup [\sqrt{10}, \infty) .$$

Відповідь: $x \in (-\infty, -\sqrt{10}] \cup [-1; 1] \cup [\sqrt{10}, \infty)$.

Приклади

Проектуючи відмічені частини параболи на вісь Ox, знаходимо множину розв'язків початкової нерівності



$$x^4 - 11x^2 + 10 \geq 0:$$

$$x \in (-\infty, -\sqrt{10}] \cup [-1; 1] \cup$$
$$\cup [\sqrt{10}, \infty).$$

Відповідь: $x \in (-\infty, -\sqrt{10}] \cup [-1; 1] \cup [\sqrt{10}, \infty)$.

Приклад із ЗНО

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.). Розв'яжіть рівняння $\big||2x-1|-3\big|=5$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має більше одного кореня, то у відповідь запишіть добуток усіх коренів.

Розв'язання. Після заміни $t=|2x-1|-3$ отримуємо рівняння $|t|=5 \Longleftrightarrow t=\pm 5.$
Далі після зворотної заміни необхідно розв'язати сукупність

$$\left[\begin{array}{l} |2x-1|-3=-5, \\ |2x-1|-3=5. \end{array}\right.$$

Виконуючи ще одну заміну змінних $z=2x-1$, отримуємо

$$\left[\begin{array}{l} |z|-3=-5, \\ |z|-3=5, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} |z|=-2, \\ |z|=8, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} z\in\varnothing, \\ z=\pm 8, \end{array}\right. \Longleftrightarrow z=\pm 8.$$

Приклад із ЗНО

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.). Розв'яжіть рівняння $\big||2x-1|-3\big| = 5$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має більше одного кореня, то у відповідь запишіть добуток усіх коренів.

Розв'язання. Після заміни $t = |2x-1|-3$ отримуємо рівняння $|t| = 5 \Longleftrightarrow t = \pm 5.$

Далі після зворотної заміни необхідно розв'язати сукупність

$$\left[\begin{array}{l} |2x-1|-3 = -5, \\ |2x-1|-3 = 5. \end{array}\right.$$

Виконуючи ще одну заміну змінних $z = 2x-1$, отримуємо

$$\left[\begin{array}{l} |z|-3 = -5, \\ |z|-3 = 5, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} |z| = -2, \\ |z| = 8, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} z \in \varnothing, \\ z = \pm 8, \end{array}\right. \Longleftrightarrow z = \pm 8.$$

Приклад із ЗНО

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.). Розв'яжіть рівняння $\big||2x-1|-3\big| = 5$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має більше одного кореня, то у відповідь запишіть добуток усіх коренів.

Розв'язання. Після заміни $t = |2x-1|-3$ отримуємо рівняння $|t| = 5 \Longleftrightarrow t = \pm 5$.
Далі після зворотної заміни необхідно розв'язати сукупність

$$\left[\begin{array}{l} |2x-1|-3 = -5, \\ |2x-1|-3 = 5. \end{array}\right.$$

Виконуючи ще одну заміну змінних $z = 2x-1$, отримуємо

$$\left[\begin{array}{l} |z|-3 = -5, \\ |z|-3 = 5, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} |z| = -2, \\ |z| = 8, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} z \in \varnothing, \\ z = \pm 8, \end{array}\right. \Longleftrightarrow z = \pm 8.$$

Приклад із ЗНО

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.). Розв'яжіть рівняння $\big||2x-1|-3\big|=5$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має більше одного кореня, то у відповідь запишіть добуток усіх коренів.

Розв'язання. Після заміни $t=|2x-1|-3$ отримуємо рівняння $|t|=5 \Longleftrightarrow t=\pm 5$.
Далі після зворотної заміни необхідно розв'язати сукупність

$$\left[\begin{array}{l} |2x-1|-3=-5, \\ |2x-1|-3=5. \end{array}\right.$$

Виконуючи ще одну заміну змінних $z=2x-1$, отримуємо

$$\left[\begin{array}{l} |z|-3=-5, \\ |z|-3=5, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} |z|=-2, \\ |z|=8, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} z\in\varnothing, \\ z=\pm 8, \end{array}\right. \Longleftrightarrow z=\pm 8.$$

Приклад із ЗНО

Нарешті, виконуючи зворотну заміну $z = 2x - 1$, будемо мати

$$z = \pm 8 \iff 2x - 1 = \pm 8 \iff \left[\begin{array}{l} 2x - 1 = -8, \\ 2x - 1 = 8, \end{array} \right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} 2x = -7, \\ 2x = 9, \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} x = -7/2, \\ x = 9/2. \end{array} \right.$$

Отже, задане рівняння має два корені: $x_1 = -7/2$, $x_2 = 9/2$.

Їх добуток $x_1 \cdot x_2 = -63/4 = -15,75$.

Відповідь: $-15,75$.

Приклад із ЗНО

Нарешті, виконуючи зворотну заміну $z = 2x - 1$, будемо мати

$$z = \pm 8 \iff 2x - 1 = \pm 8 \iff \left[\begin{array}{l} 2x - 1 = -8, \\ 2x - 1 = 8, \end{array} \right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} 2x = -7, \\ 2x = 9, \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} x = -7/2, \\ x = 9/2. \end{array} \right.$$

Отже, задане рівняння має два корені: $x_1 = -7/2$, $x_2 = 9/2$.

Їх добуток $x_1 \cdot x_2 = -63/4 = -15,75$.

Відповідь: $-15,75$.

Приклад із ЗНО

Нарешті, виконуючи зворотну заміну $z = 2x - 1$, будемо мати

$$z = \pm 8 \iff 2x - 1 = \pm 8 \iff \left[\begin{array}{l} 2x - 1 = -8, \\ 2x - 1 = 8, \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} 2x = -7, \\ 2x = 9, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = -7/2, \\ x = 9/2. \end{array}\right.$$

Отже, задане рівняння має два корені: $x_1 = -7/2$, $x_2 = 9/2$.
Їх добуток $x_1 \cdot x_2 = -63/4 = -15,75$.

Відповідь: $-15,75$.