Планіметрія-2: Метод введення допоміжної невідомої

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 6

Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Метод введення допоміжної невідомої

Розв'язання абсолютної більшості задач в шкільному курсі геометрії проводиться безпосереднім знаходженням шуканої величини в результаті деякого ланцюжка послідовних обчислень. Приклади таких задач розглянуто в уроці 5.

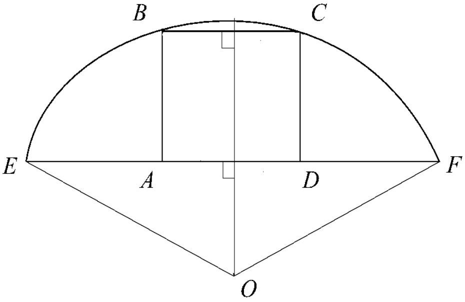
В той же час широкий клас складають задачі, розв'язання яких неможливо отримати вказаним безпосереднім обчисленням. Такі задачі (про знаходження параметрів геометричних фігур) можуть бути розв'язані методом введення допоміжної невідомої.

Розглянемо приклади, які ілюструють характерні особливості цього методу.

Метод введення допоміжної невідомої

Приклад 1. В сегмент круга радіуса R вписано квадрат. Знайти сторону квадрата, якщо дуга сегмента α, $\alpha < \pi$.

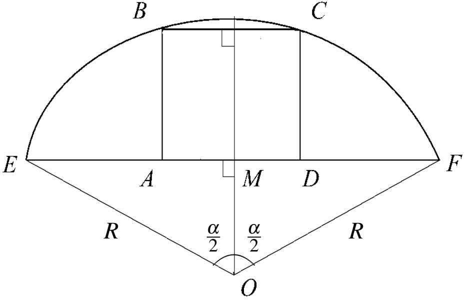
Розв'язання. Нехай вершини B і C квадрата розміщені на дузі сегмента, а вершини A і D – на хорді EF сегмента. Вписаний в сегмент квадрат $ABCD$ є симетричним відносно бісектриси центрального кута



EOF, на який спирається хорда EF (див. мал.).

Метод введення допоміжної невідомої

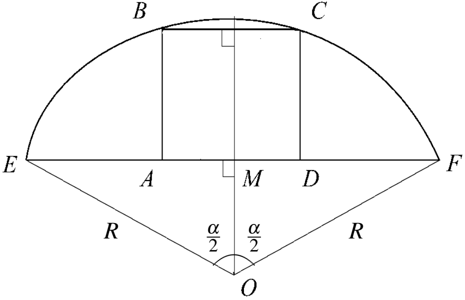
Нехай точка M – середина сторони AD. Зазначимо, що рівні між собою прямокутні трикутники EMO і FMO повністю визначені, оскільки в них задані гіпотенузи $EO = FO = R$ і кути $\angle EOM = \angle FOM = \alpha/2$.



Незважаючи на це, безпосереднє обчислення сторони квадрата AD здійснити не вдається, оскільки не вдається зв'язати цю сторону (або її половину AM) з деяким повністю визначеним трикутником.

Метод введення допоміжної невідомої

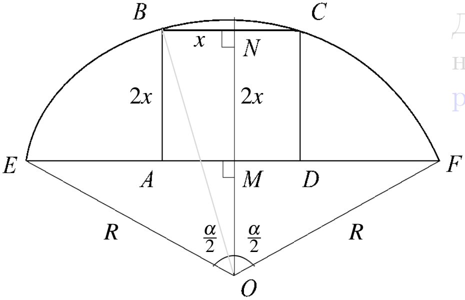
Нехай точка M – середина сторони AD. Зазначимо, що рівні між собою прямокутні трикутники EMO і FMO повністю визначені, оскільки в них задані гіпотенузи $EO = FO = R$ і кути $\angle EOM = \angle FOM = \alpha/2$.



Незважаючи на це, безпосереднє обчислення сторони квадрата AD здійснити не вдається, оскільки не вдається зв'язати цю сторону (або її половину AM) з деяким повністю визначеним трикутником.

Метод введення допоміжної невідомої

Застосуємо для розв'язання задачі метод введення допоміжної невідомої. Позначимо через x половину сторони квадрата, тобто $BN = x$, де N – середина сторони BC. Тоді $BC = AB = NM = 2x$.

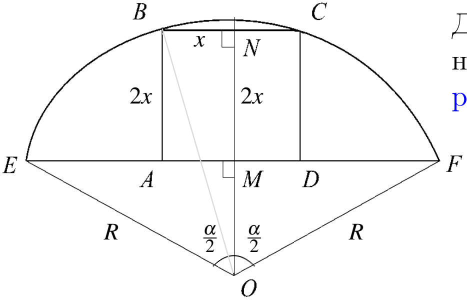


Для знаходження x необхідно скласти рівняння.

З цією метою розглянемо прямокутний трикутник BNO (в якому $\angle N = 90^\circ$, $OB = R$, $BN = x$), виразимо через x його невідому сторону NO і запишемо для нього теорему Піфагора.

Метод введення допоміжної невідомої

Застосуємо для розв'язання задачі метод введення допоміжної невідомої. Позначимо через x половину сторони квадрата, тобто $BN = x$, де N – середина сторони BC. Тоді $BC = AB = NM = 2x$.

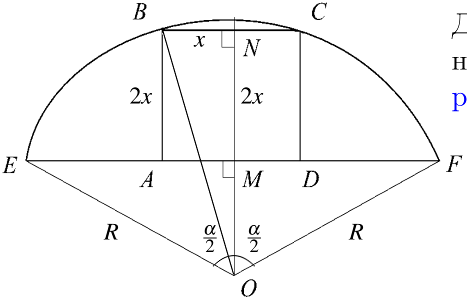


Для знаходження x необхідно скласти рівняння.

З цією метою розглянемо прямокутний трикутник BNO (в якому $\angle N = 90^\circ$, $OB = R$, $BN = x$), виразимо через x його невідому сторону NO і запишемо для нього теорему Піфагора.

Метод введення допоміжної невідомої

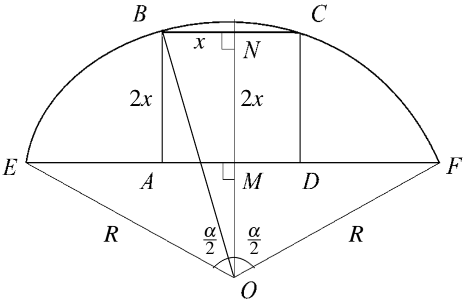
Застосуємо для розв'язання задачі метод введення допоміжної невідомої. Позначимо через x половину сторони квадрата, тобто $BN = x$, де N – середина сторони BC. Тоді $BC = AB = NM = 2x$.



Для знаходження x необхідно скласти рівняння.

З цією метою розглянемо прямокутний трикутник BNO (в якому $\angle N = 90^\circ$, $OB = R$, $BN = x$), виразимо через x його невідому сторону NO і запишемо для нього теорему Піфагора.

Метод введення допоміжної невідомої



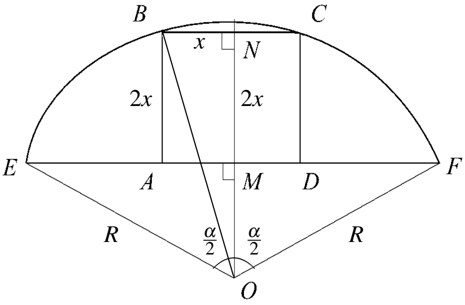
Маємо
$NO = NM + MO =$
$= 2x + MO.$
Відрізок MO є катетом повністю заданого $\triangle EMO$, в якому
$\frac{MO}{EO} = \cos(\alpha/2)$.

Звідси отримуємо вираз
$MO = EO \cdot \cos(\alpha/2) = R\cos(\alpha/2)$.
Отже, $NO = 2x + R\cos(\alpha/2)$.
Тепер, підставляючи вирази сторін трикутника BNO в рівність $BN^2 + NO^2 = OB^2$, отримуємо рівняння

$$x^2 + \left(2x + R\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 = R^2$$

для знаходження невідомої x.

Метод введення допоміжної невідомої



Маємо $NO = NM + MO = = 2x + MO$. Відрізок MO є катетом повністю заданого $\triangle EMO$, в якому $\frac{MO}{EO} = \cos(\alpha/2)$.

Звідси отримуємо вираз $MO = EO \cdot \cos(\alpha/2) = R\cos(\alpha/2)$.
Отже, $NO = 2x + R\cos(\alpha/2)$.
Тепер, підставляючи вирази сторін трикутника BNO в рівність $BN^2 + NO^2 = OB^2$, отримуємо рівняння

$$x^2 + \left(2x + R\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 = R^2$$

для знаходження невідомої x.

Метод введення допоміжної невідомої

Перетворимо отримане квадратне рівняння до стандартного вигляду:

$$x^2+\left(2x+R\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=R^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x^2+4xR\cos\frac{\alpha}{2}+R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}-R^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x^2+4R\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)x-R^2\left(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x^2+4R\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)x-R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}=0,$$

де в стандартних позначеннях $ax^2+bx+c=0$ маємо $a=5$, $b=4R\cos\frac{\alpha}{2}$, $c=-R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Оскільки b ділиться на 2, то запишемо четверту частину дискримінанта:

$$\frac{D}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=R^2\left(4\cos^2\frac{\alpha}{2}+5\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=R^2\left(4\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=R^2\left(4+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)>0.$$

Отже, квадратне рівняння має два корені:

$$x=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{D}{4}}}{a}=\frac{R}{5}\left(-2\cos\frac{\alpha}{2}\pm\sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right),$$ тобто

Метод введення допоміжної невідомої

Перетворимо отримане квадратне рівняння до стандартного вигляду:

$x^2+\left(2x+R\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=R^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ x^2+4x^2+4xR\cos\frac{\alpha}{2}+R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}-R^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 5x^2+4R\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)x-R^2\left(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 5x^2+4R\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)x-R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}=0$,

де в стандартних позначеннях $ax^2+bx+c=0$ маємо $a=5$, $b=4R\cos\frac{\alpha}{2}$, $c=-R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Оскільки b ділиться на 2, то запишемо четверту частину дискримінанта:

$$\frac{D}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=R^2\left(4\cos^2\frac{\alpha}{2}+5\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=R^2\left(4\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=R^2\left(4+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)>0\,.$$

Отже, квадратне рівняння має два корені:

$x=\dfrac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{D}{4}}}{a}=\frac{R}{5}\left(-2\cos\frac{\alpha}{2}\pm\sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right)$, тобто

Метод введення допоміжної невідомої

Перетворимо отримане квадратне рівняння до стандартного вигляду:

$x^2+\left(2x+R\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=R^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ x^2+4x^2+4xR\cos\frac{\alpha}{2}+R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}-R^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 5x^2+4R\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)x-R^2\left(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 5x^2+4R\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)x-R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}=0$,

де в стандартних позначеннях $ax^2+bx+c=0$ маємо $a=5$, $b=4R\cos\frac{\alpha}{2}$, $c=-R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Оскільки b ділиться на 2, то запишемо четверту частину дискримінанта:

$\frac{D}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=R^2\left(4\cos^2\frac{\alpha}{2}+5\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=$

$=R^2\left(4\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=R^2\left(4+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)>0$.

Отже, квадратне рівняння має два корені:

$x=\dfrac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{D}{4}}}{a}=\frac{R}{5}\left(-2\cos\frac{\alpha}{2}\pm\sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right)$, тобто

Метод введення допоміжної невідомої

$x_1 = \frac{R}{5}\left(-2\cos\frac{\alpha}{2} - \sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right) < 0$

(не підходить за змістом задачі, оскільки сторона квадрата повинна виражатися додатнім числом),

$x_2 = \frac{R}{5}\left(-2\cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right) > 0.$

Отже, шукана сторона квадрата

$AB = 2x = \frac{2R}{5}\left(\sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 2\cos\frac{\alpha}{2}\right).$

Відповідь: $\frac{2R}{5}\left(\sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 2\cos\frac{\alpha}{2}\right).$

У якості невідомої x часто використовується шукана величина. В той же час, введена невідома може відігравати допоміжну роль; в цьому випадку після розв'язання рівняння розв'язання задачі необхідно продовжити.

Метод введення допоміжної невідомої

$x_1 = \frac{R}{5}\left(-2\cos\frac{\alpha}{2} - \sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right) < 0$

(не підходить за змістом задачі, оскільки сторона квадрата повинна виражатися додатнім числом),

$x_2 = \frac{R}{5}\left(-2\cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right) > 0.$

Отже, шукана сторона квадрата

$AB = 2x = \frac{2R}{5}\left(\sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 2\cos\frac{\alpha}{2}\right).$

Відповідь: $\frac{2R}{5}\left(\sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 2\cos\frac{\alpha}{2}\right).$

У якості невідомої x часто використовується шукана величина. В той же час, введена невідома може відігравати допоміжну роль; в цьому випадку після розв'язання рівняння розв'язання задачі необхідно продовжити.

Метод введення допоміжної невідомої

$x_1 = \frac{R}{5}\left(-2\cos\frac{\alpha}{2} - \sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right) < 0$

(не підходить за змістом задачі, оскільки сторона квадрата повинна виражатися додатнім числом),

$x_2 = \frac{R}{5}\left(-2\cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right) > 0.$

Отже, шукана сторона квадрата

$AB = 2x = \frac{2R}{5}\left(\sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 2\cos\frac{\alpha}{2}\right).$

Відповідь: $\frac{2R}{5}\left(\sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 2\cos\frac{\alpha}{2}\right).$

У якості невідомої x часто використовується шукана величина. В той же час, введена невідома може відігравати допоміжну роль; в цьому випадку після розв'язання рівняння розв'язання задачі необхідно продовжити.

Метод введення допоміжної невідомої

$$x_1 = \frac{R}{5}\left(-2\cos\frac{\alpha}{2} - \sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right) < 0$$

(не підходить за змістом задачі, оскільки сторона квадрата повинна виражатися додатнім числом),

$$x_2 = \frac{R}{5}\left(-2\cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right) > 0.$$

Отже, шукана сторона квадрата

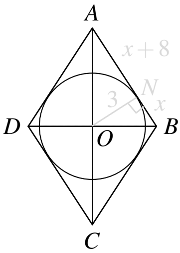
$$AB = 2x = \frac{2R}{5}\left(\sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 2\cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Відповідь: $\frac{2R}{5}\left(\sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 2\cos\frac{\alpha}{2}\right)$.

У якості невідомої x часто використовується шукана величина. В той же час, введена невідома може відігравати допоміжну роль; в цьому випадку після розв'язання рівняння розв'язання задачі необхідно продовжити.

Метод введення допоміжної невідомої

Крім теореми Піфагора при складанні рівняння можуть використовуватися і інші визначні властивості трикутників.



Приклад 2. Точка дотику вписаного в ромб кола, довжина якого 6π см, ділить сторону ромба на відрізки, різниця яких дорівнює 8 см. Знайти площу ромба.

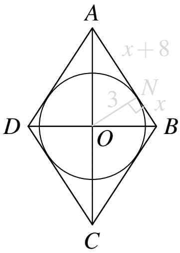
Розв'язання. Перш за все, знаходимо радіус r вписаного кола: $6\pi = 2\pi r \Leftrightarrow r = 3$ см.

Оскільки в точці дотику N сторона ромба AB перпендикулярна до радіуса ON, то ON є висотою прямокутного трикутника AOB, при цьому $ON = 3$ см.

Використаємо умову $AN - NB = 8$ для введення невідомої x. Нехай $NB = x$. Тоді $AN = x + 8$.

Метод введення допоміжної невідомої

Крім теореми Піфагора при складанні рівняння можуть використовуватися і інші визначні властивості трикутників.



Приклад 2. Точка дотику вписаного в ромб кола, довжина якого 6π см, ділить сторону ромба на відрізки, різниця яких дорівнює 8 см. Знайти площу ромба.

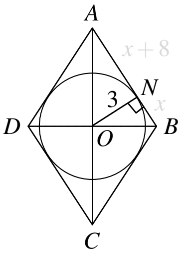
Розв'язання. Перш за все, знаходимо радіус r вписаного кола: $6\pi = 2\pi r \Leftrightarrow r = 3$ см.

Оскільки в точці дотику N сторона ромба AB перпендикулярна до радіуса ON, то ON є висотою прямокутного трикутника AOB, при цьому $ON = 3$ см.

Використаємо умову $AN - NB = 8$ для введення невідомої x. Нехай $NB = x$. Тоді $AN = x + 8$.

Метод введення допоміжної невідомої

Крім теореми Піфагора при складанні рівняння можуть використовуватися і інші визначні властивості трикутників.



Приклад 2. Точка дотику вписаного в ромб кола, довжина якого 6π см, ділить сторону ромба на відрізки, різниця яких дорівнює 8 см. Знайти площу ромба.

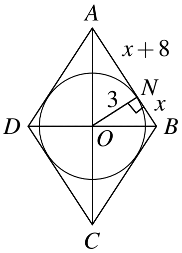
Розв'язання. Перш за все, знаходимо радіус r вписаного кола: $6\pi = 2\pi r \Leftrightarrow r = 3$ см.

Оскільки в точці дотику N сторона ромба AB перпендикулярна до радіуса ON, то ON є висотою прямокутного трикутника AOB, при цьому $ON = 3$ см.

Використаємо умову $AN - NB = 8$ для введення невідомої x. Нехай $NB = x$. Тоді $AN = x + 8$.

Метод введення допоміжної невідомої

Крім теореми Піфагора при складанні рівняння можуть використовуватися і інші визначні властивості трикутників.



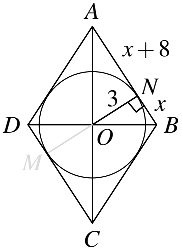
Приклад 2. Точка дотику вписаного в ромб кола, довжина якого 6π см, ділить сторону ромба на відрізки, різниця яких дорівнює 8 см. Знайти площу ромба.

Розв'язання. Перш за все, знаходимо радіус r вписаного кола: $6\pi = 2\pi r \Leftrightarrow r = 3$ см.

Оскільки в точці дотику N сторона ромба AB перпендикулярна до радіуса ON, то ON є висотою прямокутного трикутника AOB, при цьому $ON = 3$ см.

Використаємо умову $AN - NB = 8$ для введення невідомої x. Нехай $NB = x$. Тоді $AN = x + 8$.

Метод введення допоміжної невідомої



Записуючи властивість висоти трикутника AOB, проведеної до гіпотенузи:

$\frac{AN}{ON} = \frac{ON}{NB}$, і підставляючи в цю рівність вирази відповідних відрізків, отримуємо рівняння:

$$\frac{x+8}{3} = \frac{3}{x} \Leftrightarrow x(x+8) = 9 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -9, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

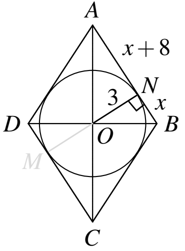
Оскільки довжина відрізка повинна виражатися додатнім числом, тобто $x > 0$, то $x = 1$.

Тепер знаходимо площу ромба як площу паралелограма: $S = ah$, де основа ромба $a = AB = x + (x+8) = 10$ см, а висота $h = NM = 2r = 6$ см.

Отже, $S = 10 \cdot 6 = 60$ см^2.

Відповідь: 60 см^2.

Метод введення допоміжної невідомої



Записуючи властивість висоти трикутника AOB, проведеної до гіпотенузи: $\frac{AN}{ON} = \frac{ON}{NB}$, і підставляючи в цю рівність вирази відповідних відрізків, отримуємо рівняння:

$$\frac{x+8}{3} = \frac{3}{x} \Leftrightarrow x(x+8) = 9 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -9, \\ x = 1. \end{array} \right.$$

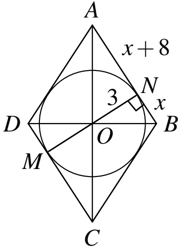
Оскільки довжина відрізка повинна виражатися додатнім числом, тобто $x > 0$, то $x = 1$.

Тепер знаходимо площу ромба як площу паралелограма: $S = ah$, де основа ромба $a = AB = x + (x+8) = 10$ см, а висота $h = NM = 2r = 6$ см.

Отже, $S = 10 \cdot 6 = 60$ см^2.

Відповідь: 60 см^2.

Метод введення допоміжної невідомої



Записуючи властивість висоти трикутника AOB, проведеної до гіпотенузи:
$\frac{AN}{ON} = \frac{ON}{NB}$, і підставляючи в цю рівність вирази відповідних відрізків, отримуємо рівняння:

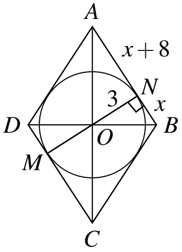
$$\frac{x+8}{3} = \frac{3}{x} \Leftrightarrow x(x+8) = 9 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -9, \\ x = 1. \end{array} \right.$$

Оскільки довжина відрізка повинна виражатися додатнім числом, тобто $x > 0$, то $x = 1$.
Тепер знаходимо площу ромба як площу паралелограма: $S = ah$, де основа ромба $a = AB = x + (x+8) = 10$ см, а висота $h = NM = 2r = 6$ см.
Отже, $S = 10 \cdot 6 = 60$ см^2.

Відповідь: 60 см^2.

Метод введення допоміжної невідомої



Записуючи властивість висоти трикутника AOB, проведеної до гіпотенузи: $\frac{AN}{ON} = \frac{ON}{NB}$, і підставляючи в цю рівність вирази відповідних відрізків, отримуємо рівняння:

$$\frac{x+8}{3} = \frac{3}{x} \Leftrightarrow x(x+8) = 9 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -9, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

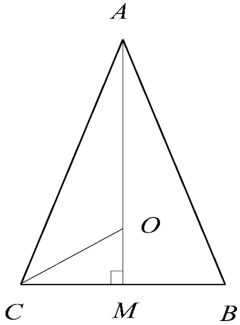
Оскільки довжина відрізка повинна виражатися додатнім числом, тобто $x > 0$, то $x = 1$.

Тепер знаходимо площу ромба як площу паралелограма: $S = ah$, де основа ромба $a = AB = x + (x+8) = 10$ см, а висота $h = NM = 2r = 6$ см.

Отже, $S = 10 \cdot 6 = 60$ см^2.

Відповідь: 60 см^2.

Метод введення допоміжної невідомої



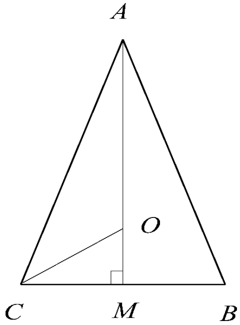
П р и к л а д 3. В рівнобедреному трикутнику бісектриса кута при основі ділить висоту, проведену до основи, у відношенні 5 : 13. Середина основи віддалена від бічної сторони на відстань 30/13 см. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника.

Р о з в' я з а н н я. Нехай BC – основа трикутника ABC, M – середина основи BC, а O – точка перетину бісектриси кута C і висоти AM.

За основною властивістю бісектриси CO трикутника AMC маємо $\frac{MO}{OA} = \frac{CM}{AC} < 1$, тому $\frac{CM}{AC} = \frac{MO}{OA} = \frac{5}{13}$.

Використаємо відношення $CM : AC = 5 : 13$ для введення невідомої x.

Метод введення допоміжної невідомої



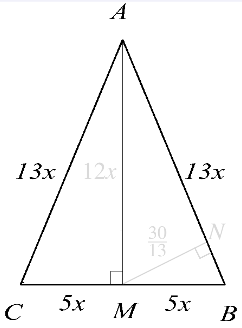
Приклад 3. В рівнобедреному трикутнику бісектриса кута при основі ділить висоту, проведену до основи, у відношенні $5:13$. Середина основи віддалена від бічної сторони на відстань $30/13$ см. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника.

Розв'язання. Нехай BC – основа трикутника ABC, M – середина основи BC, а O – точка перетину бісектриси кута C і висоти AM.

За основною властивістю бісектриси CO трикутника AMC маємо $\frac{MO}{OA} = \frac{CM}{AC} < 1$, тому $\frac{CM}{AC} = \frac{MO}{OA} = \frac{5}{13}$.

Використаємо відношення $CM : AC = 5 : 13$ для введення невідомої x.

Метод введення допоміжної невідомої



Нехай $CM = MB = 5x$, $AC = AB = 13x$.

Тоді за теоремою Піфагора $AM = \sqrt{(13x)^2 - (5x)^2} = 12x$.

Крім того, висота MN трикутника AMB, проведена до гіпотенузи, дорівнює 30/13 см. Записуючи вирази площі трикутника AMB двома способами, отримуємо рівняння для знаходження невідомої x:

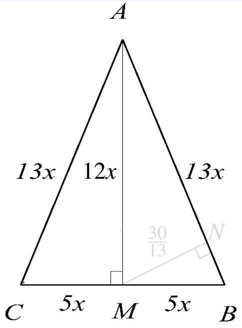
$$\frac{1}{2}MB \cdot MA = \frac{1}{2}AB \cdot MN \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}5x \cdot 12x = \frac{1}{2}13x \cdot \frac{30}{13} \;\Leftrightarrow\; x = 1/2.$$

Знайдемо тепер радіус описаного кола R за формулою $R = \frac{AB}{2\sin\angle C}$, де $AB = 13x = 13/2$, $\sin\angle C = \frac{AM}{AC} = \frac{12x}{13x} = \frac{12}{13}$.

У такий спосіб отримаємо $R = \frac{\frac{13}{2}}{2\cdot\frac{12}{13}} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{24}{13}} = \frac{13}{2} \cdot \frac{13}{24} = \frac{169}{48}$.

Відповідь: $R = 169/48$ см.

Метод введення допоміжної невідомої



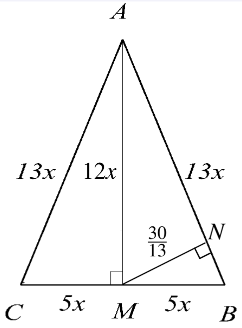
Нехай $CM = MB = 5x$, $AC = AB = 13x$.
Тоді за теоремою Піфагора
$AM = \sqrt{(13x)^2 - (5x)^2} = 12x$.
Крім того, висота MN трикутника AMB, проведена до гіпотенузи, дорівнює 30/13 см. Записуючи вирази площі трикутника AMB двома способами, отримуємо рівняння для знаходження невідомої x:

$$\frac{1}{2}MB \cdot MA = \frac{1}{2}AB \cdot MN \Leftrightarrow \frac{1}{2}5x \cdot 12x = \frac{1}{2}13x \cdot \frac{30}{13} \Leftrightarrow x = 1/2.$$

Знайдемо тепер радіус описаного кола R за формулою $R = \frac{AB}{2\sin\angle C}$, де $AB = 13x = 13/2$, $\sin\angle C = \frac{AM}{AC} = \frac{12x}{13x} = \frac{12}{13}$.
У такий спосіб отримаємо $R = \frac{\frac{13}{2}}{2\cdot\frac{12}{13}} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{24}{13}} = \frac{13}{2} \cdot \frac{13}{24} = \frac{169}{48}$.

Відповідь: $R = 169/48$ см.

Метод введення допоміжної невідомої



Нехай $CM = MB = 5x$, $AC = AB = 13x$. Тоді за теоремою Піфагора $AM = \sqrt{(13x)^2 - (5x)^2} = 12x$. Крім того, висота MN трикутника AMB, проведена до гіпотенузи, дорівнює $30/13$ см. Записуючи вирази площі трикутника AMB двома способами, отримуємо рівняння для знаходження невідомої x:

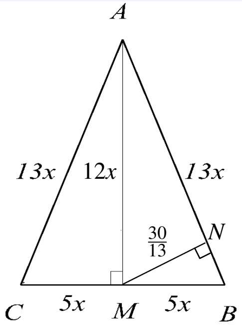
$$\frac{1}{2} MB \cdot MA = \frac{1}{2} AB \cdot MN \Leftrightarrow \frac{1}{2} 5x \cdot 12x = \frac{1}{2} 13x \cdot \frac{30}{13} \Leftrightarrow x = 1/2.$$

Знайдемо тепер радіус описаного кола R за формулою $R = \frac{AB}{2\sin\angle C}$, де $AB = 13x = 13/2$, $\sin\angle C = \frac{AM}{AC} = \frac{12x}{13x} = \frac{12}{13}$.

У такий спосіб отримаємо $R = \frac{\frac{13}{2}}{2\cdot\frac{12}{13}} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{24}{13}} = \frac{13}{2} \cdot \frac{13}{24} = \frac{169}{48}$.

Відповідь: $R = 169/48$ см.

Метод введення допоміжної невідомої



Нехай $CM = MB = 5x$, $AC = AB = 13x$. Тоді за теоремою Піфагора $AM = \sqrt{(13x)^2 - (5x)^2} = 12x$. Крім того, висота MN трикутника AMB, проведена до гіпотенузи, дорівнює $30/13$ см. Записуючи вирази площі трикутника AMB двома способами, отримуємо рівняння для знаходження невідомої x:

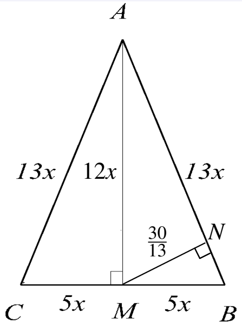
$$\frac{1}{2}MB\cdot MA = \frac{1}{2}AB\cdot MN \Leftrightarrow \frac{1}{2}5x\cdot 12x = \frac{1}{2}13x\cdot\frac{30}{13} \Leftrightarrow x = 1/2.$$

Знайдемо тепер радіус описаного кола R за формулою $R = \frac{AB}{2\sin\angle C}$, де $AB = 13x = 13/2$, $\sin\angle C = \frac{AM}{AC} = \frac{12x}{13x} = \frac{12}{13}$.

У такий спосіб отримаємо $R = \frac{\frac{13}{2}}{2\cdot\frac{12}{13}} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{24}{13}} = \frac{13}{2}\cdot\frac{13}{24} = \frac{169}{48}$.

Відповідь: $R = 169/48$ см.

Метод введення допоміжної невідомої



Нехай $CM = MB = 5x$, $AC = AB = 13x$.
Тоді за теоремою Піфагора
$AM = \sqrt{(13x)^2 - (5x)^2} = 12x$.
Крім того, висота MN трикутника AMB, проведена до гіпотенузи, дорівнює $30/13$ см. Записуючи вирази площі трикутника AMB двома способами, отримуємо рівняння для знаходження невідомої x:

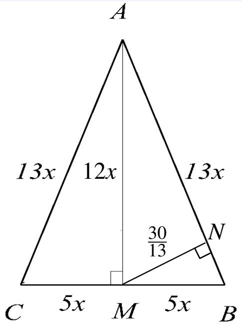
$$\frac{1}{2}MB \cdot MA = \frac{1}{2}AB \cdot MN \Leftrightarrow \frac{1}{2}5x \cdot 12x = \frac{1}{2}13x \cdot \frac{30}{13} \Leftrightarrow x = 1/2.$$

Знайдемо тепер радіус описаного кола R за формулою $R = \frac{AB}{2\sin\angle C}$, де $AB = 13x = 13/2$, $\sin\angle C = \frac{AM}{AC} = \frac{12x}{13x} = \frac{12}{13}$.

У такий спосіб отримаємо $R = \frac{\frac{13}{2}}{2\cdot\frac{12}{13}} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{24}{13}} = \frac{13}{2} \cdot \frac{13}{24} = \frac{169}{48}$.

Відповідь: $R = 169/48$ см.

Метод введення допоміжної невідомої



Нехай $CM = MB = 5x$, $AC = AB = 13x$. Тоді за теоремою Піфагора $AM = \sqrt{(13x)^2 - (5x)^2} = 12x$. Крім того, висота MN трикутника AMB, проведена до гіпотенузи, дорівнює $30/13$ см. Записуючи вирази площі трикутника AMB двома способами, отримуємо рівняння для знаходження невідомої x:

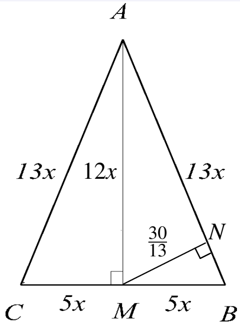
$$\frac{1}{2}MB \cdot MA = \frac{1}{2}AB \cdot MN \Leftrightarrow \frac{1}{2}5x \cdot 12x = \frac{1}{2}13x \cdot \frac{30}{13} \Leftrightarrow x = 1/2.$$

Знайдемо тепер радіус описаного кола R за формулою $R = \frac{AB}{2\sin\angle C}$, де $AB = 13x = 13/2$, $\sin\angle C = \frac{AM}{AC} = \frac{12x}{13x} = \frac{12}{13}$.

У такий спосіб отримаємо $R = \frac{\frac{13}{2}}{2\cdot\frac{12}{13}} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{24}{13}} = \frac{13}{2} \cdot \frac{13}{24} = \frac{169}{48}$.

Відповідь: $R = 169/48$ см.

Метод введення допоміжної невідомої



Нехай $CM = MB = 5x$, $AC = AB = 13x$. Тоді за теоремою Піфагора $AM = \sqrt{(13x)^2 - (5x)^2} = 12x$. Крім того, висота MN трикутника AMB, проведена до гіпотенузи, дорівнює $30/13$ см. Записуючи вирази площі трикутника AMB двома способами, отримуємо рівняння для знаходження невідомої x:

$$\frac{1}{2}MB \cdot MA = \frac{1}{2}AB \cdot MN \Leftrightarrow \frac{1}{2}5x \cdot 12x = \frac{1}{2}13x \cdot \frac{30}{13} \Leftrightarrow x = 1/2.$$

Знайдемо тепер радіус описаного кола R за формулою $R = \frac{AB}{2\sin\angle C}$, де $AB = 13x = 13/2$, $\sin\angle C = \frac{AM}{AC} = \frac{12x}{13x} = \frac{12}{13}$.

У такий спосіб отримаємо $R = \frac{\frac{13}{2}}{2\cdot\frac{12}{13}} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{24}{13}} = \frac{13}{2}\cdot\frac{13}{24} = \frac{169}{48}$.

Відповідь: $R = 169/48$ см.

Метод введення допоміжної невідомої

Щоб отримати рівняння для знаходження допоміжної невідомої x, часто виражають через x задану в умові задачі величину.

Приклад 4. Периметр прямокутного трикутника дорівнює P, а один з гострих кутів α. Знайти радіус кола, вписаного в трикутник.

Розв'язання. Позначимо через x гіпотенузу, тобто $AB = x$.

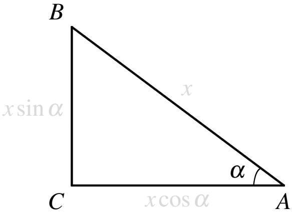
Тоді прилеглий катет $AC = x\cos\alpha$,
а протилежний катет $BC = x\sin\alpha$.

Щоб отримати рівняння для знаходження невідомої x, виразимо через x заданий в умові задачі периметр трикутника: $P = x + x\sin\alpha + x\cos\alpha \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x(1+\sin\alpha+\cos\alpha) = P \Leftrightarrow x = \frac{P}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}.$$

Метод введення допоміжної невідомої

Щоб отримати рівняння для знаходження допоміжної невідомої x, часто виражають через x задану в умові задачі величину.



Приклад 4. Периметр прямокутного трикутника дорівнює P, а один з гострих кутів α. Знайти радіус кола, вписаного в трикутник.

Розв'язання. Позначимо через x гіпотенузу, тобто $AB = x$.

Тоді прилеглий катет $AC = x\cos\alpha$,

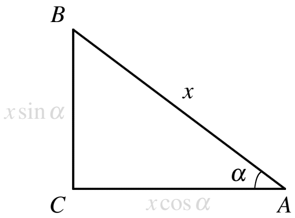
а протилежний катет $BC = x\sin\alpha$.

Щоб отримати рівняння для знаходження невідомої x, виразимо через x заданий в умові задачі периметр трикутника: $P = x + x\sin\alpha + x\cos\alpha \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x(1+\sin\alpha+\cos\alpha) = P \Leftrightarrow x = \frac{P}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}.$$

Метод введення допоміжної невідомої

Щоб отримати рівняння для знаходження допоміжної невідомої x, часто виражають через x задану в умові задачі величину.



Приклад 4. Периметр прямокутного трикутника дорівнює P, а один з гострих кутів α. Знайти радіус кола, вписаного в трикутник.

Розв'язання. Позначимо через x гіпотенузу, тобто $AB = x$.

Тоді прилеглий катет $AC = x\cos\alpha$,

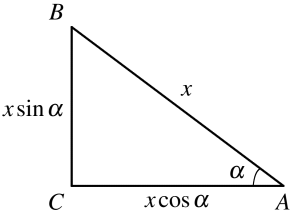
а протилежний катет $BC = x\sin\alpha$.

Щоб отримати рівняння для знаходження невідомої x, виразимо через x заданий в умові задачі периметр трикутника: $P = x + x\sin\alpha + x\cos\alpha \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x(1+\sin\alpha+\cos\alpha) = P \Leftrightarrow x = \frac{P}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}.$$

Метод введення допоміжної невідомої

Щоб отримати рівняння для знаходження допоміжної невідомої x, часто виражають через x задану в умові задачі величину.



Приклад 4. Периметр прямокутного трикутника дорівнює P, а один з гострих кутів α. Знайти радіус кола, вписаного в трикутник.

Розв'язання. Позначимо через x гіпотенузу, тобто $AB = x$.

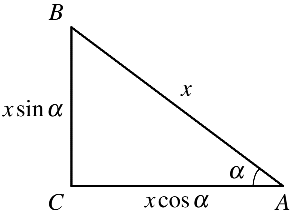
Тоді прилеглий катет $AC = x\cos\alpha$,
а протилежний катет $BC = x\sin\alpha$.

Щоб отримати рівняння для знаходження невідомої x, виразимо через x заданий в умові задачі периметр трикутника: $P = x + x\sin\alpha + x\cos\alpha \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x(1+\sin\alpha+\cos\alpha) = P \Leftrightarrow x = \frac{P}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}.$$

Метод введення допоміжної невідомої

Щоб отримати рівняння для знаходження допоміжної невідомої x, часто виражають через x задану в умові задачі величину.



Приклад 4. Периметр прямокутного трикутника дорівнює P, а один з гострих кутів α. Знайти радіус кола, вписаного в трикутник.

Розв'язання. Позначимо через x гіпотенузу, тобто $AB = x$.

Тоді прилеглий катет $AC = x\cos\alpha$,

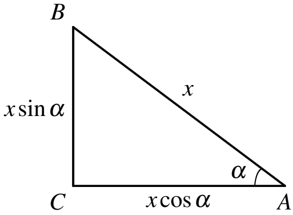
а протилежний катет $BC = x\sin\alpha$.

Щоб отримати рівняння для знаходження невідомої x, виразимо через x заданий в умові задачі периметр трикутника: $P = x + x\sin\alpha + x\cos\alpha \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x(1+\sin\alpha+\cos\alpha) = P \Leftrightarrow x = \frac{P}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}.$$

Метод введення допоміжної невідомої

Щоб отримати рівняння для знаходження допоміжної невідомої x, часто виражають через x задану в умові задачі величину.



Приклад 4. Периметр прямокутного трикутника дорівнює P, а один з гострих кутів α. Знайти радіус кола, вписаного в трикутник.

Розв'язання. Позначимо через x гіпотенузу, тобто $AB = x$.

Тоді прилеглий катет $AC = x\cos\alpha$,
а протилежний катет $BC = x\sin\alpha$.

Щоб отримати рівняння для знаходження невідомої x, виразимо через x заданий в умові задачі периметр трикутника: $P = x + x\sin\alpha + x\cos\alpha \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x(1+\sin\alpha+\cos\alpha) = P \Leftrightarrow x = \frac{P}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}.$$

Метод введення допоміжної невідомої

Тепер, використовуючи формулу для радіуса кола, вписаного в прямокутний трикутник: $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, де a, b – катети і c – гіпотенуза, виразимо через x шуканий радіус, а потім підставимо в отриманий вираз знайдене значення $x = \dfrac{P}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$:

$$r = \frac{x\sin\alpha + x\cos\alpha - x}{2} = \frac{1}{2}x(\sin\alpha+\cos\alpha-1) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{P}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}(\sin\alpha+\cos\alpha-1).$$

Відповідь: $r = \dfrac{P(\sin\alpha+\cos\alpha-1)}{2(1+\sin\alpha+\cos\alpha)}$.

Метод введення допоміжної невідомої

Тепер, використовуючи формулу для радіуса кола, вписаного в прямокутний трикутник: $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, де a, b – катети і c – гіпотенуза, виразимо через x шуканий радіус, а потім підставимо в отриманий вираз знайдене значення $x = \dfrac{P}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$:

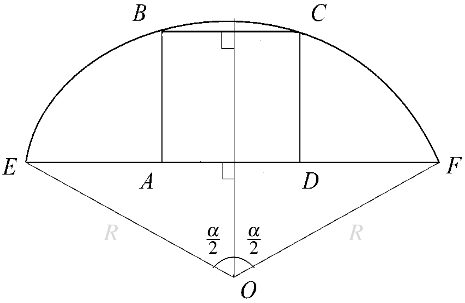
$$r = \frac{x\sin\alpha + x\cos\alpha - x}{2} = \frac{1}{2}x(\sin\alpha+\cos\alpha-1) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{P}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}(\sin\alpha+\cos\alpha-1).$$

Відповідь: $r = \dfrac{P(\sin\alpha+\cos\alpha-1)}{2(1+\sin\alpha+\cos\alpha)}$.

Метод введення допоміжної невідомої

П р и к л а д 5. В сегмент круга вписано квадрат. Визначити відношення площі квадрата до площі сегмента, якщо дуга сегмента α, $\alpha < \pi$.



Р о з в' я з а н н я. Перш за все, зауважимо, що в умові задачі не задано жодної лінійної величини.

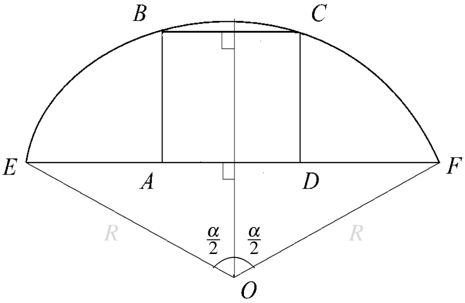
Позначимо через R радіус круга, тобто $OE = OF = R$.

Площа сегмента виражається через R:

$S_{\text{сегм}} = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin\alpha)$.

Метод введення допоміжної невідомої

П р и к л а д 5. В сегмент круга вписано квадрат. Визначити відношення площі квадрата до площі сегмента, якщо дуга сегмента α, $\alpha < \pi$.



Р о з в' я з а н н я. Перш за все, зауважимо, що в умові задачі не задано жодної лінійної величини.

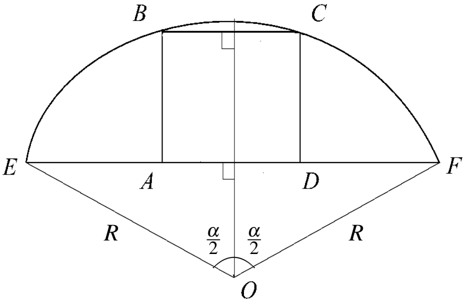
Позначимо через R радіус круга, тобто $OE = OF = R$.

Площа сегмента виражається через R:

$S_{\text{сегм}} = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin\alpha)$.

Метод введення допоміжної невідомої

Приклад 5. В сегмент круга вписано квадрат. Визначити відношення площі квадрата до площі сегмента, якщо дуга сегмента α, $\alpha < \pi$.



Розв'язання. Перш за все, зауважимо, що в умові задачі не задано жодної лінійної величини.

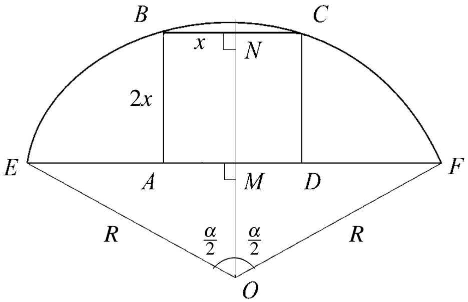
Позначимо через R радіус круга, тобто $OE = OF = R$.

Площа сегмента виражається через R:

$S_{\text{сегм}} = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin\alpha)$.

Метод введення допоміжної невідомої

Потім позначимо $x = BN$, де N – середина сторони BC.
Тоді сторона квадрата $BC = AB = 2x$.



Тепер виразимо x через R, склавши і розв'язавши рівняння так, як це зроблено в прикладі 1.

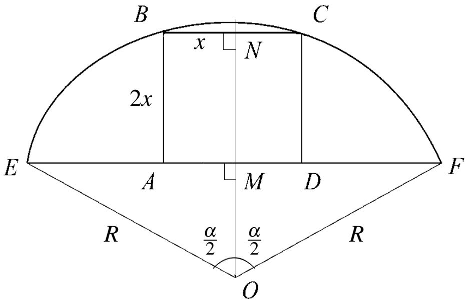
Скористаємось розв'язком, знайденим в прикладі 1:
$x = \frac{R}{5}\left(\sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 2\cos\frac{\alpha}{2}\right)$.

Тепер площа квадрата, як і площа сегмента, виражається через R:

$S_{\text{КВ}} = 4x^2 = \frac{4}{25}R^2\left(\sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$.

Метод введення допоміжної невідомої

Потім позначимо $x = BN$, де N – середина сторони BC. Тоді сторона квадрата $BC = AB = 2x$.



Тепер виразимо x через R, склавши і розв'язавши рівняння так, як це зроблено в прикладі 1.

Скористаємось розв'язком, знайденим в прикладі 1:

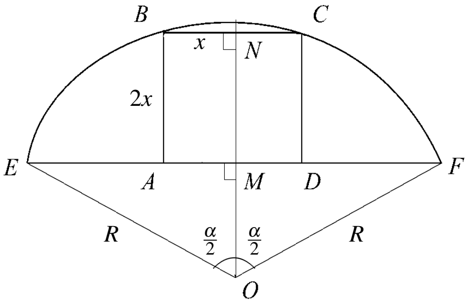
$x = \frac{R}{5}\left(\sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 2\cos\frac{\alpha}{2}\right).$

Тепер площа квадрата, як і площа сегмента, виражається через R:

$S_{\text{КВ}} = 4x^2 = \frac{4}{25}R^2\left(\sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2.$

Метод введення допоміжної невідомої

Потім позначимо $x = BN$, де N – середина сторони BC.
Тоді сторона квадрата $BC = AB = 2x$.



Тепер виразимо x через R, склавши і розв'язавши рівняння так, як це зроблено в прикладі 1.

Скористаємось розв'язком, знайденим в прикладі 1:

$$x = \frac{R}{5}\left(\sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 2\cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Тепер площа квадрата, як і площа сегмента, виражається через R:

$$S_{\text{КВ}} = 4x^2 = \frac{4}{25}R^2\left(\sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

Метод введення допоміжної невідомої

Нарешті, при знаходженні шуканого відношення $S_{\text{кв}}/S_{\text{сегм}}$ невідома величина R скорочується:

$$\frac{S_{\text{кв}}}{S_{\text{сегм}}}=\frac{\frac{4}{25}R^2\left(\sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}}-2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}R^2\left(\alpha-\sin\alpha\right)}=$$

$$=\frac{8\left(\sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}}-2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{25(\alpha-\sin\alpha)}.$$

Відповідь: $\dfrac{8\left(\sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}}-2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{25(\alpha-\sin\alpha)}$.

Зауважимо, що при розв'язанні попереднього прикладу невідому R знайти ніяк не вдається, що, проте, не заважає розв'язанню задачі. Отже, при розв'язанні розглянутого прикладу 5 невідома R відіграє суто допоміжну роль.

Метод введення допоміжної невідомої

Нарешті, при знаходженні шуканого відношення $S_{\text{кв}}/S_{\text{сегм}}$ невідома величина R скорочується:

$$\frac{S_{\text{кв}}}{S_{\text{сегм}}} = \frac{\frac{4}{25}R^2\left(\sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}}-2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}R^2\left(\alpha-\sin\alpha\right)} =$$

$$= \frac{8\left(\sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}}-2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{25(\alpha-\sin\alpha)}.$$

Відповідь: $\dfrac{8\left(\sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}}-2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{25(\alpha-\sin\alpha)}$.

Зауважимо, що при розв'язанні попереднього прикладу невідому R знайти ніяк не вдається, що, проте, не заважає розв'язанню задачі. Отже, при розв'язанні розглянутого прикладу 5 невідома R відіграє суто допоміжну роль.

Метод введення допоміжної невідомої

Нарешті, при знаходженні шуканого відношення $S_{\text{кв}}/S_{\text{сегм}}$ невідома величина R скорочується:

$$\frac{S_{\text{кв}}}{S_{\text{сегм}}} = \frac{\frac{4}{25}R^2\left(\sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}}-2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}R^2(\alpha-\sin\alpha)} =$$

$$= \frac{8\left(\sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}}-2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{25(\alpha-\sin\alpha)}.$$

Відповідь: $\dfrac{8\left(\sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}}-2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{25(\alpha-\sin\alpha)}$.

Зауважимо, що при розв'язанні попереднього прикладу невідому R знайти ніяк не вдається, що, проте, не заважає розв'язанню задачі. Отже, при розв'язанні розглянутого прикладу 5 невідома R відіграє суто допоміжну роль.

Приклади із ЗНО

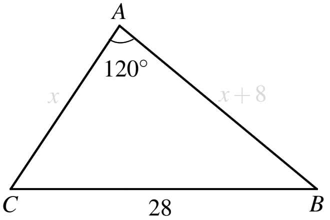
Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.). Сторони трикутника, одна з яких на 8 см більша за другу, утворюють кут 120°, а довжина третьої сторони дорівнює 28 см. Знайдіть периметр трикутника.

Розв'язання. Нехай в $\triangle ABC$: $\angle A = 120°$, $BC = 28$ і $AB - AC = 8$. Використаємо останню умову для введення допоміжної невідомої x: нехай $AC = x$ і $AB = x + 8$.

Записуючи теорему косинусів:
$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cos 120°$
і підставляючи в цю рівність вирази відповідних відрізків, отримуємо рівняння для знаходження x:
$28^2 = x^2 + (x+8)^2 - 2x(x+8)(-0,5)$.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.). Сторони трикутника, одна з яких на 8 см більша за другу, утворюють кут 120°, а довжина третьої сторони дорівнює 28 см. Знайдіть периметр трикутника.



Розв'язання. Нехай в $\triangle ABC$: $\angle A = 120°$, $BC = 28$ і $AB - AC = 8$. Використаємо останню умову для введення допоміжної невідомої x: нехай $AC = x$ і $AB = x+8$.

Записуючи теорему косинусів:

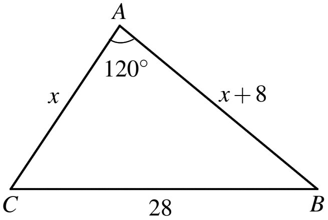
$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cos 120°$

і підставляючи в цю рівність вирази відповідних відрізків, отримуємо рівняння для знаходження x:

$28^2 = x^2 + (x+8)^2 - 2x(x+8)(-0,5)$.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.). Сторони трикутника, одна з яких на 8 см більша за другу, утворюють кут 120°, а довжина третьої сторони дорівнює 28 см. Знайдіть периметр трикутника.



Розв'язання. Нехай в $\triangle ABC$: $\angle A = 120^\circ$, $BC = 28$ і $AB - AC = 8$. Використаємо останню умову для введення допоміжної невідомої x: нехай $AC = x$ і $AB = x + 8$.

Записуючи теорему косинусів:

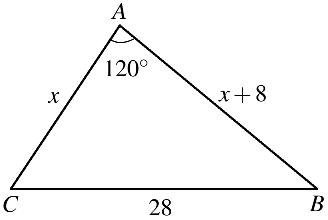
$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cos 120^\circ$

і підставляючи в цю рівність вирази відповідних відрізків, отримуємо рівняння для знаходження x:

$28^2 = x^2 + (x+8)^2 - 2x(x+8)(-0,5)$.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.). Сторони трикутника, одна з яких на 8 см більша за другу, утворюють кут 120°, а довжина третьої сторони дорівнює 28 см. Знайдіть периметр трикутника.



Розв'язання. Нехай в $\triangle ABC$: $\angle A = 120^\circ$, $BC = 28$ і $AB - AC = 8$. Використаємо останню умову для введення допоміжної невідомої x: нехай $AC = x$ і $AB = x + 8$.

Записуючи теорему косинусів:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cos 120^\circ$$

і підставляючи в цю рівність вирази відповідних відрізків, отримуємо рівняння для знаходження x:

$$28^2 = x^2 + (x+8)^2 - 2x(x+8)(-0,5)\,.$$

Приклади із ЗНО

Перетворимо отримане квадратне рівняння до стандартного вигляду:

$28^2 = x^2 + (x+8)^2 - 2x(x+8)(-0,5) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 784 = x^2 + x^2 + 16x + 64 + x^2 + 8x \Leftrightarrow 0 = 3x^2 + 24x - 720 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $x^2 + 8x - 240 = 0$.

Це рівняння має два корені: $x_1 = -20$ (не підходить за змістом задачі) і $x_2 = 12$.

Отже, $AC = 12$. Тоді $AB = 20$ і знаходимо периметр трикутника:

$P = AC + AB + BC = 12 + 20 + 28 = 60$ (см).

Відповідь: 60.

Приклади із ЗНО

Перетворимо отримане квадратне рівняння до стандартного вигляду:

$28^2 = x^2 + (x+8)^2 - 2x(x+8)(-0,5) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 784 = x^2 + x^2 + 16x + 64 + x^2 + 8x \Leftrightarrow 0 = 3x^2 + 24x - 720 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ x^2 + 8x - 240 = 0$.

Це рівняння має два корені: $x_1 = -20$ (не підходить за змістом задачі) і $x_2 = 12$.

Отже, $AC = 12$. Тоді $AB = 20$ і знаходимо периметр трикутника:

$P = AC + AB + BC = 12 + 20 + 28 = 60$ (см).

В і д п о в і д ь: 60.

Приклади із ЗНО

Перетворимо отримане квадратне рівняння до стандартного вигляду:

$28^2 = x^2 + (x+8)^2 - 2x(x+8)(-0,5) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 784 = x^2 + x^2 + 16x + 64 + x^2 + 8x \Leftrightarrow 0 = 3x^2 + 24x - 720 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 8x - 240 = 0$.

Це рівняння має два корені: $x_1 = -20$ (не підходить за змістом задачі) і $x_2 = 12$.

Отже, $AC = 12$. Тоді $AB = 20$ і знаходимо периметр трикутника:

$P = AC + AB + BC = 12 + 20 + 28 = 60$ (см).

Відповідь: 60.

Приклади із ЗНО

Перетворимо отримане квадратне рівняння до стандартного вигляду:

$28^2 = x^2 + (x+8)^2 - 2x(x+8)(-0,5) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 784 = x^2 + x^2 + 16x + 64 + x^2 + 8x \Leftrightarrow 0 = 3x^2 + 24x - 720 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \; x^2 + 8x - 240 = 0$.

Це рівняння має два корені: $x_1 = -20$ (не підходить за змістом задачі) і $x_2 = 12$.

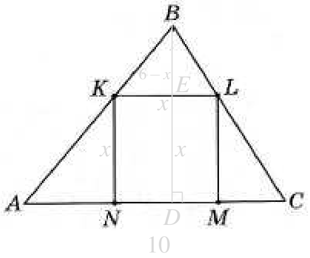
Отже, $AC = 12$. Тоді $AB = 20$ і знаходимо периметр трикутника:

$P = AC + AB + BC = 12 + 20 + 28 = 60$ (см).

Відповідь: 60.

Приклади із ЗНО

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.). В трикутник ABC вписано квадрат $KLMN$ (див. рисунок). Висота цього трикутника, проведена до сторони AC, дорівнює 6 см. Знайдіть периметр квадрата, якщо $AC = 10$ см.

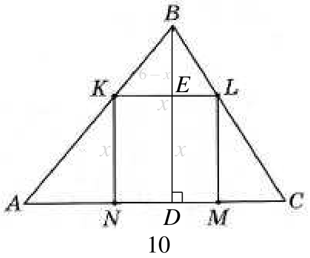


Розв'язання. Нехай $BD = 6$ – висота трикутника ABC і E – точка перетину відрізків BD і KL.

Нехай x – сторона квадрата $KLMN$, тобто $KL = KN = ED = x$. Тоді $BE = BD - ED = 6 - x$.

Приклади із ЗНО

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.). В трикутник ABC вписано квадрат $KLMN$ (див. рисунок). Висота цього трикутника, проведена до сторони AC, дорівнює 6 см. Знайдіть периметр квадрата, якщо $AC = 10$ см.

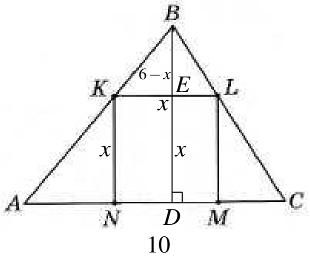


Розв'язання. Нехай $BD = 6$ – висота трикутника ABC і E – точка перетину відрізків BD і KL.

Нехай x – сторона квадрата $KLMN$, тобто $KL = KN = ED = x$. Тоді $BE = BD - ED = 6 - x$.

Приклади із ЗНО

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.). В трикутник ABC вписано квадрат $KLMN$ (див. рисунок). Висота цього трикутника, проведена до сторони AC, дорівнює 6 см. Знайдіть периметр квадрата, якщо $AC = 10$ см.



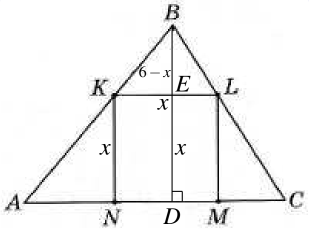
Розв'язання. Нехай $BD = 6$ – висота трикутника ABC і E – точка перетину відрізків BD і KL.

Нехай x – сторона квадрата $KLMN$, тобто

$KL = KN = ED = x$. Тоді

$BE = BD - ED = 6 - x$.

Приклади із ЗНО



$AC = 10$,
$BD = 6$,
$KL = KN = ED = x$,
$BE = 6 - x$.

Щоб отримати рівняння для знаходження x, використаємо подібність трикутників KBL і ABC, наслідком якої є пропорція: $\frac{BE}{BD} = \frac{KL}{AC}$. Підставляючи в цю рівність вирази відповідних відрізків, отримуємо рівняння

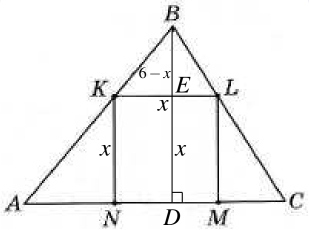
$$\frac{6-x}{6} = \frac{x}{10} \Leftrightarrow 10(6-x) = 6x \Leftrightarrow 60 - 10x = 6x \Leftrightarrow 60 = 16x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{60}{16} = \frac{15}{4}.$$

Тоді периметр квадрата $P = 4x = 4 \cdot \frac{15}{4} = 15$ (см).

Відповідь: 15 см.

Приклади із ЗНО



$AC = 10\,,$
$BD = 6\,,$
$KL = KN = ED = x\,,$
$BE = 6 - x\,.$

Щоб отримати рівняння для знаходження x, використаємо подібність трикутників KBL і ABC, наслідком якої є пропорція: $\frac{BE}{BD} = \frac{KL}{AC}$. Підставляючи в цю рівність вирази відповідних відрізків, отримуємо рівняння

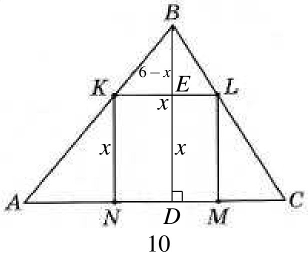
$$\frac{6-x}{6} = \frac{x}{10} \Leftrightarrow 10(6-x) = 6x \Leftrightarrow 60 - 10x = 6x \Leftrightarrow 60 = 16x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x = \frac{60}{16} = \frac{15}{4}\,.$$

Тоді периметр квадрата $P = 4x = 4 \cdot \frac{15}{4} = 15$ (см) .

Відповідь: 15 см.

Приклади із ЗНО



$AC = 10$,
$BD = 6$,
$KL = KN = ED = x$,
$BE = 6 - x$.

Щоб отримати рівняння для знаходження x, використаємо подібність трикутників KBL і ABC, наслідком якої є пропорція: $\frac{BE}{BD} = \frac{KL}{AC}$. Підставляючи в цю рівність вирази відповідних відрізків, отримуємо рівняння

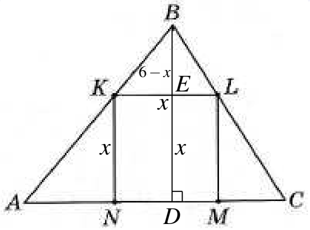
$$\frac{6-x}{6} = \frac{x}{10} \Leftrightarrow 10(6-x) = 6x \Leftrightarrow 60 - 10x = 6x \Leftrightarrow 60 = 16x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{60}{16} = \frac{15}{4}.$$

Тоді периметр квадрата $P = 4x = 4 \cdot \frac{15}{4} = 15$ (см).

Відповідь: 15 см.

Приклади із ЗНО



10

$AC = 10\,,$
$BD = 6\,,$
$KL = KN = ED = x\,,$
$BE = 6 - x\,.$

Щоб отримати рівняння для знаходження x, використаємо подібність трикутників KBL і ABC, наслідком якої є пропорція: $\frac{BE}{BD} = \frac{KL}{AC}$. Підставляючи в цю рівність вирази відповідних відрізків, отримуємо рівняння

$$\frac{6-x}{6} = \frac{x}{10} \Leftrightarrow 10(6-x) = 6x \Leftrightarrow 60 - 10x = 6x \Leftrightarrow 60 = 16x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ x = \frac{60}{16} = \frac{15}{4}\,.$$

Тоді периметр квадрата $P = 4x = 4 \cdot \frac{15}{4} = 15\ \ (\text{см})\,.$

Відповідь: 15 см.

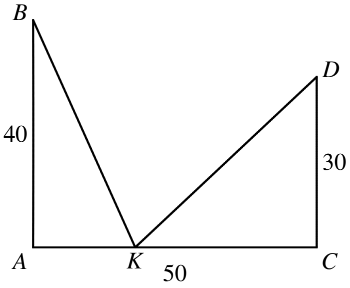
Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2006 р.). (Задача Л. Пізанського, XII–XIII ст.) Дві вежі, одна з яких 40 футів, а друга — 30 футів заввишки, розташовано на відстані 50 футів одна від одної. До криниці, що знаходиться між ними, одночасно з обох веж злетіло по пташці. Рухаючись з однаковою швидкістю, вони прилетіли до криниці одночасно. Знайдіть відстань від криниці до найближчої вежі (у футах).

Розв'язання. Зобразимо одну вежу у вигляді вертикального відрізка AB, а іншу — у вигляді вертикального відрізка CD, при цьому $AB = 40$, $CD = 30$ і відстань між ними $AC = 50$. Криниця знаходиться в точці K відрізка AC (див. мал.).

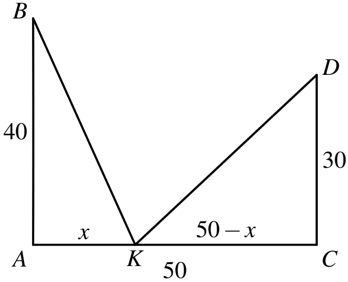
Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2006 р.). (Задача Л. Пізанського, XII–XIII ст.) Дві вежі, одна з яких 40 футів, а друга — 30 футів заввишки, розташовано на відстані 50 футів одна від одної. До криниці, що знаходиться між ними, одночасно з обох веж злетіло по пташці. Рухаючись з однаковою швидкістю, вони прилетіли до криниці одночасно. Знайдіть відстань від криниці до найближчої вежі (у футах).



Розв'язання. Зобразимо одну вежу у вигляді вертикального відрізка AB, а іншу — у вигляді вертикального відрізка CD, при цьому $AB = 40$, $CD = 30$ і відстань між ними $AC = 50$. Криниця знаходиться в точці K відрізка AC (див. мал.).

Приклади із ЗНО



Нехай $AK = x$. Тоді $KC = 50 - x$.

Оскільки пташки злетіли з точок B, D і, рухаючись з однаковою швидкістю, прилетіли до криниці одночасно, то $BK = DK \Leftrightarrow BK^2 = DK^2$.

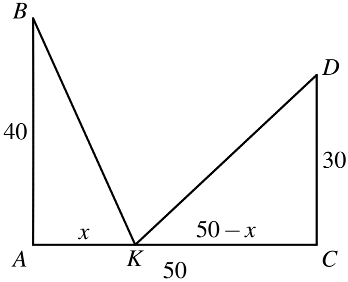
Використаємо цю рівність для того, щоб записати рівняння для знаходження x. Враховуючи теорему Піфагора, отримуємо $BK^2 = DK^2 \Leftrightarrow AB^2 + AK^2 = KC^2 + CD^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 40^2 + x^2 = (50 - x)^2 + 30^2$.

Розв'язуючи отримане рівняння, маємо
$1600 + x^2 = 2500 - 100x + x^2 + 900 \Leftrightarrow 100x = 3400 - 1600 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 18$.

Отже, $AK = 18$ (футів) і $KC = 50 - 18 = 32$ (фути).
Найближчою відстанню є відстань 18 футів.

Відповідь: 18.

Приклади із ЗНО



Нехай $AK = x$. Тоді $KC = 50 - x$. Оскільки пташки злетіли з точок B, D і, рухаючись з однаковою швидкістю, прилетіли до криниці одночасно, то $BK = DK \Leftrightarrow BK^2 = DK^2$.

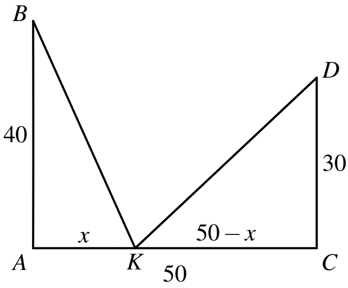
Використаємо цю рівність для того, щоб записати рівняння для знаходження x. Враховуючи теорему Піфагора, отримуємо $BK^2 = DK^2 \Leftrightarrow AB^2 + AK^2 = KC^2 + CD^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 40^2 + x^2 = (50 - x)^2 + 30^2$.

Розв'язуючи отримане рівняння, маємо
$1600 + x^2 = 2500 - 100x + x^2 + 900 \Leftrightarrow 100x = 3400 - 1600 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 18$.

Отже, $AK = 18$ (футів) і $KC = 50 - 18 = 32$ (фути).
Найближчою відстанню є відстань 18 футів.

Відповідь: 18.

Приклади із ЗНО



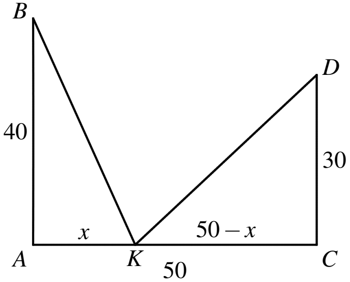
Нехай $AK = x$. Тоді $KC = 50 - x$. Оскільки пташки злетіли з точок B, D і, рухаючись з однаковою швидкістю, прилетіли до криниці одночасно, то $BK = DK \Leftrightarrow BK^2 = DK^2$.

Використаємо цю рівність для того, щоб записати рівняння для знаходження x. Враховуючи теорему Піфагора, отримуємо $BK^2 = DK^2 \Leftrightarrow AB^2 + AK^2 = KC^2 + CD^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 40^2 + x^2 = (50 - x)^2 + 30^2$.

Розв'язуючи отримане рівняння, маємо
$1600 + x^2 = 2500 - 100x + x^2 + 900 \Leftrightarrow 100x = 3400 - 1600 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 18$.

Отже, $AK = 18$ (футів) і $KC = 50 - 18 = 32$ (фути).
Найближчою відстанню є відстань 18 футів.
Відповідь: 18.

Приклади із ЗНО



Нехай $AK = x$. Тоді $KC = 50 - x$. Оскільки пташки злетіли з точок B, D і, рухаючись з однаковою швидкістю, прилетіли до криниці одночасно, то $BK = DK \Leftrightarrow BK^2 = DK^2$.

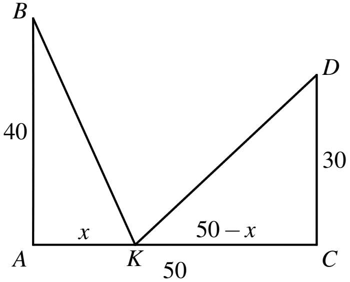
Використаємо цю рівність для того, щоб записати рівняння для знаходження x. Враховуючи теорему Піфагора, отримуємо $BK^2 = DK^2 \Leftrightarrow AB^2 + AK^2 = KC^2 + CD^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 40^2 + x^2 = (50 - x)^2 + 30^2$.

Розв'язуючи отримане рівняння, маємо
$1600 + x^2 = 2500 - 100x + x^2 + 900 \Leftrightarrow 100x = 3400 - 1600 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 18$.

Отже, $AK = 18$ (футів) і $KC = 50 - 18 = 32$ (фути).
Найближчою відстанню є відстань 18 футів.

Відповідь: 18.

Приклади із ЗНО



Нехай $AK = x$. Тоді $KC = 50 - x$. Оскільки пташки злетіли з точок B, D і, рухаючись з однаковою швидкістю, прилетіли до криниці одночасно, то $BK = DK \Leftrightarrow BK^2 = DK^2$.

Використаємо цю рівність для того, щоб записати рівняння для знаходження x. Враховуючи теорему Піфагора, отримуємо $BK^2 = DK^2 \Leftrightarrow AB^2 + AK^2 = KC^2 + CD^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 40^2 + x^2 = (50 - x)^2 + 30^2$.

Розв'язуючи отримане рівняння, маємо
$1600 + x^2 = 2500 - 100x + x^2 + 900 \Leftrightarrow 100x = 3400 - 1600 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 18$.

Отже, $AK = 18$ (футів) і $KC = 50 - 18 = 32$ (фути).
Найближчою відстанню є відстань 18 футів.

В і д п о в і д ь: 18.