Планіметрія-1: Трикутник. Коло

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 5 (частина друга)

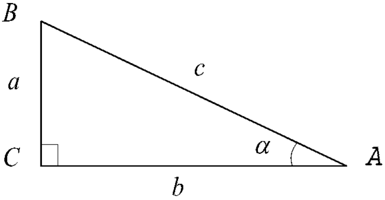
Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Прямокутний трикутник. Теорема Піфагора

Розглянемо прямокутний трикутник ACB, у якого $\angle C = 90°$. В порівнянні з довільним різностороннім трикутником цей трикутник має ряд додаткових властивостей. Перш за все, справедлива теорема Піфагора:

- квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів, тобто

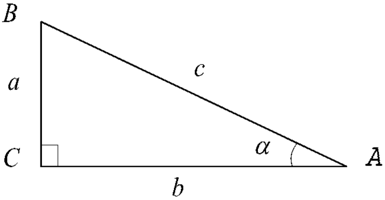


$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2},$$

де a, b – катети трикутника, а c – його гіпотенуза.

Прямокутний трикутник. Синус, косинус, тангенс

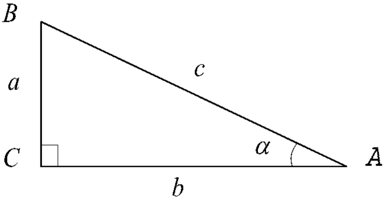
Розглянемо означення синуса, косинуса і тангенса в прямокутному трикутнику.



- Синусом кута називається відношення протилежного катета до гіпотенузи: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$.
- Косинусом кута називається відношення прилеглого катета до гіпотенузи: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.
- Тангенсом кута називається відношення протилежного катета до прилеглого катета: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$.

Прямокутний трикутник. Синус, косинус, тангенс

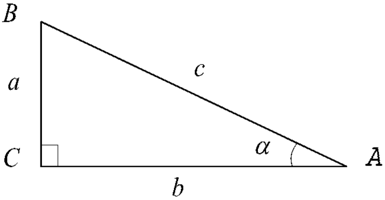
Розглянемо означення синуса, косинуса і тангенса в прямокутному трикутнику.



- Синусом кута називається відношення протилежного катета до гіпотенузи: $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$.
- Косинусом кута називається відношення прилеглого катета до гіпотенузи: $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$.
- Тангенсом кута називається відношення протилежного катета до прилеглого катета: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$.

Прямокутний трикутник. Синус, косинус, тангенс

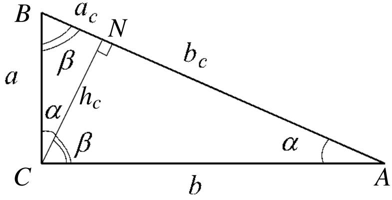
Розглянемо означення синуса, косинуса і тангенса в прямокутному трикутнику.



- Синусом кута називається відношення протилежного катета до гіпотенузи: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$.
- Косинусом кута називається відношення прилеглого катета до гіпотенузи: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.
- Тангенсом кута називається відношення протилежного катета до прилеглого катета: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$.

Прямокутний трикутник. Синус, косинус, тангенс

Проведемо висоту h_c на гіпотенузу прямокутного трикутника. Через a_c і b_c позначимо відповідно проекції катетів a і b на гіпотенузу. Маємо:



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{a_c}{a} = \frac{h_c}{b},$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{b_c}{b} = \frac{h_c}{a},$$

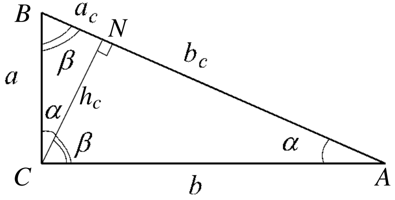
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{b_c}.$$

Отже, справедлива властивість висоти прямокутного трикутника: висота, проведена до гіпотенузи, є середнім пропорційним між проекціями катетів на гіпотенузу, тобто

$$\boxed{\frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{b_c}}.$$

Прямокутний трикутник. Синус, косинус, тангенс

Проведемо висоту h_c на гіпотенузу прямокутного трикутника. Через a_c і b_c позначимо відповідно проекції катетів a і b на гіпотенузу. Маємо:



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{a_c}{a} = \frac{h_c}{b}\,,$$

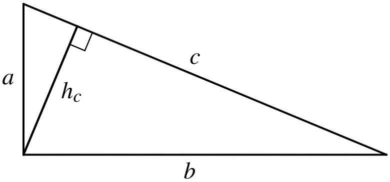
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{b_c}{b} = \frac{h_c}{a}\,,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{b_c}\,.$$

Отже, справедлива властивість висоти прямокутного трикутника: висота, проведена до гіпотенузи, є середнім пропорційним між проекціями катетів на гіпотенузу, тобто

$$\boxed{\frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{b_c}}\,.$$

Прямокутний трикутник



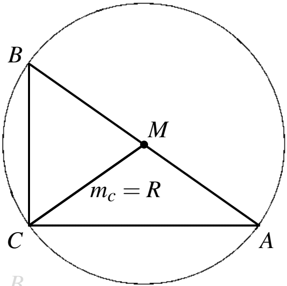
Площа прямокутного трикутника виражається рівностями

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c\,,$$

з яких випливає вираз висоти, проведеної до гіпотенузи, через сторони трикутника:

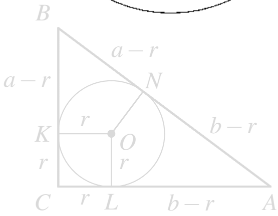
$$h_c = \frac{ab}{c}\,.$$

Прямокутний трикутник



Оскільки середина гіпотенузи є центром кола, описанного навколо прямокутного трикутника, то

$$\boxed{R = m_c = \frac{c}{2}}\ .$$



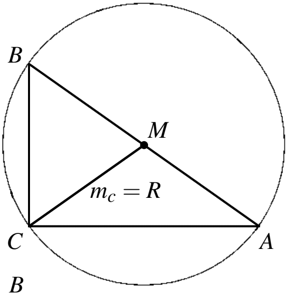
Радіус кола, вписанного в прямокутний трикутник, знаходиться за формулою

$$\boxed{r = \frac{a+b-c}{2}}\ . \qquad (1)$$

Формула (1) випливає з рівностей $BN = BK = a - r$, $AN = AL = b - r$ і $AB = BN + AN$ (див. мал.):

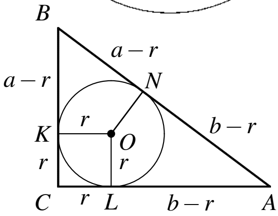
$c = (a - r) + (b - r) \ \Leftrightarrow\ 2r = a + b - c$.

Прямокутний трикутник



Оскільки середина гіпотенузи є центром кола, описанного навколо прямокутного трикутника, то

$$\boxed{R = m_c = \frac{c}{2}}\,.$$



Радіус кола, вписанного в прямокутний трикутник, знаходиться за формулою

$$\boxed{r = \frac{a+b-c}{2}}\,. \qquad (1)$$

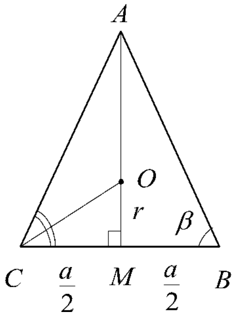
Формула (1) випливає з рівностей $BN = BK = a - r$, $AN = AL = b - r$ і $AB = BN + AN$ (див. мал.):

$c = (a - r) + (b - r) \Leftrightarrow 2r = a + b - c\,.$

Рівнобедрений трикутник

В порівнянні з довільним трикутником для рівнобедреного трикутника відзначимо додаткову формулу радіуса вписанного кола.

Оскільки центром вписанного кола є точка перетину бісектрис – точка O, а висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є також медіаною і бісектрисою, то з рівності $\operatorname{tg}\angle OCM = \frac{OM}{CM}$ отримуємо формулу:

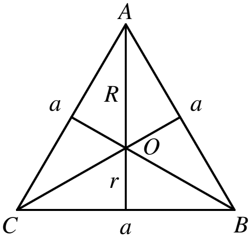


$$\boxed{r = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}},$$

де a – сторона основи,

β – кут при основі.

Рівносторонній трикутник



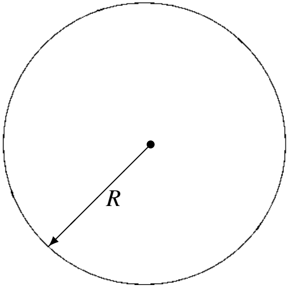
Нарешті, в рівносторонньому трикутнику зі стороною a співвідношення спрощуються, а саме:

$$h_a = m_a = l_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \qquad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

$$r = \frac{1}{3}h_a = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \qquad R = 2r = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Коло, круг

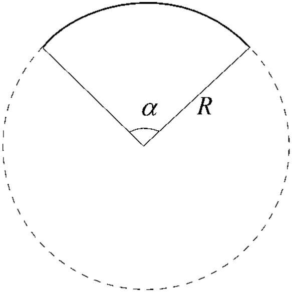
Відомо, що відношення довжини кола до його діаметра є стала для всіх кіл величина, яку називають числом π, при цьому $\pi = 3,14159265\ldots$ є ірраціональним числом, в десятковому записі якого відсутній будь-який період. Отже,



довжина кола L обчислюється за формулою $\boxed{L = 2\pi R}$, де R – радіус цього кола. Площа круга, обмеженого колом радіуса R, обчислюється за формулою $\boxed{S_{\text{кр}} = \pi R^2}$.

Сектор

Сектором круга (або просто сектором) називають частину круга, яка знаходиться всередині центрального кута.



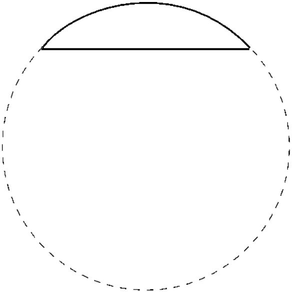
Якщо α – радіанна міра цього центрального кута і R – радіус круга, то площа сектора виражається формулою

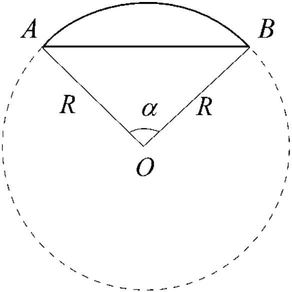
$$\boxed{S_{\text{сект}} = \frac{1}{2}\alpha R^2},$$

а довжина дуги, що обмежує сектор, – формулою

$$\boxed{l = \alpha R}.$$

Сегмент





Сегментом називають фігуру, обмежену дугою кола і хордою, яка стягує цю дугу.

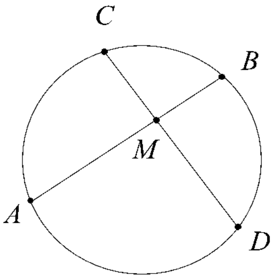
Якщо α – радіанна міра дуги, а R – радіус кола, то площа сегмента обчислюється за формулою

$$\boxed{S_{\text{сегм}} = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin\alpha)}$$

(зокрема, при $\alpha < \pi$ цю формулу отримаємо, якщо розглянемо різницю між площею відповідного сектора і площею трикутника AOB, зображених на нижньому мал.).

Хорди

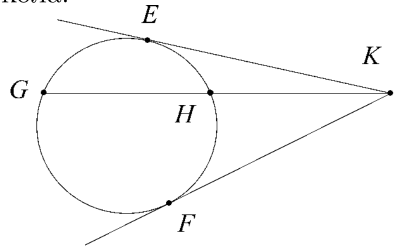
Якщо M – точка перетину хорд AB і CD, то



$$\boxed{AM \cdot MB = CM \cdot MD}\ .$$

Січні і дотичні

Відзначимо наступні властивості січних і дотичних до кола:

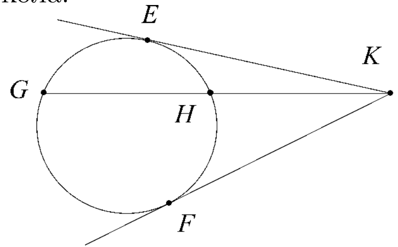


- відрізки дотичних, проведених з однієї точки K, рівні, тобто $KE = KF$;
- добуток січної KG на її зовнішню частину KH дорівнює квадрату відрізка KE дотичної, проведеної з тієї ж точки K, тобто

$$\boxed{KG \cdot KH = KE^2}.$$

Січні і дотичні

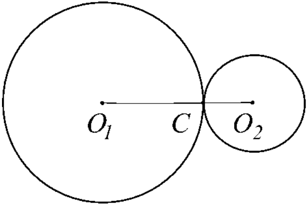
Відзначимо наступні властивості січних і дотичних до кола:



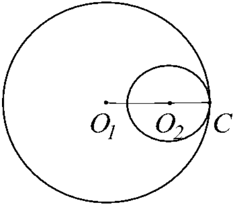
- відрізки дотичних, проведених з однієї точки K, рівні, тобто $KE = KF$;
- добуток січної KG на її зовнішню частину KH дорівнює квадрату відрізка KE дотичної, проведеної з тієї ж точки K, тобто $\boxed{KG \cdot KH = KE^2}$.

Дотик кіл

Два кола дотикаються, якщо вони мають єдину спільну точку. Розрізняють зовнішній і внутрішній дотик кіл.



зовнішній дотик

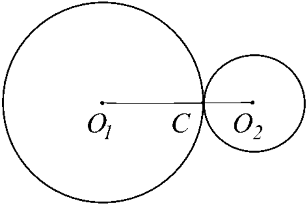


внутрішній дотик

В обох випадках точка дотику C кіл лежить на прямій O_1O_2, що з'єднує центри O_1 і O_2 цих кіл.

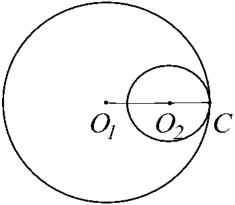
Дотик кіл

З цього випливає, що при зовнішньому дотику відстань O_1O_2 між центрами кіл дорівнює сумі їх радіусів R_1 і R_2, тобто $\boxed{O_1O_2 = R_1 + R_2}$.
При внутрішньому дотику кіл відстань O_1O_2 дорівнює різниці між радіусом більшого кола і радіусом меншого кола, а в загальному випадку (коли не відомо, який з радіусів більший) вона дорівнює модулю різниці радіусів, тобто $\boxed{O_1O_2 = |R_1 - R_2|}$.



зовнішній дотик

$O_1O_2 = R_1 + R_2$

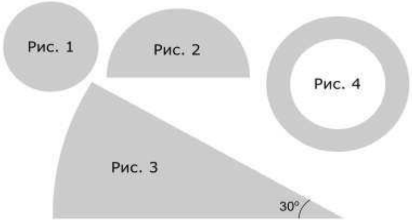


внутрішній дотик

$O_1O_2 = |R_1 - R_2|$

Приклади із ЗНО

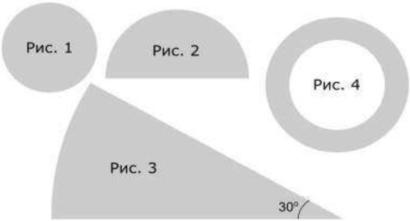
Приклад 1 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2015 р.). Встановіть відповідність між геометричною фігурою (1-4) та її площею (А-Д).



Геометрична фігура:
1) круг радіуса 4 см (рис. 1);
2) півкруг радіуса 6 см (рис. 2);
3) сектор радіуса 12 см з градусною мірою центрального кута 30° (рис. 3);
4) кільце, обмежене колами радіусів 4 см і 6 см (рис. 4).

Площа геометричної фігури:
А) 12π см^2;
Б) 16π см^2;
В) 18π см^2;
Г) 20π см^2;
Д) 24π см^2.

Приклади із ЗНО



Розв'язання. Площа круга радіуса $R_1 = 4$ дорівнює $S_1 = \pi R_1^2 = 16\pi$.

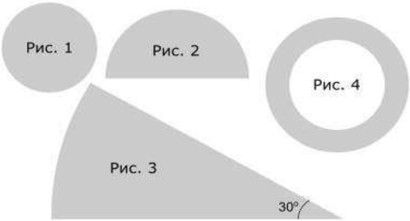
Площа півкруга радіуса $R_2 = 6$ дорівнює $S_2 = \pi R_2^2/2 = 18\pi$.

Знаходимо площу сектора радіуса $R_3 = 12$ з центральним кутом 30°, тобто $\alpha = \pi/6$ радіан: $S_3 = \alpha R_3^2/2 = \pi \cdot 12^2/12 = 12\pi$ (оскільки $30° = 360°/12$, то площу сектора S_3 можна обчислити також як дванадцяту частину від площі круга радіуса $R_3 = 12$).

Нарешті, площу кільця, обмеженого колами радіусів $R_4 = 4$ і $R_5 = 6$, знаходимо як різницю площ відповідних кругів: $S_4 = \pi R_5^2 - \pi R_4^2 = 36\pi - 16\pi = 20\pi$.

Відповідь: 1-Б, 2-В, 3-А, 4-Г.

Приклади із ЗНО



Розв'язання. Площа круга радіуса $R_1 = 4$ дорівнює $S_1 = \pi R_1^2 = 16\pi$.

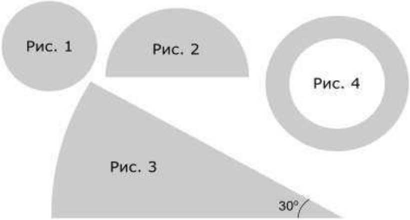
Площа півкруга радіуса $R_2 = 6$ дорівнює $S_2 = \pi R_2^2/2 = 18\pi$.

Знаходимо площу сектора радіуса $R_3 = 12$ з центральним кутом 30°, тобто $\alpha = \pi/6$ радіан: $S_3 = \alpha R_3^2/2 = \pi \cdot 12^2/12 = 12\pi$ (оскільки $30^\circ = 360^\circ/12$, то площу сектора S_3 можна обчислити також як дванадцяту частину від площі круга радіуса $R_3 = 12$).

Нарешті, площу кільця, обмеженого колами радіусів $R_4 = 4$ і $R_5 = 6$, знаходимо як різницю площ відповідних кругів: $S_4 = \pi R_5^2 - \pi R_4^2 = 36\pi - 16\pi = 20\pi$.

Відповідь: 1-Б, 2-В, 3-А, 4-Г.

Приклади із ЗНО



Розв'язання. Площа круга радіуса $R_1 = 4$ дорівнює $S_1 = \pi R_1^2 = 16\pi$.

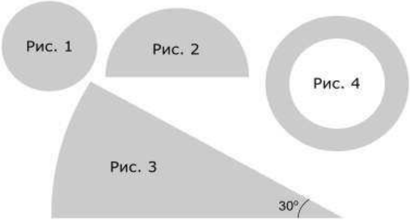
Площа півкруга радіуса $R_2 = 6$ дорівнює $S_2 = \pi R_2^2/2 = 18\pi$.

Знаходимо площу сектора радіуса $R_3 = 12$ з центральним кутом 30°, тобто $\alpha = \pi/6$ радіан: $S_3 = \alpha R_3^2/2 = \pi \cdot 12^2/12 = 12\pi$ (оскільки $30^\circ = 360^\circ/12$, то площу сектора S_3 можна обчислити також як дванадцяту частину від площі круга радіуса $R_3 = 12$).

Нарешті, площу кільця, обмеженого колами радіусів $R_4 = 4$ і $R_5 = 6$, знаходимо як різницю площ відповідних кругів: $S_4 = \pi R_5^2 - \pi R_4^2 = 36\pi - 16\pi = 20\pi$.

Відповідь: 1-Б, 2-В, 3-А, 4-Г.

Приклади із ЗНО



Розв'язання. Площа круга радіуса $R_1 = 4$ дорівнює $S_1 = \pi R_1^2 = 16\pi$.

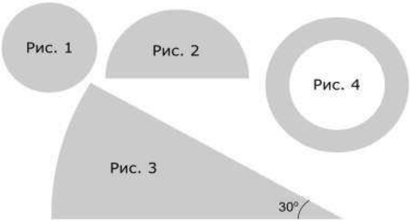
Площа півкруга радіуса $R_2 = 6$ дорівнює $S_2 = \pi R_2^2/2 = 18\pi$.

Знаходимо площу сектора радіуса $R_3 = 12$ з центральним кутом 30°, тобто $\alpha = \pi/6$ радіан: $S_3 = \alpha R_3^2/2 = \pi \cdot 12^2/12 = 12\pi$ (оскільки $30^\circ = 360^\circ/12$, то площу сектора S_3 можна обчислити також як дванадцяту частину від площі круга радіуса $R_3 = 12$).

Нарешті, площу кільця, обмеженого колами радіусів $R_4 = 4$ і $R_5 = 6$, знаходимо як різницю площ відповідних кругів: $S_4 = \pi R_5^2 - \pi R_4^2 = 36\pi - 16\pi = 20\pi$.

Відповідь: 1-Б, 2-В, 3-А, 4-Г.

Приклади із ЗНО



Розв'язання. Площа круга радіуса $R_1 = 4$ дорівнює $S_1 = \pi R_1^2 = 16\pi$.

Площа півкруга радіуса $R_2 = 6$ дорівнює $S_2 = \pi R_2^2/2 = 18\pi$.

Знаходимо площу сектора радіуса $R_3 = 12$ з центральним кутом 30°, тобто $\alpha = \pi/6$ радіан: $S_3 = \alpha R_3^2/2 = \pi \cdot 12^2/12 = 12\pi$ (оскільки $30^\circ = 360^\circ/12$, то площу сектора S_3 можна обчислити також як дванадцяту частину від площі круга радіуса $R_3 = 12$).

Нарешті, площу кільця, обмеженого колами радіусів $R_4 = 4$ і $R_5 = 6$, знаходимо як різницю площ відповідних кругів: $S_4 = \pi R_5^2 - \pi R_4^2 = 36\pi - 16\pi = 20\pi$.

Відповідь: 1-Б, 2-В, 3-А, 4-Г.

Приклади із ЗНО

Приклад 2 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.). У прямокутний трикутник ABC вписано коло, яке дотикається катетів AC та BC у точках K і M відповідно. Знайдіть радіус кола, описанного навколо трикутника ABC (у см), якщо $AK = 4,5$ см, $MB = 6$ см.

Розв'язання. Нехай N – точка дотику вписанного кола і гіпотенузи. Тоді $AN = AK$ як відрізки дотичних, проведених з однієї точки A, і $BN = BM$ як відрізки дотичних, проведених з однієї точки B.

Отже, $AN = 4,5$ і $BN = 6$.
Тоді гіпотенуза $c = AB = 10,5$, а радіус кола, описанного навколо прямокутного трикутника, знаходимо за формулою

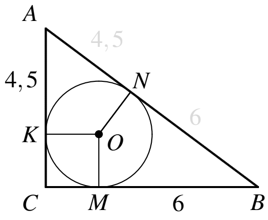
$$R = \frac{c}{2} = \frac{10,5}{2} = 5,25 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 5,25.

Приклади із ЗНО

Приклад 2 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.). У прямокутний трикутник ABC вписано коло, яке дотикається катетів AC та BC у точках K і M відповідно. Знайдіть радіус кола, описанного навколо трикутника ABC (у см), якщо $AK = 4,5$ см, $MB = 6$ см.

Розв'язання. Нехай N – точка дотику вписанного кола і гіпотенузи. Тоді $AN = AK$ як відрізки дотичних, проведених з однієї точки A, і $BN = BM$ як відрізки дотичних, проведених з однієї точки B.



Отже, $AN = 4,5$ і $BN = 6$.
Тоді гіпотенуза $c = AB = 10,5$, а радіус кола, описанного навколо прямокутного трикутника, знаходимо за формулою

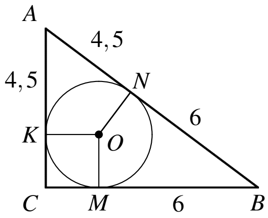
$$R = \frac{c}{2} = \frac{10,5}{2} = 5,25 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 5,25.

Приклади із ЗНО

Приклад 2 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.). У прямокутний трикутник ABC вписано коло, яке дотикається катетів AC та BC у точках K і M відповідно. Знайдіть радіус кола, описанного навколо трикутника ABC (у см), якщо $AK = 4,5$ см, $MB = 6$ см.

Розв'язання. Нехай N – точка дотику вписанного кола і гіпотенузи. Тоді $AN = AK$ як відрізки дотичних, проведених з однієї точки A, і $BN = BM$ як відрізки дотичних, проведених з однієї точки B.



Отже, $AN = 4,5$ і $BN = 6$.

Тоді гіпотенуза $c = AB = 10,5$, а радіус кола, описанного навколо прямокутного трикутника, знаходимо за формулою

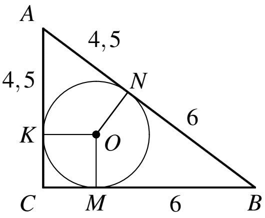
$$R = \frac{c}{2} = \frac{10,5}{2} = 5,25 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 5,25.

Приклади із ЗНО

П р и к л а д 2 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.). У прямокутний трикутник ABC вписано коло, яке дотикається катетів AC та BC у точках K і M відповідно. Знайдіть радіус кола, описанного навколо трикутника ABC (у см), якщо $AK = 4,5$ см, $MB = 6$ см.

Р о з в' я з а н н я. Нехай N – точка дотику вписанного кола і гіпотенузи. Тоді $AN = AK$ як відрізки дотичних, проведених з однієї точки A, і $BN = BM$ як відрізки дотичних, проведених з однієї точки B.



Отже, $AN = 4,5$ і $BN = 6$.
Тоді гіпотенуза $c = AB = 10,5$, а радіус кола, описанного навколо прямокутного трикутника, знаходимо за формулою

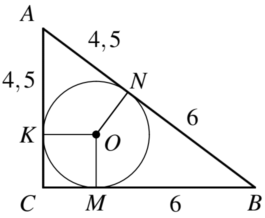
$$R = \frac{c}{2} = \frac{10,5}{2} = 5,25 \text{ (см)}.$$

В і д п о в і д ь: 5,25 .

Приклади із ЗНО

П р и к л а д 2 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.). У прямокутний трикутник ABC вписано коло, яке дотикається катетів AC та BC у точках K і M відповідно. Знайдіть радіус кола, описанного навколо трикутника ABC (у см), якщо $AK = 4,5$ см, $MB = 6$ см.

Р о з в' я з а н н я. Нехай N – точка дотику вписанного кола і гіпотенузи. Тоді $AN = AK$ як відрізки дотичних, проведених з однієї точки A, і $BN = BM$ як відрізки дотичних, проведених з однієї точки B.



Отже, $AN = 4,5$ і $BN = 6$.
Тоді гіпотенуза $c = AB = 10,5$, а радіус кола, описанного навколо прямокутного трикутника, знаходимо за формулою

$$R = \frac{c}{2} = \frac{10,5}{2} = 5,25 \ \text{(см)}.$$

В і д п о в і д ь: 5,25 .

Приклади із ЗНО

Приклад 3 (Пробне тестування ЗНО, 2013 р.).
У прямокутній трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) діагональ AC перпендикулярна до бічної сторони CD. Знайдіть довжину цієї діагоналі (у см), якщо $AD = 18$ см, $BC = 8$ см.

Розв'язання. Нехай CN – висота трапеції, проведена до основи AD. Тоді $AN = 8$, $ND = 10$.

За властивістю висоти прямокутного $\triangle ACD$, проведеної до гіпотенузи AD: $\frac{AN}{CN} = \frac{CN}{ND}$, тобто

$$\frac{8}{CN} = \frac{CN}{10} \Leftrightarrow CN^2 = 8 \cdot 10 = 80\,.$$

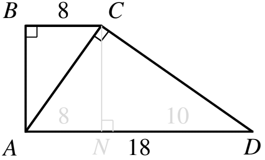
Тоді за теоремою Піфагора з $\triangle ANC$ знаходимо шукану діагональ трапеції:

$$AC = \sqrt{AN^2 + CN^2} = \sqrt{64 + 80} = \sqrt{144} = 12 \ \text{(см)}\,.$$

Відповідь: 12.

Приклади із ЗНО

Приклад 3 (Пробне тестування ЗНО, 2013 р.).
У прямокутній трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) діагональ AC перпендикулярна до бічної сторони CD. Знайдіть довжину цієї діагоналі (у см), якщо $AD = 18$ см, $BC = 8$ см.



Розв'язання. Нехай CN – висота трапеції, проведена до основи AD. Тоді $AN = 8$, $ND = 10$.

За властивістю висоти прямокутного $\triangle ACD$, проведеної до гіпотенузи AD: $\frac{AN}{CN} = \frac{CN}{ND}$, тобто

$\frac{8}{CN} = \frac{CN}{10} \Leftrightarrow CN^2 = 8 \cdot 10 = 80$.

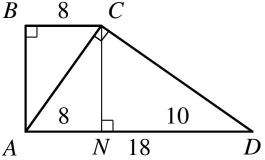
Тоді за теоремою Піфагора з $\triangle ANC$ знаходимо шукану діагональ трапеції:

$AC = \sqrt{AN^2 + CN^2} = \sqrt{64 + 80} = \sqrt{144} = 12$ (см).

Відповідь: 12.

Приклади із ЗНО

П р и к л а д 3 (Пробне тестування ЗНО, 2013 р.).
У прямокутній трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) діагональ AC перпендикулярна до бічної сторони CD. Знайдіть довжину цієї діагоналі (у см), якщо $AD = 18$ см, $BC = 8$ см.



Р о з в' я з а н н я. Нехай CN – висота трапеції, проведена до основи AD. Тоді $AN = 8$, $ND = 10$.

За властивістю висоти прямокутного $\triangle ACD$, проведеної до гіпотенузи AD: $\frac{AN}{CN} = \frac{CN}{ND}$, тобто

$\frac{8}{CN} = \frac{CN}{10} \Leftrightarrow CN^2 = 8 \cdot 10 = 80$.

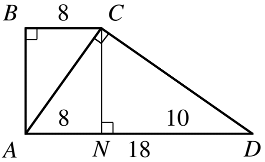
Тоді за теоремою Піфагора з $\triangle ANC$ знаходимо шукану діагональ трапеції:

$AC = \sqrt{AN^2 + CN^2} = \sqrt{64 + 80} = \sqrt{144} = 12$ (см).

В і д п о в і д ь: 12.

Приклади із ЗНО

Приклад 3 (Пробне тестування ЗНО, 2013 р.).
У прямокутній трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) діагональ AC перпендикулярна до бічної сторони CD. Знайдіть довжину цієї діагоналі (у см), якщо $AD = 18$ см, $BC = 8$ см.



Розв'язання. Нехай CN – висота трапеції, проведена до основи AD. Тоді $AN = 8$, $ND = 10$.

За властивістю висоти прямокутного $\triangle ACD$, проведеної до гіпотенузи AD: $\frac{AN}{CN} = \frac{CN}{ND}$, тобто

$$\frac{8}{CN} = \frac{CN}{10} \Leftrightarrow CN^2 = 8 \cdot 10 = 80\,.$$

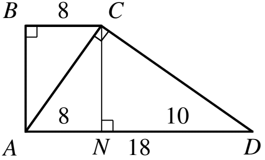
Тоді за теоремою Піфагора з $\triangle ANC$ знаходимо шукану діагональ трапеції:

$$AC = \sqrt{AN^2 + CN^2} = \sqrt{64 + 80} = \sqrt{144} = 12 \ \text{(см)}\,.$$

Відповідь: 12.

Приклади із ЗНО

П р и к л а д 3 (Пробне тестування ЗНО, 2013 р.).
У прямокутній трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) діагональ AC перпендикулярна до бічної сторони CD. Знайдіть довжину цієї діагоналі (у см), якщо $AD = 18$ см, $BC = 8$ см.



Р о з в' я з а н н я. Нехай CN – висота трапеції, проведена до основи AD. Тоді $AN = 8$, $ND = 10$.

За властивістю висоти прямокутного $\triangle ACD$, проведеної до гіпотенузи AD: $\frac{AN}{CN} = \frac{CN}{ND}$, тобто

$$\frac{8}{CN} = \frac{CN}{10} \Leftrightarrow CN^2 = 8 \cdot 10 = 80\,.$$

Тоді за теоремою Піфагора з $\triangle ANC$ знаходимо шукану діагональ трапеції:

$$AC = \sqrt{AN^2 + CN^2} = \sqrt{64 + 80} = \sqrt{144} = 12 \ \text{(см)}\,.$$

В і д п о в і д ь: 12.

Приклади із ЗНО

Приклад 4 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2009 р.). Гострий кут паралелограма дорівнює 60°, а його сторони — 3 см і 4 см. Обчисліть довжину меншої діагоналі паралелограма.

Розв'язання. Нехай $\angle A$ – гострий кут паралелограма $ABCD$ і $AB = 3$, $AD = 4$.

Тоді за теоремою косинусів знаходимо сторону BD трикутника ABD, яка є меншою діагоналлю паралелограма $ABCD$:

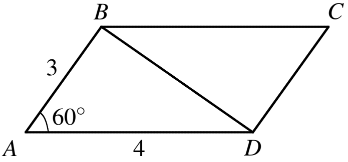
$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cos 60^\circ} =$$

$$= \sqrt{3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 0,5} = \sqrt{9 + 16 - 12} = \sqrt{13} \text{ (см)}.$$

Відповідь: $\sqrt{13}$ см.

Приклади із ЗНО

Приклад 4 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2009 р.). Гострий кут паралелограма дорівнює 60°, а його сторони — 3 см і 4 см. Обчисліть довжину меншої діагоналі паралелограма.



Розв'язання. Нехай $\angle A$ – гострий кут паралелограма $ABCD$ і $AB = 3$, $AD = 4$.

Тоді за теоремою косинусів знаходимо сторону BD трикутника ABD, яка є меншою діагоналлю паралелограма $ABCD$:

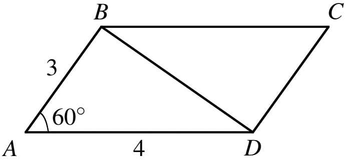
$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cos 60^\circ} =$$

$$= \sqrt{3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 0,5} = \sqrt{9 + 16 - 12} = \sqrt{13} \text{ (см)}.$$

Відповідь: $\sqrt{13}$ см.

Приклади із ЗНО

Приклад 4 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2009 р.). Гострий кут паралелограма дорівнює $60°$, а його сторони — 3 см і 4 см. Обчисліть довжину меншої діагоналі паралелограма.



Розв'язання. Нехай $\angle A$ – гострий кут паралелограма $ABCD$ і $AB = 3$, $AD = 4$.

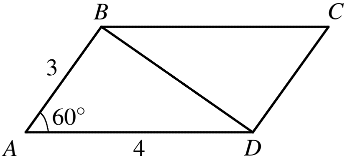
Тоді за теоремою косинусів знаходимо сторону BD трикутника ABD, яка є меншою діагоналлю паралелограма $ABCD$:

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cos 60^\circ} =$$
$$= \sqrt{3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 0,5} = \sqrt{9 + 16 - 12} = \sqrt{13} \text{ (см)}.$$

Відповідь: $\sqrt{13}$ см.

Приклади із ЗНО

Приклад 4 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2009 р.). Гострий кут паралелограма дорівнює 60°, а його сторони — 3 см і 4 см. Обчисліть довжину меншої діагоналі паралелограма.



Розв'язання. Нехай $\angle A$ – гострий кут паралелограма $ABCD$ і $AB = 3$, $AD = 4$.

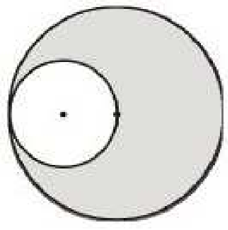
Тоді за теоремою косинусів знаходимо сторону BD трикутника ABD, яка є меншою діагоналлю паралелограма $ABCD$:

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cos 60^\circ} =$$
$$= \sqrt{3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 0,5} = \sqrt{9 + 16 - 12} = \sqrt{13} \text{ (см)}.$$

Відповідь: $\sqrt{13}$ см.

Приклади із ЗНО

П р и к л а д 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.). Два кола дотикаються, причому менше з кіл проходить через центр більшого кола (див. рисунок). Знайдіть площу зафарбованої фігури (у см^2), якщо менше з кіл обмежує круг площею 64 см^2.



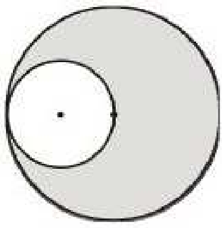
Р о з в' я з а н н я. Знайдемо радіус r меншого кола: $64 = \pi r^2$, звідки $r = \sqrt{\frac{64}{\pi}} = \frac{8}{\sqrt{\pi}}$.
Тоді радіус більшого кола $R = 2r = \frac{16}{\sqrt{\pi}}$.

Тепер знайдемо площу круга, обмеженого більшим колом: $S_{\text{кр}} = \pi R^2 = \pi \cdot \frac{256}{\pi} = 256$.
Нарешті, знаходимо площу зафарбованої фігури:
$S = 256 - 64 = 192$ (см^2).

В і д п о в і д ь: 192.

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.). Два кола дотикаються, причому менше з кіл проходить через центр більшого кола (див. рисунок). Знайдіть площу зафарбованої фігури (у см^2), якщо менше з кіл обмежує круг площею 64 см^2.



Розв'язання. Знайдемо радіус r меншого кола: $64 = \pi r^2$, звідки $r = \sqrt{\frac{64}{\pi}} = \frac{8}{\sqrt{\pi}}$.

Тоді радіус більшого кола $R = 2r = \frac{16}{\sqrt{\pi}}$.

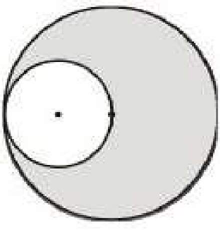
Тепер знайдемо площу круга, обмеженого більшим колом: $S_{\text{кр}} = \pi R^2 = \pi \cdot \frac{256}{\pi} = 256$.

Нарешті, знаходимо площу зафарбованої фігури: $S = 256 - 64 = 192$ (см^2).

Відповідь: 192.

Приклади із ЗНО

П р и к л а д 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.). Два кола дотикаються, причому менше з кіл проходить через центр більшого кола (див. рисунок). Знайдіть площу зафарбованої фігури (у см^2), якщо менше з кіл обмежує круг площею 64 см^2.



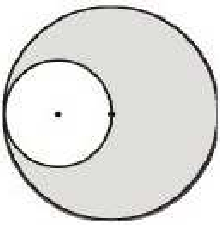
Р о з в’я з а н н я. Знайдемо радіус r меншого кола: $64 = \pi r^2$, звідки $r = \sqrt{\frac{64}{\pi}} = \frac{8}{\sqrt{\pi}}$.
Тоді радіус більшого кола $R = 2r = \frac{16}{\sqrt{\pi}}$.

Тепер знайдемо площу круга, обмеженого більшим колом: $S_{\text{кр}} = \pi R^2 = \pi \cdot \frac{256}{\pi} = 256$.
Нарешті, знаходимо площу зафарбованої фігури: $S = 256 - 64 = 192$ (см^2).

В і д п о в і д ь: 192.

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.). Два кола дотикаються, причому менше з кіл проходить через центр більшого кола (див. рисунок). Знайдіть площу зафарбованої фігури (у см^2), якщо менше з кіл обмежує круг площею 64 см^2.



Розв'язання. Знайдемо радіус r меншого кола: $64 = \pi r^2$, звідки $r = \sqrt{\frac{64}{\pi}} = \frac{8}{\sqrt{\pi}}$.

Тоді радіус більшого кола $R = 2r = \frac{16}{\sqrt{\pi}}$.

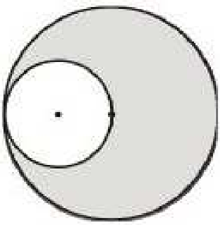
Тепер знайдемо площу круга, обмеженого більшим колом: $S_{\text{кр}} = \pi R^2 = \pi \cdot \frac{256}{\pi} = 256$.

Нарешті, знаходимо площу зафарбованої фігури: $S = 256 - 64 = 192$ (см^2).

Відповідь: 192.

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.). Два кола дотикаються, причому менше з кіл проходить через центр більшого кола (див. рисунок). Знайдіть площу зафарбованої фігури (у см^2), якщо менше з кіл обмежує круг площею 64 см^2.



Розв'язання. Знайдемо радіус r меншого кола: $64 = \pi r^2$, звідки $r = \sqrt{\frac{64}{\pi}} = \frac{8}{\sqrt{\pi}}$.

Тоді радіус більшого кола $R = 2r = \frac{16}{\sqrt{\pi}}$.

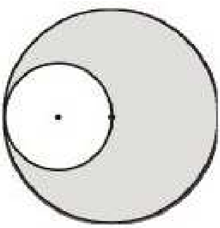
Тепер знайдемо площу круга, обмеженого більшим колом: $S_{\text{кр}} = \pi R^2 = \pi \cdot \frac{256}{\pi} = 256$.

Нарешті, знаходимо площу зафарбованої фігури: $S = 256 - 64 = 192$ (см^2).

Відповідь: 192.

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.). Два кола дотикаються, причому менше з кіл проходить через центр більшого кола (див. рисунок). Знайдіть площу зафарбованої фігури (у см^2), якщо менше з кіл обмежує круг площею 64 см^2.



Розв'язання. Знайдемо радіус r меншого кола: $64 = \pi r^2$, звідки $r = \sqrt{\frac{64}{\pi}} = \frac{8}{\sqrt{\pi}}$.

Тоді радіус більшого кола $R = 2r = \frac{16}{\sqrt{\pi}}$.

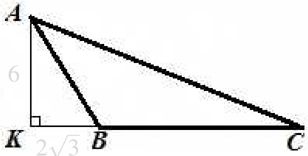
Тепер знайдемо площу круга, обмеженого більшим колом: $S_{\text{кр}} = \pi R^2 = \pi \cdot \frac{256}{\pi} = 256$.

Нарешті, знаходимо площу зафарбованої фігури: $S = 256 - 64 = 192$ (см^2).

Відповідь: 192.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). У трикутнику ABC основа висоти AK лежить на продовженні сторони BC (див. рисунок). $AK = 6$, $KB = 2\sqrt{3}$. Радіус описаного навколо трикутника ABC кола дорівнює $15\sqrt{3}$. Визначте довжину AC.



Розв'язання. Для радіуса R кола, описанного навколо $\triangle ABC$, справедлива формула: $R = \dfrac{AC}{2\sin\angle ABC}$, звідки $AC = 2R\sin\angle ABC$.

Оскільки $\sin\angle ABC = \sin(\pi - \angle ABK) = \sin\angle ABK$, то з $\triangle AKB$ за означенням синуса маємо: $\sin\angle ABK = \dfrac{AK}{AB} =$

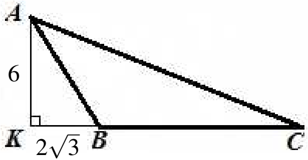
$$= \frac{AK}{\sqrt{AK^2+KB^2}} = \frac{6}{\sqrt{6^2+(2\sqrt{3})^2}} = \frac{6}{\sqrt{36+12}} = \frac{6}{\sqrt{48}} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отже, $AC = 2R\sin\angle ABC = 2\cdot 15\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 45$.

Відповідь: 45.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). У трикутнику ABC основа висоти AK лежить на продовженні сторони BC (див. рисунок). $AK = 6$, $KB = 2\sqrt{3}$. Радіус описаного навколо трикутника ABC кола дорівнює $15\sqrt{3}$. Визначте довжину AC.



Розв'язання. Для радіуса R кола, описанного навколо $\triangle ABC$, справедлива формула: $R = \dfrac{AC}{2\sin\angle ABC}$, звідки $AC = 2R\sin\angle ABC$.

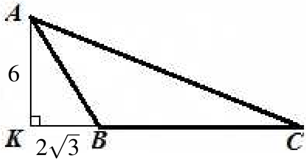
Оскільки $\sin\angle ABC = \sin(\pi - \angle ABK) = \sin\angle ABK$, то з $\triangle AKB$ за означенням синуса маємо: $\sin\angle ABK = \frac{AK}{AB} = \frac{AK}{\sqrt{AK^2+KB^2}} = \frac{6}{\sqrt{6^2+(2\sqrt{3})^2}} = \frac{6}{\sqrt{36+12}} = \frac{6}{\sqrt{48}} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Отже, $AC = 2R\sin\angle ABC = 2\cdot 15\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 45$.

Відповідь: 45.

Приклади із ЗНО

П р и к л а д 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). У трикутнику ABC основа висоти AK лежить на продовженні сторони BC (див. рисунок). $AK = 6$, $KB = 2\sqrt{3}$. Радіус описаного навколо трикутника ABC кола дорівнює $15\sqrt{3}$. Визначте довжину AC.



Р о з в' я з а н н я. Для радіуса R кола, описанного навколо $\triangle ABC$, справедлива формула: $R = \frac{AC}{2\sin\angle ABC}$, звідки $AC = 2R\sin\angle ABC$.

Оскільки $\sin\angle ABC = \sin(\pi - \angle ABK) = \sin\angle ABK$, то з $\triangle AKB$ за означенням синуса маємо: $\sin\angle ABK = \frac{AK}{AB} =$

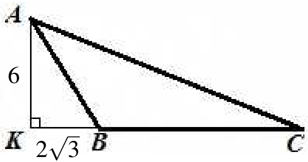
$$= \frac{AK}{\sqrt{AK^2+KB^2}} = \frac{6}{\sqrt{6^2+(2\sqrt{3})^2}} = \frac{6}{\sqrt{36+12}} = \frac{6}{\sqrt{48}} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отже, $AC = 2R\sin\angle ABC = 2\cdot 15\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 45$.

В і д п о в і д ь: 45.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). У трикутнику ABC основа висоти AK лежить на продовженні сторони BC (див. рисунок). $AK = 6$, $KB = 2\sqrt{3}$. Радіус описаного навколо трикутника ABC кола дорівнює $15\sqrt{3}$. Визначте довжину AC.



Розв'язання. Для радіуса R кола, описанного навколо $\triangle ABC$, справедлива формула: $R = \frac{AC}{2\sin\angle ABC}$, звідки $AC = 2R\sin\angle ABC$.

Оскільки $\sin\angle ABC = \sin(\pi - \angle ABK) = \sin\angle ABK$, то з $\triangle AKB$ за означенням синуса маємо: $\sin\angle ABK = \frac{AK}{AB} =$

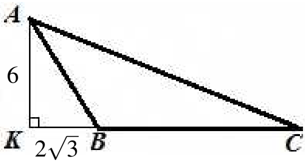
$$= \frac{AK}{\sqrt{AK^2+KB^2}} = \frac{6}{\sqrt{6^2+(2\sqrt{3})^2}} = \frac{6}{\sqrt{36+12}} = \frac{6}{\sqrt{48}} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отже, $AC = 2R\sin\angle ABC = 2\cdot 15\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 45$.

Відповідь: 45.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). У трикутнику ABC основа висоти AK лежить на продовженні сторони BC (див. рисунок). $AK = 6$, $KB = 2\sqrt{3}$. Радіус описаного навколо трикутника ABC кола дорівнює $15\sqrt{3}$. Визначте довжину AC.



Розв'язання. Для радіуса R кола, описанного навколо $\triangle ABC$, справедлива формула: $R = \dfrac{AC}{2\sin\angle ABC}$, звідки $AC = 2R\sin\angle ABC$.

Оскільки $\sin\angle ABC = \sin(\pi - \angle ABK) = \sin\angle ABK$, то з $\triangle AKB$ за означенням синуса маємо: $\sin\angle ABK = \dfrac{AK}{AB} =$

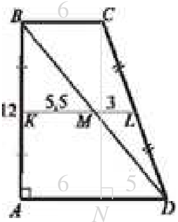
$$= \frac{AK}{\sqrt{AK^2+KB^2}} = \frac{6}{\sqrt{6^2+(2\sqrt{3})^2}} = \frac{6}{\sqrt{36+12}} = \frac{6}{\sqrt{48}} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отже, $AC = 2R\sin\angle ABC = 2\cdot 15\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 45$.

Відповідь: 45.

Приклади із ЗНО

П р и к л а д 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2009 р.). У трапеції $ABCD$: $\angle A = 90°$, $AB = 12$ см (див. рисунок). Діагональ BD ділить середню лінію KL трапеції на відрізки KM і ML, причому $KM = 5{,}5$ см, $ML = 3$ см. Обчисліть периметр трапеції $ABCD$ (у см).



Р о з в' я з а н н я. Оскільки KM і ML є середніми лініями відповідно трикутників ABD і BDC, то $AD = 2 \cdot KM = 11$ і $BC = 2 \cdot ML = 6$. Проведемо висоту трапеції CN до основи AD. Тоді $CN = AB = 12$ і $ND = AD - BC = 5$.

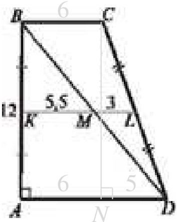
Тепер за теоремою Піфагора з $\triangle CND$ знаходимо $CD = \sqrt{CN^2 + ND^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$.

Отже, периметр трапеції $ABCD$:
$P = AB + BC + CD + AD = 12 + 6 + 13 + 11 = 42$ (см).

В і д п о в і д ь: 42.

Приклади із ЗНО

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2009 р.). У трапеції $ABCD$: $\angle A = 90°$, $AB = 12$ см (див. рисунок). Діагональ BD ділить середню лінію KL трапеції на відрізки KM і ML, причому $KM = 5,5$ см, $ML = 3$ см. Обчисліть периметр трапеції $ABCD$ (у см).



Розв'язання. Оскільки KM і ML є середніми лініями відповідно трикутників ABD і BDC, то $AD = 2 \cdot KM = 11$ і $BC = 2 \cdot ML = 6$.

Проведемо висоту трапеції CN до основи AD. Тоді $CN = AB = 12$ і $ND = AD - BC = 5$.

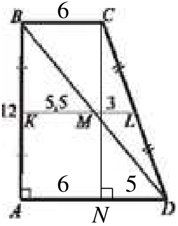
Тепер за теоремою Піфагора з $\triangle CND$ знаходимо $CD = \sqrt{CN^2 + ND^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$.

Отже, периметр трапеції $ABCD$:
$P = AB + BC + CD + AD = 12 + 6 + 13 + 11 = 42$ (см).

Відповідь: 42.

Приклади із ЗНО

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2009 р.). У трапеції $ABCD$: $\angle A = 90°$, $AB = 12$ см (див. рисунок). Діагональ BD ділить середню лінію KL трапеції на відрізки KM і ML, причому $KM = 5,5$ см, $ML = 3$ см. Обчисліть периметр трапеції $ABCD$ (у см).



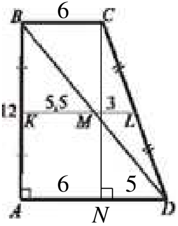
Розв'язання. Оскільки KM і ML є середніми лініями відповідно трикутників ABD і BDC, то
$AD = 2 \cdot KM = 11$ і $BC = 2 \cdot ML = 6$.
Проведемо висоту трапеції CN до основи AD. Тоді $CN = AB = 12$ і $ND = AD - BC = 5$.

Тепер за теоремою Піфагора з $\triangle CND$ знаходимо
$CD = \sqrt{CN^2 + ND^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$.
Отже, периметр трапеції $ABCD$:
$P = AB + BC + CD + AD = 12 + 6 + 13 + 11 = 42$ (см).

Відповідь: 42.

Приклади із ЗНО

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2009 р.). У трапеції $ABCD$: $\angle A = 90°$, $AB = 12$ см (див. рисунок). Діагональ BD ділить середню лінію KL трапеції на відрізки KM і ML, причому $KM = 5,5$ см, $ML = 3$ см. Обчисліть периметр трапеції $ABCD$ (у см).



Розв'язання. Оскільки KM і ML є середніми лініями відповідно трикутників ABD і BDC, то

$AD = 2 \cdot KM = 11$ і $BC = 2 \cdot ML = 6$.

Проведемо висоту трапеції CN до основи AD. Тоді $CN = AB = 12$ і $ND = AD - BC = 5$.

Тепер за теоремою Піфагора з $\triangle CND$ знаходимо

$CD = \sqrt{CN^2 + ND^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$.

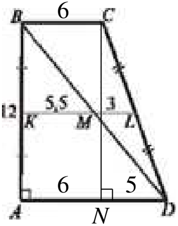
Отже, периметр трапеції $ABCD$:

$P = AB + BC + CD + AD = 12 + 6 + 13 + 11 = 42$ (см).

Відповідь: 42.

Приклади із ЗНО

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2009 р.). У трапеції $ABCD$: $\angle A = 90°$, $AB = 12$ см (див. рисунок). Діагональ BD ділить середню лінію KL трапеції на відрізки KM і ML, причому $KM = 5,5$ см, $ML = 3$ см. Обчисліть периметр трапеції $ABCD$ (у см).



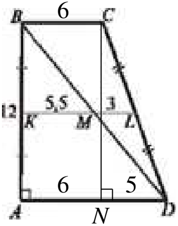
Розв'язання. Оскільки KM і ML є середніми лініями відповідно трикутників ABD і BDC, то
$AD = 2 \cdot KM = 11$ і $BC = 2 \cdot ML = 6$.
Проведемо висоту трапеції CN до основи AD. Тоді $CN = AB = 12$ і $ND = AD - BC = 5$.

Тепер за теоремою Піфагора з $\triangle CND$ знаходимо
$CD = \sqrt{CN^2 + ND^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$.
Отже, периметр трапеції $ABCD$:
$P = AB + BC + CD + AD = 12 + 6 + 13 + 11 = 42$ (см).

Відповідь: 42.

Приклади із ЗНО

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2009 р.). У трапеції $ABCD$: $\angle A = 90°$, $AB = 12$ см (див. рисунок). Діагональ BD ділить середню лінію KL трапеції на відрізки KM і ML, причому $KM = 5,5$ см, $ML = 3$ см. Обчисліть периметр трапеції $ABCD$ (у см).



Розв'язання. Оскільки KM і ML є середніми лініями відповідно трикутників ABD і BDC, то $AD = 2 \cdot KM = 11$ і $BC = 2 \cdot ML = 6$. Проведемо висоту трапеції CN до основи AD. Тоді $CN = AB = 12$ і $ND = AD - BC = 5$.

Тепер за теоремою Піфагора з $\triangle CND$ знаходимо $CD = \sqrt{CN^2 + ND^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$.

Отже, периметр трапеції $ABCD$:

$P = AB + BC + CD + AD = 12 + 6 + 13 + 11 = 42$ (см).

Відповідь: 42.