Системи і сукупності

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 4 (частина перша)

Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Система рівнянь і нерівностей з однією невідомою

- Система рівнянь і нерівностей з однією невідомою x – це вираз виду

$$\begin{cases} f_1(x) = g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_n(x) \neq g_n(x), \end{cases} \qquad (1)$$

що містить n умов, кожна з яких є або рівнянням, або нерівністю.

- Розв'язком системи (1) називається те значення x, яке задовольняє усі умови системи.

Це означає, що множиною розв'язків системи (1) є перетин множин розв'язків кожної з умов системи.

Система рівнянь і нерівностей з однією невідомою

- Система рівнянь і нерівностей з однією невідомою x – це вираз виду

$$\begin{cases} f_1(x) = g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x), \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x) \neq g_n(x), \end{cases} \qquad (1)$$

  що містить n умов, кожна з яких є або рівнянням, або нерівністю.

- Розв'язком системи (1) називається те значення x, яке задовольняє усі умови системи.

Це означає, що множиною розв'язків системи (1) є перетин множин розв'язків кожної з умов системи.

Система рівнянь і нерівностей з однією невідомою

- Система рівнянь і нерівностей з однією невідомою x – це вираз виду

$$\begin{cases} f_1(x) = g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x), \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x) \neq g_n(x), \end{cases} \qquad (1)$$

що містить n умов, кожна з яких є або рівнянням, або нерівністю.

- Розв'язком системи (1) називається те значення x, яке задовольняє усі умови системи.

Це означає, що множиною розв'язків системи (1) є перетин множин розв'язків кожної з умов системи.

Система рівнянь і нерівностей з однією невідомою

Отже, знаходимо множину розв'язків системи

$$\begin{cases} f_1(x) = g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x), \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x) \neq g_n(x), \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in P_1\,, \\ x \in P_2\,, \\ \dots\dots\dots \\ x \in P_n\,, \end{cases} \Longleftrightarrow x \in P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_n\,,$$

перетинаючи множини $P_1, P_2, \ldots, P_n$ розв'язків кожної з умов системи.

При цьому

- не рекомендується знаходити перетин більш, ніж двох множин, на одному малюнку.

Система рівнянь і нерівностей з однією невідомою

Отже, знаходимо множину розв'язків системи

$$\begin{cases} f_1(x) = g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_n(x) \neq g_n(x), \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in P_1\,, \\ x \in P_2\,, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x \in P_n\,, \end{cases} \Longleftrightarrow x \in P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_n\,,$$

перетинаючи множини $P_1, P_2, \ldots, P_n$ розв'язків кожної з умов системи.

При цьому

- не рекомендується знаходити перетин більш, ніж двох множин, на одному малюнку.

Приклад (область визначення функції)

Приклад 1. Знайти область визначення функції

$$y=\sqrt{64-x^2}-\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{6-2x}. \qquad (2)$$

Розв'язання. Функція y визначена, якщо визначені всі квадратні корені, які містяться у виразі (2), тобто якщо підкореневі вирази — невід'ємні. Тому, знайдемо область визначення $D(y)$ функції y, розв'язуючи систему нерівностей

$$D(y):\quad \begin{cases} 64-x^2\geq 0, \\ x^2-4x+3\geq 0, \\ 6-2x\geq 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо кожну з нерівностей системи.

Приклад (область визначення функції)

Приклад 1. Знайти область визначення функції

$$y=\sqrt{64-x^2}-\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{6-2x}. \qquad (2)$$

Розв'язання. Функція y визначена, якщо визначені всі квадратні корені, які містяться у виразі (2), тобто якщо підкореневі вирази — невід'ємні. Тому, знайдемо область визначення $D(y)$ функції y, розв'язуючи систему нерівностей

$$D(y)\ :\quad \begin{cases} 64-x^2\geq 0\,,\\ x^2-4x+3\geq 0\,,\\ 6-2x\geq 0\,. \end{cases}$$

Розв'яжемо кожну з нерівностей системи.

Приклад (область визначення функції)

Приклад 1. Знайти область визначення функції

$$y = \sqrt{64 - x^2} - \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{6 - 2x}. \qquad (2)$$

Розв'язання. Функція y визначена, якщо визначені всі квадратні корені, які містяться у виразі (2), тобто якщо підкореневі вирази — невід'ємні. Тому, знайдемо область визначення $D(y)$ функції y, розв'язуючи систему нерівностей

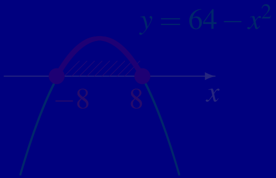
$$D(y)\ :\quad \begin{cases} 64 - x^2 \geq 0\,, \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0\,, \\ 6 - 2x \geq 0\,. \end{cases}$$

Розв'яжемо кожну з нерівностей системи.

Приклад (область визначення функції)

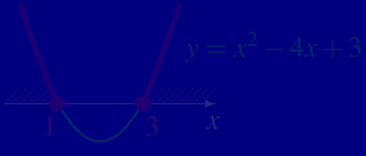
Квадратні нерівності системи розв'язуємо графічним методом:

1) $64 - x^2 \geq 0$



$x \in [-8; 8]$

2) $x^2 - 4x + 3 \geq 0$



$x \in (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$

3) Розв'язуючи лінійну нерівність системи, одержуємо

$6 - 2x \geq 0 \iff 6 \geq 2x \iff 2x \leq 6 \iff x \leq 3 \iff x \in (-\infty, 3]$.

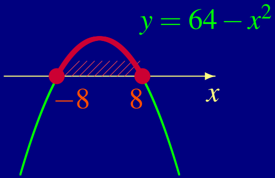
Отже, після розв'язання нерівностей одержуємо систему

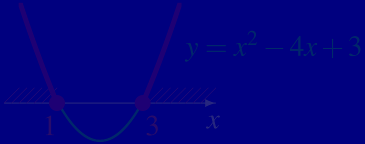
Приклад (область визначення функції)

Квадратні нерівності системи розв'язуємо графічним методом:

1) $64 - x^2 \geq 0$

2) $x^2 - 4x + 3 \geq 0$





$x \in [-8; 8]$

$x \in (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$

3) Розв'язуючи лінійну нерівність системи, одержуємо

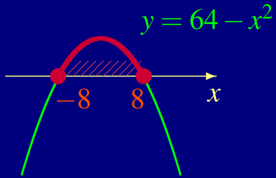
$6 - 2x \geq 0 \Longleftrightarrow 6 \geq 2x \Longleftrightarrow 2x \leq 6 \Longleftrightarrow x \leq 3 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 3]$.

Отже, після розв'язання нерівностей одержуємо систему

Приклад (область визначення функції)

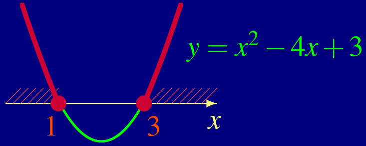
Квадратні нерівності системи розв'язуємо графічним методом:

1) $64 - x^2 \geq 0$



$x \in [-8; 8]$

2) $x^2 - 4x + 3 \geq 0$



$x \in (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$

3) Розв'язуючи лінійну нерівність системи, одержуємо

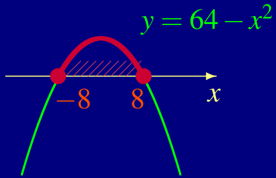
$6 - 2x \geq 0 \Longleftrightarrow 6 \geq 2x \Longleftrightarrow 2x \leq 6 \Longleftrightarrow x \leq 3 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 3]$.

Отже, після розв'язання нерівностей одержуємо систему

Приклад (область визначення функції)

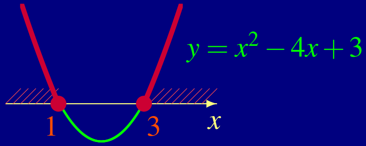
Квадратні нерівності системи розв'язуємо графічним методом:

1) $64 - x^2 \geq 0$



$x \in [-8; 8]$

2) $x^2 - 4x + 3 \geq 0$



$x \in (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$

3) Розв'язуючи лінійну нерівність системи, одержуємо

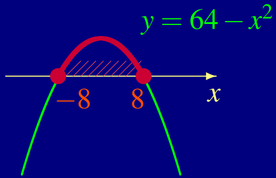
$$6 - 2x \geq 0 \Longleftrightarrow 6 \geq 2x \Longleftrightarrow 2x \leq 6 \Longleftrightarrow x \leq 3 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 3].$$

Отже, після розв'язання нерівностей одержуємо систему

Приклад (область визначення функції)

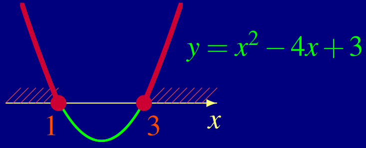
Квадратні нерівності системи розв'язуємо графічним методом:

1) $64 - x^2 \geq 0$



$x \in [-8; 8]$

2) $x^2 - 4x + 3 \geq 0$



$x \in (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$

3) Розв'язуючи лінійну нерівність системи, одержуємо

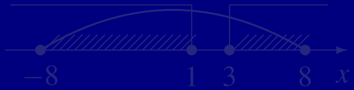
$6 - 2x \geq 0 \Longleftrightarrow 6 \geq 2x \Longleftrightarrow 2x \leq 6 \Longleftrightarrow x \leq 3 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 3]$.

Отже, після розв'язання нерівностей одержуємо систему

Приклад (область визначення функції)

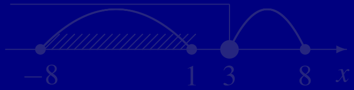
$$\begin{cases} x \in [-8;8], & \mathrm{I} \\ x \in (-\infty, 1] \cup [3;\infty), & \mathrm{II} \\ x \in (-\infty, 3]. & \mathrm{III} \end{cases}$$

Знаходимо перетин множин $\mathrm{I} = [-8;8]$ і $\mathrm{II} = (-\infty, 1] \cup [3;\infty)$:



$$\mathrm{I} \cap \mathrm{II} = [-8;1] \cup [3;8]$$

Одержану множину, яку позначимо $\mathrm{IV} = [-8;1] \cup [3;8]$, перетнемо з множиною $\mathrm{III} = (-\infty, 3]$:



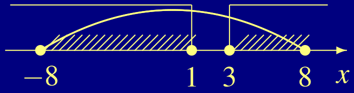
$$\mathrm{IV} \cap \mathrm{III} = [-8;1] \cup \{3\}$$

Відповідь: $D(y) = [-8;1] \cup \{3\}$.

Приклад (область визначення функції)

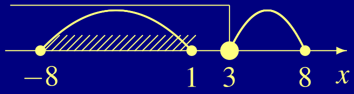
$$\begin{cases} x \in [-8;8]\,, & \mathrm{I} \\ x \in (-\infty,1] \cup [3;\infty)\,, & \mathrm{II} \\ x \in (-\infty,3]\,. & \mathrm{III} \end{cases}$$

Знаходимо перетин множин $\mathrm{I} = [-8;8]$ і $\mathrm{II} = (-\infty,1] \cup [3;\infty)$:



$$\mathrm{I} \cap \mathrm{II} = [-8;1] \cup [3;8]$$

Одержану множину, яку позначимо $\mathrm{IV} = [-8;1] \cup [3;8]$, перетнемо з множиною $\mathrm{III} = (-\infty,3]$:



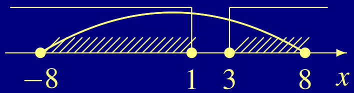
$$\mathrm{IV} \cap \mathrm{III} = [-8;1] \cup \{3\}$$

Відповідь: $D(y) = [-8;1] \cup \{3\}$.

Приклад (область визначення функції)

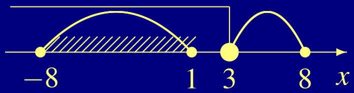
$$\begin{cases} x \in [-8;8]\,, & \mathrm{I} \\ x \in (-\infty,1] \cup [3;\infty)\,, & \mathrm{II} \\ x \in (-\infty,3]\,. & \mathrm{III} \end{cases}$$

Знаходимо перетин множин $\mathrm{I} = [-8;8]$ і $\mathrm{II} = (-\infty,1] \cup [3;\infty)$:



$\mathrm{I} \cap \mathrm{II} = [-8;1] \cup [3;8]$

Одержану множину, яку позначимо $\mathrm{IV} = [-8;1] \cup [3;8]$, перетнемо з множиною $\mathrm{III} = (-\infty,3]$:



$\mathrm{IV} \cap \mathrm{III} = [-8;1] \cup \{3\}$

Відповідь: $D(y) = [-8;1] \cup \{3\}$.

Сукупність рівнянь и нерівностей с однією невідомою

- Сукупність рівнянь і нерівностей з однією невідомою x – це вираз виду

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) = g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x), \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x) \neq g_n(x), \end{array}\right. \qquad (3)$$

що містить n умов, кожна з яких є або рівнянням, або нерівністю.

- Розв'язком сукупності (3) називається те значення x, яке задовольняє хоча б одну з умов сукупності.

Це означає, що множиною розв'язків сукупності (3) є об'єднання множин розв'язків кожної з умов сукупності.

Сукупність рівнянь и нерівностей с однією невідомою

- Сукупність рівнянь і нерівностей з однією невідомою x – це вираз виду

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) = g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x), \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x) \neq g_n(x), \end{array}\right. \qquad (3)$$

  що містить n умов, кожна з яких є або рівнянням, або нерівністю.
- Розв'язком сукупності (3) називається те значення x, яке задовольняє хоча б одну з умов сукупності.

Це означає, що множиною розв'язків сукупності (3) є об'єднання множин розв'язків кожної з умов сукупності.

Сукупність рівнянь и нерівностей с однією невідомою

- Сукупність рівнянь і нерівностей з однією невідомою x – це вираз виду

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) = g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x), \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x) \neq g_n(x), \end{array}\right. \tag{3}$$

  що містить n умов, кожна з яких є або рівнянням, або нерівністю.
- Розв'язком сукупності (3) називається те значення x, яке задовольняє хоча б одну з умов сукупності.

Це означає, що множиною розв'язків сукупності (3) є об'єднання множин розв'язків кожної з умов сукупності.

Сукупність рівнянь і нерівностей з однією невідомою

Отже, знаходимо множину розв'язків сукупності

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x)=g_1(x), \\ f_2(x)>g_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_n(x)\neq g_n(x), \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in P_1\,, \\ x\in P_2\,, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x\in P_n\,, \end{array}\right. \Longleftrightarrow x\in P_1\cup P_2\cup\ldots\cup P_n\,,$$

об'єднуючи множини $P_1, P_2, \ldots, P_n$ розв'язків кожної з умов сукупності.

При цьому на одному малюнку можна знайти об'єднання будь-якої скінченної кількості множин.

Сукупність рівнянь і нерівностей з однією невідомою

Отже, знаходимо множину розв'язків сукупності

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x)=g_1(x), \\ f_2(x)>g_2(x), \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x)\neq g_n(x), \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x\in P_1\,, \\ x\in P_2\,, \\ \dots\dots\dots \\ x\in P_n\,, \end{array}\right. \iff x\in P_1\cup P_2\cup\ldots\cup P_n\,,$$

об'єднуючи множини $P_1, P_2, \ldots, P_n$ розв'язків кожної з умов сукупності.

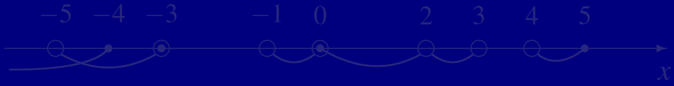
При цьому на одному малюнку можна знайти об'єднання будь-якої скінченної кількості множин.

Сукупність рівнянь і нерівностей з однією невідомою

Наприклад, знайдемо множину розв'язків сукупності

$$\left[\begin{array}{ll} x \in (-\infty, -4] \cup [0;2)\,, & \quad A \\ x \in (-5;-3) \cup (2;3)\,, & \quad B \\ x \in \{-3\} \cup (-1;0)\,, & \quad C \\ x \in (4;5]\,. & \quad D \end{array}\right.$$

Виконаємо об'єднання множин $A \cup B \cup C \cup D$:



-3 належить множині C
0 належить множині A
2 не належить жодній з множин

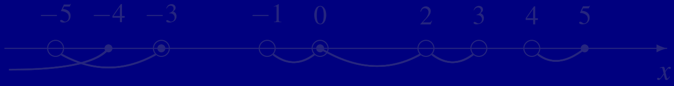
Отже,
$A \cup B \cup C \cup D = (-\infty, -3] \cup (-1;2) \cup (2;3) \cup (4;5]\,.$

Сукупність рівнянь і нерівностей з однією невідомою

Наприклад, знайдемо множину розв'язків сукупності

$$\left[\begin{array}{ll} x \in (-\infty, -4] \cup [0;2)\,, & \quad A \\ x \in (-5;-3) \cup (2;3)\,, & \quad B \\ x \in \{-3\} \cup (-1;0)\,, & \quad C \\ x \in (4;5]\,. & \quad D \end{array}\right.$$

Виконаємо об'єднання множин $A \cup B \cup C \cup D$:



-3 належить множині C
0 належить множині A
2 не належить жодній з множин

Отже,

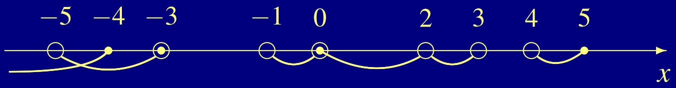
$$A \cup B \cup C \cup D = (-\infty, -3] \cup (-1;2) \cup (2;3) \cup (4;5]\,.$$

Сукупність рівнянь і нерівностей з однією невідомою

Наприклад, знайдемо множину розв'язків сукупності

$$\left[\begin{array}{ll} x \in (-\infty, -4] \cup [0;2)\,, & \quad A \\ x \in (-5;-3) \cup (2;3)\,, & \quad B \\ x \in \{-3\} \cup (-1;0)\,, & \quad C \\ x \in (4;5]\,. & \quad D \end{array}\right.$$

Виконаємо об'єднання множин $A \cup B \cup C \cup D$:



-3 належить множині C
0 належить множині A
2 не належить жодній з множин

Отже,

$$A \cup B \cup C \cup D = (-\infty, -3] \cup (-1;2) \cup (2;3) \cup (4;5]\,.$$

Системи і сукупності з умовами, що не мають розв'язків

Виконуючи рівносильні перетворення рівнянь і нерівностей, часто доводиться переходити до систем чи сукупностей.

Нерідко одна з умов системи чи сукупності не має розв'язків.

Слід запам'ятати, що $A \cap \varnothing = \varnothing$, а $A \cup \varnothing = A$.

Тому
$$\begin{cases} x \in A, \\ x \in \varnothing, \end{cases} \iff x \in \varnothing, \quad \text{тобто}$$

- якщо одна з умов системи не має розв'язків, то така система розв'язків не має.

Навпаки,

- якщо одна з умов сукупності не має розв'язків, то цю умову можна відкинути:

$$\left[\begin{array}{l} x \in A, \\ x \in \varnothing, \end{array} \right. \iff x \in A.$$

Системи і сукупності з умовами, що не мають розв'язків

Виконуючи рівносильні перетворення рівнянь і нерівностей, часто доводиться переходити до систем чи сукупностей.

Нерідко одна з умов системи чи сукупності не має розв'язків.

Слід запам'ятати, що $A \cap \varnothing = \varnothing$, а $A \cup \varnothing = A$.

Тому $\begin{cases} x \in A, \\ x \in \varnothing, \end{cases} \iff x \in \varnothing,$ тобто

- якщо одна з умов системи не має розв'язків, то така система розв'язків не має.

Навпаки,

- якщо одна з умов сукупності не має розв'язків, то цю умову можна відкинути:

$$\left[\begin{array}{l} x \in A, \\ x \in \varnothing, \end{array} \right. \iff x \in A.$$

Системи і сукупності з умовами, що не мають розв'язків

Виконуючи рівносильні перетворення рівнянь і нерівностей, часто доводиться переходити до систем чи сукупностей.

Нерідко одна з умов системи чи сукупності не має розв'язків.

Слід запам'ятати, що $A \cap \varnothing = \varnothing$, а $A \cup \varnothing = A$.

Тому $$\begin{cases} x \in A, \\ x \in \varnothing, \end{cases} \iff x \in \varnothing, \quad \text{тобто}$$

- якщо одна з умов системи не має розв'язків, то така система розв'язків не має.

Навпаки,

- якщо одна з умов сукупності не має розв'язків, то цю умову можна відкинути:

$$\left[\begin{array}{l} x \in A, \\ x \in \varnothing, \end{array} \right. \iff x \in A.$$

Системи і сукупності з умовами, що не мають розв'язків

Виконуючи рівносильні перетворення рівнянь і нерівностей, часто доводиться переходити до систем чи сукупностей.
Нерідко одна з умов системи чи сукупності не має розв'язків.
Слід запам'ятати, що $A \cap \varnothing = \varnothing$, а $A \cup \varnothing = A$.
Тому

$$\begin{cases} x \in A, \\ x \in \varnothing, \end{cases} \iff x \in \varnothing, \quad \text{тобто}$$

- якщо одна з умов системи не має розв'язків, то така система розв'язків не має.

Навпаки,

- якщо одна з умов сукупності не має розв'язків, то цю умову можна відкинути:

$$\left[\begin{array}{l} x \in A, \\ x \in \varnothing, \end{array} \right. \iff x \in A.$$

Системи і сукупності з умовами, що не мають розв'язків

Виконуючи рівносильні перетворення рівнянь і нерівностей, часто доводиться переходити до систем чи сукупностей.

Нерідко одна з умов системи чи сукупності не має розв'язків.

Слід запам'ятати, що $A \cap \varnothing = \varnothing$, а $A \cup \varnothing = A$.

Тому
$$\begin{cases} x \in A\,, \\ x \in \varnothing\,, \end{cases} \Longleftrightarrow x \in \varnothing\,, \quad \text{тобто}$$

- якщо одна з умов системи не має розв'язків, то така система розв'язків не має.

Навпаки,

- якщо одна з умов сукупності не має розв'язків, то цю умову можна відкинути:

$$\left[\begin{array}{l} x \in A\,, \\ x \in \varnothing\,, \end{array} \right. \Longleftrightarrow x \in A\,.$$

Системи і сукупності з умовами, що не мають розв'язків

Проілюструємо прикладами:

- якщо одна з умов системи не має розв'язків, то така система розв'язків не має:

$$\begin{cases} x^2+2=0, \\ \sqrt{x^2+2x+1}\ \operatorname{ctg}\frac{x}{2} \geq 0, \\ \dfrac{\cos x+\sin 2x}{\cos 2x-\sin x}=0, \end{cases} \iff x \in \varnothing,$$

- якщо одна з умов сукупності не має розв'язків, то цю умову можна відкинути:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+2=0, \\ x<3, \end{array} \right. \iff x<3 \iff x \in (-\infty, 3),$$

оскільки рівняння $x^2+2=0$ не має розв'язків.

Системи і сукупності з умовами, що не мають розв'язків

Зокрема,

- якщо в систему входить хибна числова рівність чи нерівність, то така система не має розв'язків:

$$\begin{cases} x \in [1;2], \\ 0 < 0 \quad \text{(хибна нерівність)}, \end{cases} \iff x \in \varnothing\,.$$

- якщо в сукупність входить хибна числова рівність (чи нерівність), то цю рівність (чи нерівність) можна відкинути:

$$\left[\begin{array}{l} x \in [0;1], \\ 1 = 0 \quad \text{(хибна рівність)}, \end{array}\right. \iff x \in [0;1]\,.$$

Системи і сукупності з умовами, що не мають розв'язків

Зокрема,

- якщо в систему входить хибна числова рівність чи нерівність, то така система не має розв'язків:

$$\begin{cases} x \in [1;2], \\ 0 < 0 \quad \text{(хибна нерівність)}, \end{cases} \iff x \in \varnothing\,.$$

- якщо в сукупність входить хибна числова рівність (чи нерівність), то цю рівність (чи нерівність) можна відкинути:

$$\left[\begin{array}{l} x \in [0;1], \\ 1 = 0 \quad \text{(хибна рівність)}, \end{array}\right. \iff x \in [0;1]\,.$$