Рівняння і нерівності з модулем

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 4 (частина друга)

Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Означення модуля

- Модуль виразу $f(x)$ визначається у наступний спосіб:

$$|f(x)| = \left[\begin{array}{ll} f(x), & \text{якщо } f(x) \geq 0\,, \\ -f(x), & \text{якщо } f(x) < 0\,. \end{array} \right. \qquad (1)$$

$|a|$ є невід'ємним числом для будь-якого дійсного числа a, тобто $|a| \geq 0$. Наприклад, $|1{,}4| = 1{,}4$, $|-0{,}33| = -(-0{,}33) = 0{,}33$, $|0| = 0$.

Оскільки $0 = -0$, то рівності (1) можна також надати вигляду:

$$|f(x)| = \left[\begin{array}{ll} f(x), & \text{якщо } f(x) > 0\,, \\ -f(x), & \text{якщо } f(x) \leq 0\,. \end{array} \right.$$

Означення модуля

- Модуль виразу $f(x)$ визначається у наступний спосіб:

$$|f(x)| = \left[\begin{array}{ll} f(x), & \text{якщо } f(x) \geq 0\,, \\ -f(x), & \text{якщо } f(x) < 0\,. \end{array}\right. \tag{1}$$

$|a|$ є невід'ємним числом для будь-якого дійсного числа a, тобто $|a| \geq 0$. Наприклад, $|1,4| = 1,4$, $|-0,33| = -(-0,33) = 0,33$, $|0| = 0$.

Оскільки $0 = -0$, то рівності (1) можна також надати вигляду:

$$|f(x)| = \left[\begin{array}{ll} f(x), & \text{якщо } f(x) > 0\,, \\ -f(x), & \text{якщо } f(x) \leq 0\,. \end{array}\right.$$

Означення модуля

- Модуль виразу $f(x)$ визначається у наступний спосіб:

$$|f(x)| = \left[\begin{array}{ll} f(x), & \text{якщо } f(x) \geq 0\,, \\ -f(x), & \text{якщо } f(x) < 0\,. \end{array} \right. \qquad (1)$$

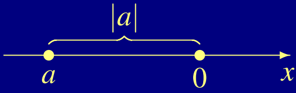
$|a|$ є невід'ємним числом для будь-якого дійсного числа a, тобто $|a| \geq 0$. Наприклад, $|1,4| = 1,4$, $|-0,33| = -(-0,33) = 0,33$, $|0| = 0$.

Оскільки $0 = -0$, то рівності (1) можна також надати вигляду:

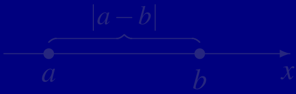
$$|f(x)| = \left[\begin{array}{ll} f(x), & \text{якщо } f(x) > 0\,, \\ -f(x), & \text{якщо } f(x) \leq 0\,. \end{array} \right.$$

Геометричний зміст модуля

- $|a|$ – це відстань на числовій прямій від точки a до нуля:

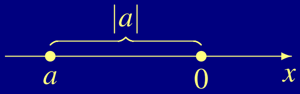


- $|a-b|$ – це відстань між точками a і b числової прямої:

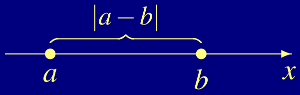


Геометричний зміст модуля

- $|a|$ – це відстань на числовій прямій від точки a до нуля:



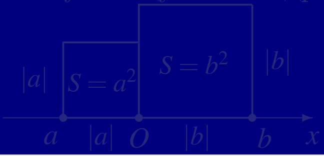
- $|a-b|$ – це відстань між точками a і b числової прямої:



Основні властивості модуля

1) $|a| \geq 0$ при всіх $a \in \mathbf{R}$;
2) $|a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$;
3) $|ab| = |a| \cdot |b|$. Зокрема, $|-a| = |a|$;
4) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$;
5) $|a+b| \leq |a| + |b|$;
6) $|a-b| \geq \Big||a| - |b|\Big|$;
7) $|a| < |b| \Longleftrightarrow a^2 < b^2$.

Геометричний зміст властивості 7: з двох квадратів більшу площу має квадрат з більшою стороною



Основні властивості модуля

1) $|a| \geq 0$ при всіх $a \in \mathbf{R}$;

2) $|a| = 0 \iff a = 0$;

3) $|ab| = |a| \cdot |b|$. Зокрема, $|-a| = |a|$;

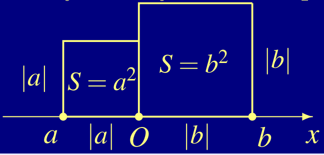
4) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$;

5) $|a+b| \leq |a| + |b|$;

6) $|a-b| \geq \Big||a| - |b|\Big|$;

7) $|a| < |b| \iff a^2 < b^2$.

Геометричний зміст властивості 7: з двох квадратів більшу площу має квадрат з більшою стороною



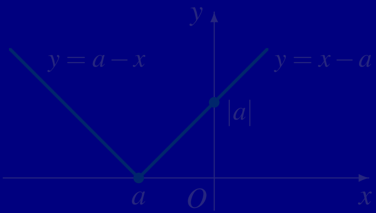
Графік функції $y = |x - a|$, где $a \in \mathbf{R}$

За означенням модуля маємо

$$|x-a| = \left[\begin{array}{ll} x-a, & \text{якщо } x \geq a, \\ -(x-a), & \text{якщо } x < a. \end{array}\right.$$

Тому графік функції $y = |x-a|$ складається з двох променів, що утворюють прямий кут:

$y = |x-a|$

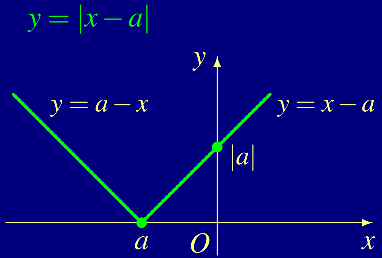


Графік функції $y = |x - a|$, где $a \in \mathbf{R}$

За означенням модуля маємо

$$|x-a| = \left[\begin{array}{ll} x-a, & \text{якщо } x \geq a, \\ -(x-a), & \text{якщо } x < a. \end{array}\right.$$

Тому графік функції $y = |x-a|$ складається з двох променів, що утворюють прямий кут:

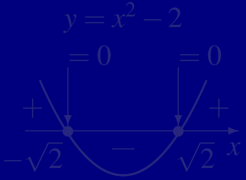


Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

Основним методом розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем є метод інтервалів.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $|x^2-2|=-x$.

Розв'язання. Зобразимо криву знаків підмодульного виразу:



Отже,

$x^2-2\geq 0 \Longleftrightarrow x\in(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\infty)$, I

$x^2-2<0 \Longleftrightarrow x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, II.

Оскільки за означенням модуля на множинах I і II модуль $|x^2-2|$ розкривається по-різному:

$|x^2-2|=x^2-2$ при $x\in(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\infty)$ і

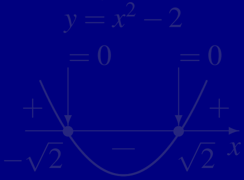
$|x^2-2|=-(x^2-2)$ при $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$,

Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

Основним методом розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем є метод інтервалів.

П р и к л а д 1. Розв'язати рівняння $|x^2-2| = -x$.

Р о з в' я з а н н я. Зобразимо криву знаків підмодульного виразу:



Отже,

$x^2-2 \geq 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty)$, I

$x^2-2 < 0 \Longleftrightarrow x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, II.

Оскільки за означенням модуля на множинах I і II модуль $|x^2-2|$ розкривається по-різному:

$|x^2-2| = x^2-2$ при $x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty)$ і

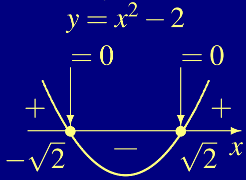
$|x^2-2| = -(x^2-2)$ при $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$,

Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

Основним методом розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем є метод інтервалів.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $|x^2-2|=-x$.

Розв'язання. Зобразимо криву знаків підмодульного виразу:



Отже,

$x^2-2\geq 0 \Longleftrightarrow x\in(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\infty)$, I

$x^2-2<0 \Longleftrightarrow x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, II.

Оскільки за означенням модуля на множинах I і II модуль $|x^2-2|$ розкривається по-різному:

$|x^2-2|=x^2-2$ при $x\in(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\infty)$ і

$|x^2-2|=-(x^2-2)$ при $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$,

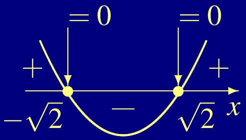
Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

Основним методом розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем є метод інтервалів.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $|x^2-2|=-x$.

Розв'язання. Зобразимо криву знаків підмодульного виразу:

$y=x^2-2$



Отже,

$x^2-2\geq 0 \iff x\in(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\infty)$, I

$x^2-2<0 \iff x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, II.

Оскільки за означенням модуля на множинах I і II модуль $|x^2-2|$ розкривається по-різному:

$|x^2-2|=x^2-2$ при $x\in(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\infty)$ і

$|x^2-2|=-(x^2-2)$ при $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$,

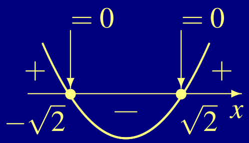
Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

Основним методом розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем є метод інтервалів.

П р и к л а д 1. Розв'язати рівняння $|x^2-2|=-x$.

Р о з в' я з а н н я. Зобразимо криву знаків підмодульного виразу:

$y=x^2-2$



Отже,

$x^2-2\geq 0 \Longleftrightarrow x\in(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\infty)$, I

$x^2-2<0 \Longleftrightarrow x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, II.

Оскільки за означенням модуля на множинах I і II модуль $|x^2-2|$ розкривається по-різному:

$|x^2-2|=x^2-2$ при $x\in(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\infty)$ і

$|x^2-2|=-(x^2-2)$ при $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$,

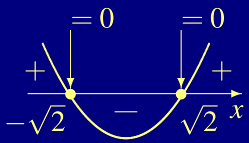
Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

Основним методом розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем є метод інтервалів.

П р и к л а д 1. Розв'язати рівняння $|x^2-2|=-x$.

Р о з в' я з а н н я. Зобразимо криву знаків підмодульного виразу:

$y=x^2-2$



Отже,

$x^2-2\geq 0 \Longleftrightarrow x\in(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\infty)$, I

$x^2-2<0 \Longleftrightarrow x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, II.

Оскільки за означенням модуля на множинах I і II модуль $|x^2-2|$ розкривається по-різному:

$|x^2-2|=x^2-2$ при $x\in(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\infty)$ і

$|x^2-2|=-(x^2-2)$ при $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$,

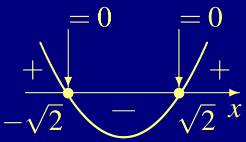
Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

Основним методом розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем є метод інтервалів.

П р и к л а д 1. Розв'язати рівняння $|x^2-2|=-x$.

Р о з в' я з а н н я. Зобразимо криву знаків підмодульного виразу:

$y=x^2-2$



Отже,

$x^2-2\geq 0 \Longleftrightarrow x\in(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\infty)$, **I**

$x^2-2<0 \Longleftrightarrow x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, **II**.

Оскільки за означенням модуля на множинах **I** і **II** модуль $|x^2-2|$ розкривається по-різному:

$|x^2-2|=x^2-2$ при $x\in(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\infty)$ і

$|x^2-2|=-(x^2-2)$ при $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$,

Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

то, розглядаючи ці два випадки, в кожному з них замінимо дане рівняння новим рівнянням, що не містить модуля.

В результаті рівняння замінюється рівносильною йому сукупністю двох систем:

$$|x^2-2|=-x \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x\in(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\infty), \quad \mathbf{I} \\ x^2-2=-x, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}), \quad \mathbf{II} \\ -(x^2-2)=-x. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Розв'яжемо квадратні рівняння систем:

1) $x^2-2=-x \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=1, \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\{-2;1\};$

2) $-(x^2-2)=-x \Leftrightarrow x^2-2=x \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-1, \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\{2;-1\}.$

Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

то, розглядаючи ці два випадки, в кожному з них замінимо дане рівняння новим рівнянням, що не містить модуля.

В результаті рівняння замінюється рівносильною йому сукупністю двох систем:

$$|x^2-2| = -x \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty), & \mathbf{I} \\ x^2 - 2 = -x, \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), & \mathbf{II} \\ -(x^2-2) = -x. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'яжемо квадратні рівняння систем:

1) $x^2-2=-x \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=1, \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \{-2;1\};$

2) $-(x^2-2)=-x \ \Leftrightarrow \ x^2-2=x \ \Leftrightarrow \ x^2-x-2=0 \ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-1, \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \{2;-1\}.$$

Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

то, розглядаючи ці два випадки, в кожному з них замінимо дане рівняння новим рівнянням, що не містить модуля.

В результаті рівняння замінюється рівносильною йому сукупністю двох систем:

$$|x^2-2|=-x \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\infty), & \mathbf{I} \\ x^2-2=-x, \end{cases} \\ \begin{cases} x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}), & \mathbf{II} \\ -(x^2-2)=-x. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'яжемо квадратні рівняння систем:

1) $x^2-2=-x \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=1, \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\{-2;1\};$

2) $-(x^2-2)=-x \Leftrightarrow x^2-2=x \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-1, \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\{2;-1\}.$

Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

то, розглядаючи ці два випадки, в кожному з них замінимо дане рівняння новим рівнянням, що не містить модуля.

В результаті рівняння замінюється рівносильною йому сукупністю двох систем:

$$|x^2-2|=-x \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\infty), & \mathbf{I} \\ x^2-2=-x, \end{cases} \\ \begin{cases} x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}), & \mathbf{II} \\ -(x^2-2)=-x. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'яжемо квадратні рівняння систем:

1) $x^2-2=-x \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=1, \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\{-2;1\};$

2) $-(x^2-2)=-x \Leftrightarrow x^2-2=x \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-1, \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\{2;-1\}.$

Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

то, розглядаючи ці два випадки, в кожному з них замінимо дане рівняння новим рівнянням, що не містить модуля.

В результаті рівняння замінюється рівносильною йому сукупністю двох систем:

$$|x^2-2|=-x \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\infty), & \textbf{I} \\ x^2-2=-x, \end{cases} \\ \begin{cases} x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}), & \textbf{II} \\ -(x^2-2)=-x. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'яжемо квадратні рівняння систем:

1) $x^2-2=-x \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=1, \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\{-2;1\};$

2) $-(x^2-2)=-x \;\Leftrightarrow\; x^2-2=x \;\Leftrightarrow\; x^2-x-2=0 \;\Leftrightarrow$

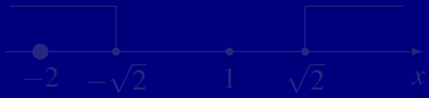
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-1, \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\{2;-1\}.$$

Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

Записуючи одержані розв'язки рівнянь замість самих рівнянь у відповідні системи, отримуємо сукупність

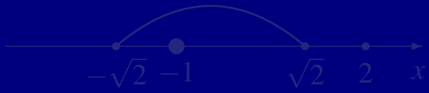
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty), & \mathbf{I} \\ x \in \{-2; 1\}, & \mathbf{III} \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), & \mathbf{II} \\ x \in \{2; -1\}. & \mathbf{IV} \end{cases} \end{array}\right.$$

Спільною точкою множин I і III є точка -2:



$$\mathrm{I} \cap \mathrm{III} = \{-2\}$$

Спільною точкою множин II і IV є точка -1:



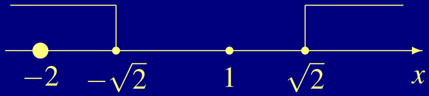
$$\mathrm{II} \cap \mathrm{IV} = \{-1\}$$

Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

Записуючи одержані розв'язки рівнянь замість самих рівнянь у відповідні системи, отримуємо сукупність

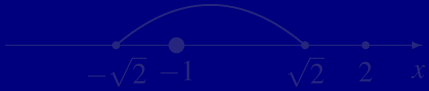
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\in(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\infty), & \mathrm{I}\\ x\in\{-2;1\}, & \mathrm{III}\end{cases}\\ \begin{cases} x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}), & \mathrm{II}\\ x\in\{2;-1\}. & \mathrm{IV}\end{cases}\end{array}\right.$$

Спільною точкою множин I і III є точка -2:



$$\mathrm{I}\cap\mathrm{III}=\{-2\}$$

Спільною точкою множин II і IV є точка -1:



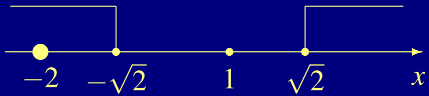
$$\mathrm{II}\cap\mathrm{IV}=\{-1\}$$

Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

Записуючи одержані розв'язки рівнянь замість самих рівнянь у відповідні системи, отримуємо сукупність

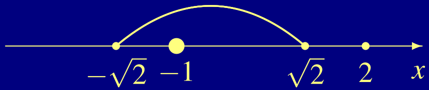
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\in(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\infty), & \mathrm{I}\\ x\in\{-2;1\}, & \mathrm{III}\end{cases}\\ \begin{cases} x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}), & \mathrm{II}\\ x\in\{2;-1\}. & \mathrm{IV}\end{cases}\end{array}\right.$$

Спільною точкою множин I і III є точка -2:



$$\mathrm{I}\cap\mathrm{III}=\{-2\}$$

Спільною точкою множин II і IV є точка -1:



$$\mathrm{II}\cap\mathrm{IV}=\{-1\}$$

Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

Отже, після розв'язання систем отримуємо сукупність

$$\left[\begin{array}{ll} x \in \{-2\}, & \quad A \\ x \in \{-1\}. & \quad B \end{array}\right.$$

Розв'язуючи сукупність, об'єднуємо множини A і B:
$A \cup B = \{-2, -1\}$, тобто дане рівняння має два корені.

Відповідь: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$.

Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

Отже, після розв'язання систем отримуємо сукупність

$$\left[\begin{array}{ll} x \in \{-2\}, & \quad A \\ x \in \{-1\}. & \quad B \end{array}\right.$$

Розв'язуючи сукупність, об'єднуємо множини A і B:
$A \cup B = \{-2, -1\}$, тобто дане рівняння має два корені.

Відповідь: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$.

Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

Отже, після розв'язання систем отримуємо сукупність

$$\left[\begin{array}{ll} x \in \{-2\}, & \quad A \\ x \in \{-1\}. & \quad B \end{array}\right.$$

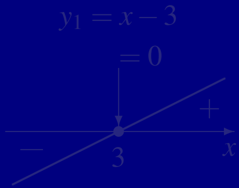
Розв'язуючи сукупність, об'єднуємо множини A і B:
$A \cup B = \{-2, -1\}$, тобто дане рівняння має два корені.

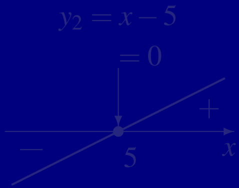
Відповідь: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$.

Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

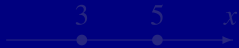
Приклад 2. Розв'язати нерівність $|x-3|+|x-5|\geq 2$.

Розв'язання. Зобразимо криві знаків підмодульних виразів:





На проміжках $(-\infty,3),(3;5),(5,\infty)$ маємо три різні комбінації знаків виразів y_1 і y_2:



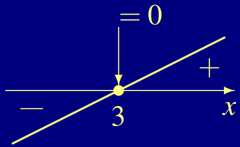
$x-3$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$+$

Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

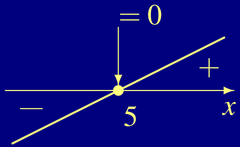
Приклад 2. Розв'язати нерівність $|x-3|+|x-5| \geq 2$.

Розв'язання. Зобразимо криві знаків підмодульних виразів:

$y_1 = x-3$



$y_2 = x-5$



На проміжках $(-\infty,3),(3;5),(5,\infty)$ маємо три різні комбінації знаків виразів y_1 і y_2:

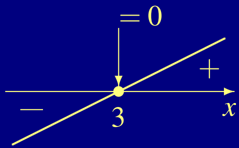
$x-3$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$+$

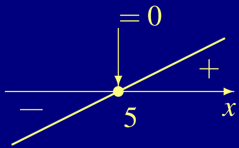
Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

Приклад 2. Розв'язати нерівність $|x-3|+|x-5| \geq 2$.

Розв'язання. Зобразимо криві знаків підмодульних виразів:

$y_1 = x-3$ $\qquad\qquad$ $y_2 = x-5$





На проміжках $(-\infty,3),(3;5),(5,\infty)$ маємо три різні комбінації знаків виразів y_1 і y_2:

$x-3$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$+$

Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

$x-3$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$+$

Далі розглянемо нерівність $|x-3|+|x-5|\geq 2$ окремо на кожному з вказаних проміжків.

Використовуючи означення модуля, замінимо цю нерівність новою (на кожному проміжку своєю) нерівністю, яка не містить модулів.
У такий спосіб, використовуючи метод інтервалів у відповідності з означенням модуля, ми розбиваємо числову пряму на три частини, при цьому точку $x=3$ можна приєднати до одного з проміжків $(-\infty,3),(3;5)$, а точку $x=5$ – до одного з проміжків $(3;5),(5,\infty)$.

Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

	$(-\infty,3)$	$[3;5)$	$[5,\infty)$
$x-3$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$+$

Наприклад, після розбиття числової прямої на проміжки $(-\infty, 3), [3;5), [5, \infty)$ отримаємо рівносильну даній нерівності сукупність трьох систем:

$$|x-3|+|x-5|\geq 2 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(-\infty,3), \\ -(x-3)-(x-5)\geq 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x\in[3;5), \\ x-3-(x-5)\geq 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x\in[5,\infty), \\ x-3+x-5\geq 2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

Розв'яжемо кожну з нерівностей, які входять до систем:

1) $-(x-3)-(x-5) \geq 2 \Longleftrightarrow -x+3-x+5 \geq 2 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow -2x \geq -6 \Longleftrightarrow x \leq 3 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 3];$

2) $x-3-(x-5) \geq 2 \Longleftrightarrow x-3-x+5 \geq 2 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 2 \geq 2$ (істина) $\Longleftrightarrow x \in \mathbf{R};$

3) $x-3+x-5 \geq 2 \Longleftrightarrow 2x-8 \geq 2 \Longleftrightarrow 2x \geq 10 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x \geq 5 \Longleftrightarrow x \in [5, \infty).$

Розв'яжемо тепер кожну з систем сукупності, яка після розв'язання нерівностей набуває вигляду:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty, 3), \\ x \in (-\infty, 3], \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [3; 5), \\ x \in \mathbf{R}, \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [5, \infty), \\ x \in [5, \infty). \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

Розв'яжемо кожну з нерівностей, які входять до систем:

1) $-(x-3)-(x-5)\geq 2 \Longleftrightarrow -x+3-x+5\geq 2 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow -2x\geq -6 \Longleftrightarrow x\leq 3 \Longleftrightarrow x\in(-\infty,3]$;

2) $x-3-(x-5)\geq 2 \Longleftrightarrow x-3-x+5\geq 2 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 2\geq 2$ (істина) $\Longleftrightarrow x\in\mathbf{R}$;

3) $x-3+x-5\geq 2 \Longleftrightarrow 2x-8\geq 2 \Longleftrightarrow 2x\geq 10 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x\geq 5 \Longleftrightarrow x\in[5,\infty)$.

Розв'яжемо тепер кожну з систем сукупності, яка після розв'язання нерівностей набуває вигляду:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\in(-\infty,3),\\ x\in(-\infty,3],\end{cases}\\ \begin{cases} x\in[3;5),\\ x\in\mathbf{R},\end{cases}\\ \begin{cases} x\in[5,\infty),\\ x\in[5,\infty).\end{cases}\end{array}\right.$$

Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

Розв'яжемо кожну з нерівностей, які входять до систем:

1) $-(x-3)-(x-5) \geq 2 \Longleftrightarrow -x+3-x+5 \geq 2 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow -2x \geq -6 \Longleftrightarrow x \leq 3 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 3];$

2) $x-3-(x-5) \geq 2 \Longleftrightarrow x-3-x+5 \geq 2 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 2 \geq 2 \quad$ (істина) $\Longleftrightarrow x \in \mathbf{R};$

3) $x-3+x-5 \geq 2 \Longleftrightarrow 2x-8 \geq 2 \Longleftrightarrow 2x \geq 10 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x \geq 5 \Longleftrightarrow x \in [5, \infty).$

Розв'яжемо тепер кожну з систем сукупності, яка після розв'язання нерівностей набуває вигляду:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty, 3), \\ x \in (-\infty, 3], \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [3;5), \\ x \in \mathbf{R}, \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [5, \infty), \\ x \in [5, \infty). \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

Розв'яжемо кожну з нерівностей, які входять до систем:

1) $-(x-3)-(x-5)\geq 2 \Longleftrightarrow -x+3-x+5\geq 2 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow -2x\geq -6 \Longleftrightarrow x\leq 3 \Longleftrightarrow x\in(-\infty,3];$

2) $x-3-(x-5)\geq 2 \Longleftrightarrow x-3-x+5\geq 2 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow 2\geq 2 \quad$ (істина) $\Longleftrightarrow x\in \mathbf{R};$

3) $x-3+x-5\geq 2 \Longleftrightarrow 2x-8\geq 2 \Longleftrightarrow 2x\geq 10 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x\geq 5 \Longleftrightarrow x\in[5,\infty).$

Розв'яжемо тепер кожну з систем сукупності, яка після розв'язання нерівностей набуває вигляду:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(-\infty,3), \\ x\in(-\infty,3], \end{cases} \\ \begin{cases} x\in[3;5), \\ x\in\mathbf{R}, \end{cases} \\ \begin{cases} x\in[5,\infty), \\ x\in[5,\infty). \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

Розв'яжемо кожну з нерівностей, які входять до систем:

1) $-(x-3)-(x-5)\geq 2 \iff -x+3-x+5\geq 2 \iff$

$\iff -2x\geq -6 \iff x\leq 3 \iff x\in(-\infty,3];$

2) $x-3-(x-5)\geq 2 \iff x-3-x+5\geq 2 \iff$

$\iff 2\geq 2$ (істина) $\iff x\in \mathbf{R};$

3) $x-3+x-5\geq 2 \iff 2x-8\geq 2 \iff 2x\geq 10 \iff$

$\iff x\geq 5 \iff x\in[5,\infty).$

Розв'яжемо тепер кожну з систем сукупності, яка після розв'язання нерівностей набуває вигляду:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(-\infty,3), \\ x\in(-\infty,3], \end{cases} \\ \begin{cases} x\in[3;5), \\ x\in\mathbf{R}, \end{cases} \\ \begin{cases} x\in[5,\infty), \\ x\in[5,\infty). \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

1) $\begin{cases} x \in (-\infty, 3), & \mathbf{I} \\ x \in (-\infty, 3], & \mathbf{II} \end{cases} \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 3)$

(усі точки множини **I** є спільними точками множин **I** і **II**, а точка 3 не є спільною);

2) $\begin{cases} x \in [3;5), & \mathbf{III} \\ x \in \mathbf{R}, & \mathbf{IV} \end{cases} \Longleftrightarrow x \in [3;5)$

(усі точки множини **III** є спільними точками множин **III** і **IV**);

3) $\begin{cases} x \in [5, \infty), & \mathbf{V} \\ x \in [5, \infty). & \mathbf{VI} \end{cases} \Longleftrightarrow x \in [5, \infty)$

(оскільки **V** = **VI**).

Отже, приходимо до сукупності

$$\left[\begin{array}{l} x \in (-\infty, 3), \\ x \in [3;5), \\ x \in [5, \infty). \end{array} \right.$$

Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

1) $$\begin{cases} x \in (-\infty, 3), & \mathbf{I} \\ x \in (-\infty, 3], & \mathbf{II} \end{cases} \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 3)$$

(усі точки множини **I** є спільними точками множин **I** і **II**, а точка 3 не є спільною);

2) $$\begin{cases} x \in [3;5), & \mathbf{III} \\ x \in \mathbf{R}, & \mathbf{IV} \end{cases} \Longleftrightarrow x \in [3;5)$$

(усі точки множини **III** є спільними точками множин **III** і **IV**);

3) $$\begin{cases} x \in [5, \infty), & \mathrm{V} \\ x \in [5, \infty). & \mathrm{VI} \end{cases} \Longleftrightarrow x \in [5, \infty)$$

(оскільки $\mathrm{V} = \mathrm{VI}$).

Отже, приходимо до сукупності

$$\left[\begin{array}{l} x \in (-\infty, 3), \\ x \in [3;5), \\ x \in [5, \infty). \end{array} \right.$$

Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

1) $\begin{cases} x \in (-\infty, 3), & \mathbf{I} \\ x \in (-\infty, 3], & \mathbf{II} \end{cases} \iff x \in (-\infty, 3)$

(усі точки множини **I** є спільними точками множин **I** і **II**, а точка 3 не є спільною);

2) $\begin{cases} x \in [3;5), & \mathbf{III} \\ x \in \mathbf{R}, & \mathbf{IV} \end{cases} \iff x \in [3;5)$

(усі точки множини **III** є спільними точками множин **III** і **IV**);

3) $\begin{cases} x \in [5, \infty), & \mathbf{V} \\ x \in [5, \infty). & \mathbf{VI} \end{cases} \iff x \in [5, \infty)$

(оскільки $\mathbf{V} = \mathbf{VI}$).

Отже, приходимо до сукупності

$$\left[\begin{array}{l} x \in (-\infty, 3), \\ x \in [3;5), \\ x \in [5, \infty). \end{array} \right.$$

Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

1) $\begin{cases} x \in (-\infty, 3), & \mathbf{I} \\ x \in (-\infty, 3], & \mathbf{II} \end{cases} \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 3)$

(усі точки множини **I** є спільними точками множин **I** і **II**, а точка 3 не є спільною);

2) $\begin{cases} x \in [3;5), & \mathbf{III} \\ x \in \mathbf{R}, & \mathbf{IV} \end{cases} \Longleftrightarrow x \in [3;5)$

(усі точки множини **III** є спільними точками множин **III** і **IV**);

3) $\begin{cases} x \in [5, \infty), & \mathbf{V} \\ x \in [5, \infty). & \mathbf{VI} \end{cases} \Longleftrightarrow x \in [5, \infty)$

(оскільки $\mathbf{V} = \mathbf{VI}$).

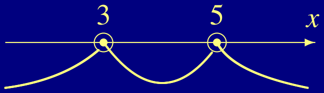
Отже, приходимо до сукупності

$$\left[\begin{array}{l} x \in (-\infty, 3), \\ x \in [3;5), \\ x \in [5, \infty). \end{array} \right.$$

Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

$$\left[\begin{array}{ll} x \in (-\infty, 3), & A \\ x \in [3;5), & B \\ x \in [5, \infty). & C \end{array}\right.$$

Нарешті, об'єднуючи множини A, B і C, знаходимо множину розв'язків заданої нерівності:



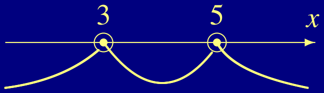
$$A \cup B \cup C = (-\infty, \infty).$$

Відповідь: $x \in \mathbf{R}$.

Розв'язання рівнянь і нерівностей з модулем методом інтервалів

$$\left[\begin{array}{ll} x \in (-\infty, 3), & A \\ x \in [3; 5), & B \\ x \in [5, \infty). & C \end{array}\right.$$

Нарешті, об'єднуючи множини A, B і C, знаходимо множину розв'язків заданої нерівності:



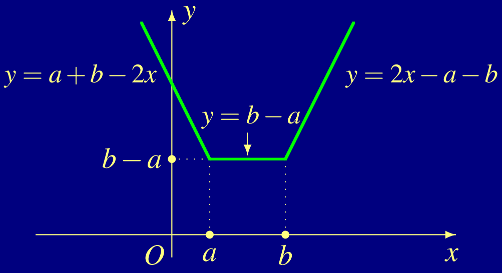
$$A \cup B \cup C = (-\infty, \infty).$$

Відповідь: $x \in \mathbf{R}$.

Графік функції $y = |x-a| + |x-b|, a < b.$

Графік цієї функції зображено на малюнку.

$$y = |x-a| + |x-b|, \quad a < b$$

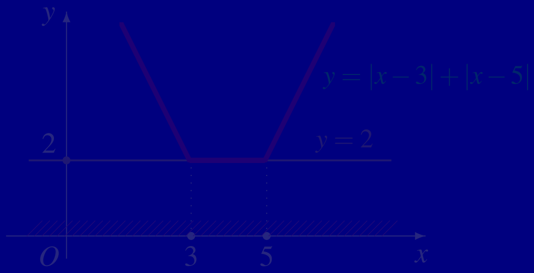


Графік функції $y = |x-a| + |x-b|, a < b$. Розв'язання рівнянь і нерівностей

Розглянемо розв'язання графічним методом нерівності з попереднього прикладу.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $|x-3| + |x-5| \geq 2$.

Розв'язання. Знаходимо ті частини графіка функції $y = |x-3| + |x-5|$, які розміщені або вище прямої $y = 2$, або співпадають з частиною цієї прямої, і проектуємо їх на вісь Ox:



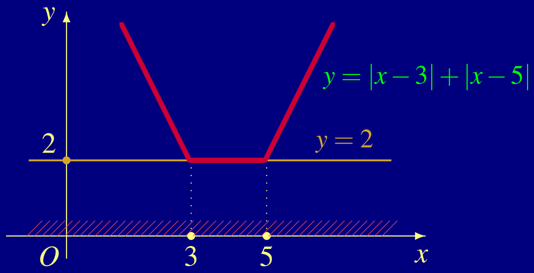
Відповідь: $x \in \mathbf{R}$.

Графік функції $y = |x-a| + |x-b|, a < b$. Розв'язання рівнянь і нерівностей

Розглянемо розв'язання графічним методом нерівності з попереднього прикладу.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $|x-3| + |x-5| \geq 2$.

Розв'язання. Знаходимо ті частини графіка функції $y = |x-3| + |x-5|$, які розміщені або вище прямої $y = 2$, або співпадають з частиною цієї прямої, і проектуємо їх на вісь Ox:



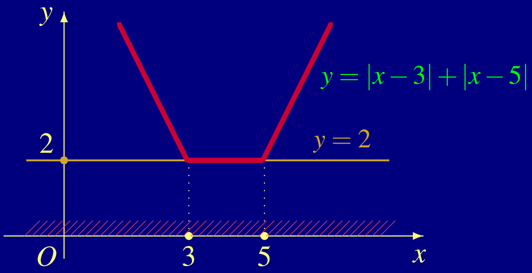
Відповідь: $x \in \mathbf{R}$.

Графік функції $y = |x-a| + |x-b|, a < b$. Розв'язання рівнянь і нерівностей

Розглянемо розв'язання графічним методом нерівності з попереднього прикладу.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $|x-3| + |x-5| \geq 2$.

Розв'язання. Знаходимо ті частини графіка функції $y = |x-3| + |x-5|$, які розміщені або вище прямої $y = 2$, або співпадають з частиною цієї прямої, і проектуємо їх на вісь Ox:

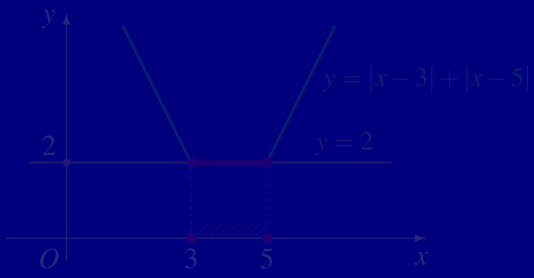


Відповідь: $x \in \mathbf{R}$.

Графік функції $y = |x-a| + |x-b|, a < b$. Решение рівнянь и нерівностей

Приклад 4. Розв'язати рівняння $|x-3|+|x-5|=2$.

Розв'язання. Знаходимо частину графіка функції $y=|x-3|+|x-5|$, яка співпадає з частиною прямої $y=2$, і проектуємо її на вісь Ox:

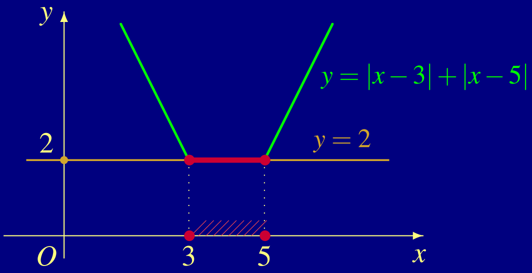


Відповідь: $x \in [3;5]$.

Графік функції $y = |x-a| + |x-b|, a < b$. Решение рівнянь и нерівностей

Приклад 4. Розв'язати рівняння $|x-3| + |x-5| = 2$.

Розв'язання. Знаходимо частину графіка функції $y = |x-3| + |x-5|$, яка співпадає з частиною прямої $y = 2$, і проектуємо її на вісь Ox:

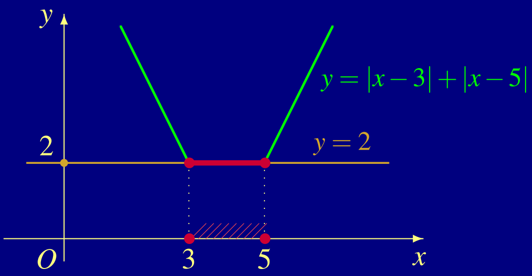


Відповідь: $x \in [3;5]$.

Графік функції $y = |x-a| + |x-b|, a < b$. Решение рівнянь и нерівностей

Приклад 4. Розв'язати рівняння $|x-3| + |x-5| = 2$.

Розв'язання. Знаходимо частину графіка функції $y = |x-3| + |x-5|$, яка співпадає з частиною прямої $y = 2$, і проектуємо її на вісь Ox:

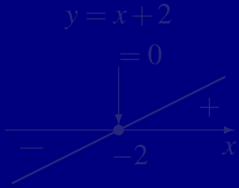


Відповідь: $x \in [3;5]$.

Приклад із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2006 р.). Вкажіть найменше ціле число, яке є розв'язком нерівності $\dfrac{x^2+2x-3}{|x+2|} < 0$.

Розв'язання. Зобразимо криву знаків підмодульного виразу:

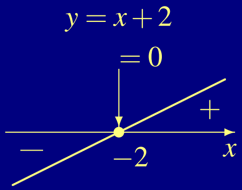


Оскільки знаменник дробу не повинен дорівнювати нулю, то, застосовуючи метод інтервалів, необхідно розглянути два випадки: $x > -2$ і $x < -2$.

Приклад із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2006 р.). Вкажіть найменше ціле число, яке є розв'язком нерівності $\dfrac{x^2+2x-3}{|x+2|}<0$.

Розв'язання. Зобразимо криву знаків підмодульного виразу:

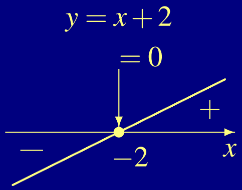


Оскільки знаменник дробу не повинен дорівнювати нулю, то, застосовуючи метод інтервалів, необхідно розглянути два випадки: $x>-2$ і $x<-2$.

Приклад із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2006 р.). Вкажіть найменше ціле число, яке є розв'язком нерівності $\dfrac{x^2+2x-3}{|x+2|}<0$.

Розв'язання. Зобразимо криву знаків підмодульного виразу:



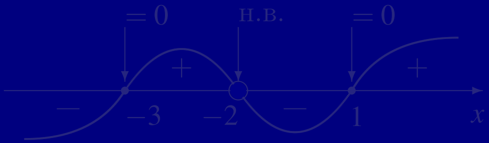
Оскільки знаменник дробу не повинен дорівнювати нулю, то, застосовуючи метод інтервалів, необхідно розглянути два випадки: $x>-2$ і $x<-2$.

Приклад із ЗНО

При цьому замінимо нерівність рівносильною їй сукупністю двох систем:

$$\frac{x^2+2x-3}{|x+2|}<0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>-2, \\ \dfrac{x^2+2x-3}{x+2}<0, \end{cases} \\ \begin{cases} x<-2, \\ \dfrac{x^2+2x-3}{-(x+2)}<0, \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(-2,\infty), \\ \dfrac{x^2+2x-3}{x+2}<0, \end{cases} \\ \begin{cases} x\in(-\infty,-2), \\ \dfrac{x^2+2x-3}{x+2}>0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Зобразимо криву знаків функції $y=\frac{x^2+2x-3}{x+2}$:



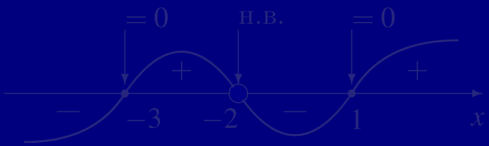
x^2+2x-3	+	−	−	+
$x+2$	−	−	+	+

Приклад із ЗНО

При цьому замінимо нерівність рівносильною їй сукупністю двох систем:

$$\frac{x^2+2x-3}{|x+2|}<0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>-2, \\ \dfrac{x^2+2x-3}{x+2}<0, \end{cases} \\ \begin{cases} x<-2, \\ \dfrac{x^2+2x-3}{-(x+2)}<0, \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(-2,\infty), \\ \dfrac{x^2+2x-3}{x+2}<0, \end{cases} \\ \begin{cases} x\in(-\infty,-2), \\ \dfrac{x^2+2x-3}{x+2}>0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Зобразимо криву знаків функції $y=\frac{x^2+2x-3}{x+2}$:



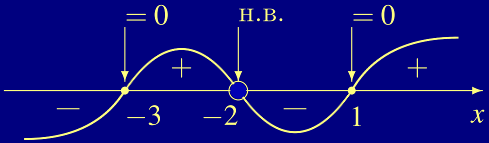
x^2+2x-3	$+$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$+$	$+$

Приклад із ЗНО

При цьому замінимо нерівність рівносильною їй сукупністю двох систем:

$$\frac{x^2+2x-3}{|x+2|}<0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>-2, \\ \dfrac{x^2+2x-3}{x+2}<0, \end{cases} \\ \begin{cases} x<-2, \\ \dfrac{x^2+2x-3}{-(x+2)}<0, \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(-2,\infty), \\ \dfrac{x^2+2x-3}{x+2}<0, \end{cases} \\ \begin{cases} x\in(-\infty,-2), \\ \dfrac{x^2+2x-3}{x+2}>0. \end{cases} \end{array}\right.$$

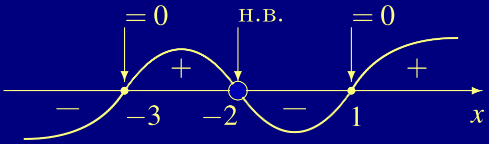
Зобразимо криву знаків функції $y=\frac{x^2+2x-3}{x+2}$:



x^2+2x-3	$+$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$+$	$+$

Приклад із ЗНО

$y = \frac{x^2+2x-3}{x+2}$



Випишемо розв'язки нерівностей

$\frac{x^2+2x-3}{x+2} < 0 \iff x \in (-\infty,-3) \cup (-2;1)\,,$

$\frac{x^2+2x-3}{x+2} > 0 \iff x \in (-3,-2) \cup (1,\infty)$

і після підстановки цих розв'язків замість самих нерівностей у відповідні системи отримаємо сукупність:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{ll} x \in (-2,\infty), & \mathrm{I} \\ x \in (-\infty,-3) \cup (-2;1), & \mathrm{II} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{ll} x \in (-\infty,-2), & \mathrm{III} \\ x \in (-3,-2) \cup (1,\infty). & \mathrm{IV} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

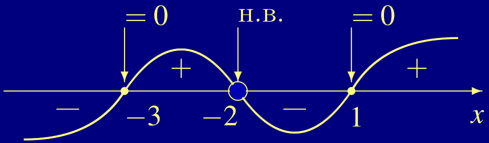
Розв'яжемо системи:

$\mathrm{I} \cap \mathrm{II} = (-2;1)$

$\mathrm{III} \cap \mathrm{IV} = (-3,-2)$

Приклад із ЗНО

$y = \frac{x^2+2x-3}{x+2}$



Випишемо розв'язки нерівностей

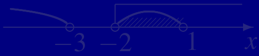
$\frac{x^2+2x-3}{x+2} < 0 \iff x \in (-\infty, -3) \cup (-2; 1)$,

$\frac{x^2+2x-3}{x+2} > 0 \iff x \in (-3, -2) \cup (1, \infty)$

і після підстановки цих розв'язків замість самих нерівностей у відповідні системи отримаємо сукупність:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-2, \infty), & \text{I} \\ x \in (-\infty, -3) \cup (-2; 1), & \text{II} \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-\infty, -2), & \text{III} \\ x \in (-3, -2) \cup (1, \infty). & \text{IV} \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'яжемо системи:

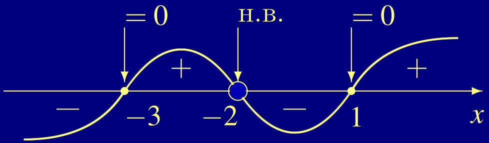


$\text{I} \cap \text{II} = (-2; 1)$

$\text{III} \cap \text{IV} = (-3, -2)$

Приклад із ЗНО

$y = \frac{x^2+2x-3}{x+2}$



Випишемо розв'язки нерівностей

$\frac{x^2+2x-3}{x+2} < 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (-2; 1)$,

$\frac{x^2+2x-3}{x+2} > 0 \Longleftrightarrow x \in (-3, -2) \cup (1, \infty)$

і після підстановки цих розв'язків замість самих нерівностей у відповідні системи отримаємо сукупність:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{ll} x \in (-2, \infty), & \mathrm{I} \\ x \in (-\infty, -3) \cup (-2; 1), & \mathrm{II} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{ll} x \in (-\infty, -2), & \mathrm{III} \\ x \in (-3, -2) \cup (1, \infty). & \mathrm{IV} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

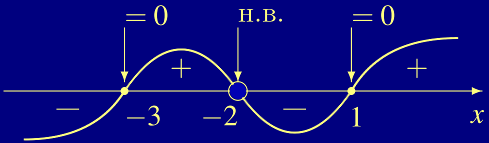
Розв'яжемо системи:

$\mathrm{I} \cap \mathrm{II} = (-2; 1)$

$\mathrm{III} \cap \mathrm{IV} = (-3, -2)$

Приклад із ЗНО

$y = \frac{x^2+2x-3}{x+2}$



Випишемо розв'язки нерівностей

$$\frac{x^2+2x-3}{x+2} < 0 \iff x \in (-\infty, -3) \cup (-2; 1),$$

$$\frac{x^2+2x-3}{x+2} > 0 \iff x \in (-3, -2) \cup (1, \infty)$$

і після підстановки цих розв'язків замість самих нерівностей у відповідні системи отримаємо сукупність:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{ll} x \in (-2, \infty), & \mathrm{I} \\ x \in (-\infty, -3) \cup (-2; 1), & \mathrm{II} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{ll} x \in (-\infty, -2), & \mathrm{III} \\ x \in (-3, -2) \cup (1, \infty). & \mathrm{IV} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

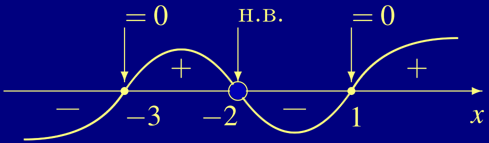
Розв'яжемо системи:

$\mathrm{I} \cap \mathrm{II} = (-2; 1)$

$\mathrm{III} \cap \mathrm{IV} = (-3, -2)$

Приклад із ЗНО

$y = \frac{x^2+2x-3}{x+2}$



Випишемо розв'язки нерівностей

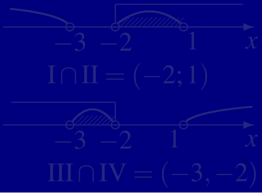
$\frac{x^2+2x-3}{x+2} < 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (-2; 1)$,

$\frac{x^2+2x-3}{x+2} > 0 \Longleftrightarrow x \in (-3, -2) \cup (1, \infty)$

і після підстановки цих розв'язків замість самих нерівностей у відповідні системи отримаємо сукупність:

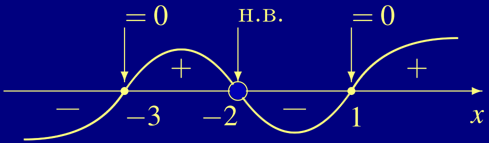
$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{ll} x \in (-2, \infty), & \mathbf{I} \\ x \in (-\infty, -3) \cup (-2; 1), & \mathbf{II} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{ll} x \in (-\infty, -2), & \mathbf{III} \\ x \in (-3, -2) \cup (1, \infty). & \mathbf{IV} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Розв'яжемо системи:



Приклад із ЗНО

$y = \frac{x^2+2x-3}{x+2}$



Випишемо розв'язки нерівностей

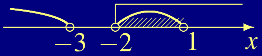
$$\frac{x^2+2x-3}{x+2} < 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (-2; 1)\,,$$

$$\frac{x^2+2x-3}{x+2} > 0 \Longleftrightarrow x \in (-3, -2) \cup (1, \infty)$$

і після підстановки цих розв'язків замість самих нерівностей у відповідні системи отримаємо сукупність:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{ll} x \in (-2, \infty), & \mathrm{I} \\ x \in (-\infty, -3) \cup (-2; 1), & \mathrm{II} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{ll} x \in (-\infty, -2), & \mathrm{III} \\ x \in (-3, -2) \cup (1, \infty). & \mathrm{IV} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Розв'яжемо системи:

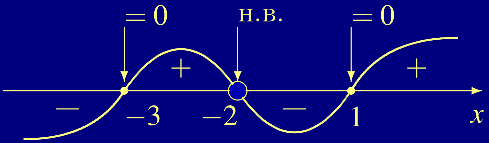


$\mathrm{I} \cap \mathrm{II} = (-2; 1)$

$\mathrm{III} \cap \mathrm{IV} = (-3, -2)$

Приклад із ЗНО

$y = \frac{x^2+2x-3}{x+2}$



Випишемо розв'язки нерівностей

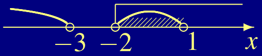
$$\frac{x^2+2x-3}{x+2} < 0 \iff x \in (-\infty, -3) \cup (-2;1)\,,$$

$$\frac{x^2+2x-3}{x+2} > 0 \iff x \in (-3,-2) \cup (1,\infty)$$

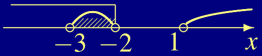
і після підстановки цих розв'язків замість самих нерівностей у відповідні системи отримаємо сукупність:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{ll} x \in (-2,\infty), & \mathrm{I} \\ x \in (-\infty,-3)\cup(-2;1), & \mathrm{II} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{ll} x \in (-\infty,-2), & \mathrm{III} \\ x \in (-3,-2)\cup(1,\infty). & \mathrm{IV} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Розв'яжемо системи:



$\mathrm{I} \cap \mathrm{II} = (-2;1)$



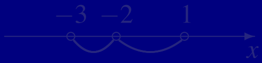
$\mathrm{III} \cap \mathrm{IV} = (-3,-2)$

Приклад із ЗНО

Після розв'язання систем маємо сукупність

$$\left[\begin{array}{ll} x \in (-2;1), & A \\ x \in (-3,-2). & B \end{array}\right.$$

Об'єднуючи множини A і B, отримуємо



$$A \cup B = (-3,-2) \cup (-2;1)$$

Отже, найменше ціле число, яке є розв'язком нерівності, — це -1.

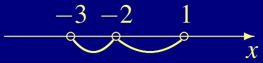
Відповідь: -1.

Приклад із ЗНО

Після розв'язання систем маємо сукупність

$$\left[\begin{array}{ll} x \in (-2;1), & A \\ x \in (-3,-2). & B \end{array}\right.$$

Об'єднуючи множини A і B, отримуємо



$$A \cup B = (-3,-2) \cup (-2;1)$$

Отже, найменше ціле число, яке є розв'язком нерівності, — це -1.

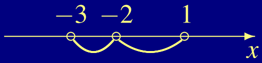
Відповідь: -1.

Приклад із ЗНО

Після розв’язання систем маємо сукупність

$$\left[\begin{array}{ll} x \in (-2;1), & A \\ x \in (-3,-2). & B \end{array}\right.$$

Об’єднуючи множини A і B, отримуємо



$$A \cup B = (-3,-2) \cup (-2;1)$$

Отже, найменше ціле число, яке є розв’язком нерівності, — це -1 .

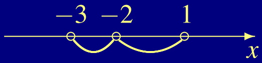
Відповідь: -1 .

Приклад із ЗНО

Після розв'язання систем маємо сукупність

$$\left[\begin{array}{ll} x \in (-2;1), & A \\ x \in (-3,-2). & B \end{array}\right.$$

Об'єднуючи множини A і B, отримуємо



$$A \cup B = (-3,-2) \cup (-2;1)$$

Отже, найменше ціле число, яке є розв'язком нерівності, — це -1.

Відповідь: -1.