

Комбінаторика. Елементи теорії ймовірностей

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 39



Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Основний принцип комбінаторики (правило множення)

Основний принцип комбінаторики можна сформулювати так:

- нехай необхідно послідовно виконати k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, після чого другу – n_2 способами, третю – n_3 способами і так далі, то всі k дій можуть бути виконані $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ способами.

Приклад 1. В камері схову встановлено кодовий замок, шифр якого складається з трьох цифр. Скільки різних комбінацій можна утворити з цифр $1, 2, 3, 4, 5$, якщо:

- 1) цифри в коді можуть повторюватися?
- 2) цифри в коді не можуть повторюватися?

Основний принцип комбінаторики (правило множення)

Основний принцип комбінаторики можна сформулювати так:

- нехай необхідно послідовно виконати k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, після чого другу – n_2 способами, третю – n_3 способами і так далі, то всі k дій можуть бути виконані $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ способами.

Приклад 1. В камері схову встановлено кодовий замок, шифр якого складається з трьох цифр. Скільки різних комбінацій можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо:

- 1) цифри в коді можуть повторюватися?
- 2) цифри в коді не можуть повторюватися?

Основний принцип комбінаторики (правило множення)

Розв'язання. 1) Оскільки цифри в коді можуть повторюватися, то кожна цифра коду може бути вибрана 5 способами. Тому, за правилом множення загальна кількість комбінацій дорівнює $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

2) На першому місці може стояти будь-яка з п'яти цифр, на другому – одна з чотирьох, що залишилися після вибору першої цифри, на третьому – одна з трьох, що залишилися після вибору перших двох цифр. Загальну кількість комбінацій підраховуємо за правилом множення: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Відповідь: 1) 125; 2) 60.

Основний принцип комбінаторики (правило множення)

Розв'язання. 1) Оскільки цифри в коді можуть повторюватися, то кожна цифра коду може бути вибрана 5 способами. Тому, за правилом множення загальна кількість комбінацій дорівнює $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

2) На першому місці може стояти будь-яка з п'яти цифр, на другому – одна з чотирьох, що залишилися після вибору першої цифри, на третьому – одна з трьох, що залишилися після вибору перших двох цифр. Загальну кількість комбінацій підраховуємо за правилом множення: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Відповідь: 1) 125; 2) 60.

Основний принцип комбінаторики (правило множення)

Розв'язання. 1) Оскільки цифри в коді можуть повторюватися, то кожна цифра коду може бути вибрана 5 способами. Тому, за правилом множення загальна кількість комбінацій дорівнює $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

2) На першому місці може стояти будь-яка з п'яти цифр, на другому – одна з чотирьох, що залишилися після вибору першої цифри, на третьому – одна з трьох, що залишилися після вибору перших двох цифр. Загальну кількість комбінацій підраховуємо за правилом множення: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Відповідь: 1) 125; 2) 60.

Перестановки, розміщення і сполучення

Множина з n елементів називається **впорядкованою**, якщо кожному елементу цієї множини поставлено у відповідність певне число (номер елемента) від 1 до n так, що різним елементам відповідають різні числа. Впорядковані множини вважаються різними, якщо вони відрізняються або своїми елементами, або їх порядком.

- Впорядковані множини, які відрізняються тільки порядком елементів, називаються **перестановками** цієї множини.

Кількість перестановок множини з n елементів позначають P_n .

Так, як і при розв'язанні Прикладу 1 (див. пункт 2), встановлюється, що це число дорівнює

$$P_n = n!,$$

де $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

Перестановки, розміщення і сполучення

Множина з n елементів називається **впорядкованою**, якщо кожному елементу цієї множини поставлено у відповідність певне число (номер елемента) від 1 до n так, що різним елементам відповідають різні числа. Впорядковані множини вважаються різними, якщо вони відрізняються або своїми елементами, або їх порядком.

- Впорядковані множини, які відрізняються тільки порядком елементів, називаються **перестановками** цієї множини.

Кількість перестановок множини з n елементів позначають P_n .

Так, як і при розв'язанні Прикладу 1 (див. пункт 2), встановлюється, що це число дорівнює

$$P_n = n!,$$

де $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

Перестановки, розміщення і сполучення

- Розміщенням із n елементів по k (без повторень) називається впорядкована підмножина, яка містить k елементів із множини, що складається з n елементів.

Кількість розміщень із n елементів по k позначають A_n^k .

Зокрема, в прикладі 1 в пункті 2) обчислено

$$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Аналогічно встановлюється формула

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Перестановки, розміщення і сполучення

- Сполученням (або комбінацією) із n елементів по k (без повторень) називається підмножина, яка містить k елементів із множини, що складається з n елементів.

При цьому порядок елементів у підмножині є неістотним.

Кількість розміщень із n елементів по k позначають C_n^k .

При цьому сполучення, розміщення і перестановки зв'язані між собою співвідношеннями $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$ (оскільки з однієї підмножини, що містить k елементів, можна утворити $P_k = k!$ різних впорядкованих множин і тому кількість розміщень A_n^k в P_k раз більша кількості сполучень C_n^k).

Звідси отримуємо формулу

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Покладають, що $0! = 1$. Тоді $C_n^0 = 1$.

Перестановки, розміщення і сполучення

- Сполученням (або комбінацією) із n елементів по k (без повторень) називається підмножина, яка містить k елементів із множини, що складається з n елементів.

При цьому порядок елементів у підмножині є неістотним.

Кількість розміщень із n елементів по k позначають C_n^k .

При цьому сполучення, розміщення і перестановки зв'язані між собою співвідношеннями $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$ (оскільки з однієї підмножини, що містить k елементів, можна утворити $P_k = k!$ різних впорядкованих множин і тому кількість розміщень A_n^k в P_k раз більша кількості сполучень C_n^k).

Звідси отримуємо формулу

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Покладають, що $0! = 1$. Тоді $C_n^0 = 1$.

Перестановки, розміщення і сполучення

Приклад 2. Із 16 учнів одного класу необхідно обрати трьох для участі в олімпіаді. Якою кількістю способів можна це зробити?

Розв'язання. Оскільки порядок трьох учнів у обраній підмножині є неістотним, то кількість способів вибору обчислюється за формулою:

$$C_{16}^3 = \frac{16!}{3!(16-3)!} = \frac{14 \cdot 15 \cdot 16}{2 \cdot 3} = 560.$$

Відповідь: 560.

Приклад 3. Якою кількістю способів може утворитися трійка призерів першості з футболу, в якій приймають участь 16 команд?

Розв'язання. На відміну від попереднього прикладу, тут істотно, яка саме команда стане чемпіоном, яка буде другою і яка посяде третє місце.

Перестановки, розміщення і сполучення

Приклад 2. Із 16 учнів одного класу необхідно обрати трьох для участі в олімпіаді. Якою кількістю способів можна це зробити?

Розв'язання. Оскільки порядок трьох учнів у обраній підмножині є неістотним, то кількість способів вибору обчислюється за формулою:

$$C_{16}^3 = \frac{16!}{3!(16-3)!} = \frac{14 \cdot 15 \cdot 16}{2 \cdot 3} = 560.$$

Відповідь: 560.

Приклад 3. Якою кількістю способів може утворитися трійка призерів першості з футболу, в якій приймають участь 16 команд?

Розв'язання. На відміну від попереднього прикладу, тут істотно, яка саме команда стане чемпіоном, яка буде другою і яка посяде третє місце.

Перестановки, розміщення і сполучення

Приклад 2. Із 16 учнів одного класу необхідно обрати трьох для участі в олімпіаді. Якою кількістю способів можна це зробити?

Розв'язання. Оскільки порядок трьох учнів у обраній підмножині є неістотним, то кількість способів вибору обчислюється за формулою:

$$C_{16}^3 = \frac{16!}{3!(16-3)!} = \frac{14 \cdot 15 \cdot 16}{2 \cdot 3} = 560.$$

Відповідь: 560.

Приклад 3. Якою кількістю способів може утворитися трійка призерів першості з футболу, в якій приймають участь 16 команд?

Розв'язання. На відміну від попереднього прикладу, тут істотно, яка саме команда стане чемпіоном, яка буде другою і яка посяде третє місце.

Перестановки, розміщення і сполучення

Приклад 2. Із 16 учнів одного класу необхідно обрати трьох для участі в олімпіаді. Якою кількістю способів можна це зробити?

Розв'язання. Оскільки порядок трьох учнів у обраній підмножині є неістотним, то кількість способів вибору обчислюється за формулою:

$$C_{16}^3 = \frac{16!}{3!(16-3)!} = \frac{14 \cdot 15 \cdot 16}{2 \cdot 3} = 560.$$

Відповідь: 560.

Приклад 3. Якою кількістю способів може утворитися трійка призерів першості з футболу, в якій приймають участь 16 команд?

Розв'язання. На відміну від попереднього прикладу, тут істотно, яка саме команда стане чемпіоном, яка буде другою і яка посяде третє місце.

Перестановки, розміщення і сполучення

Приклад 2. Із 16 учнів одного класу необхідно обрати трьох для участі в олімпіаді. Якою кількістю способів можна це зробити?

Розв'язання. Оскільки порядок трьох учнів у обраній підмножині є неістотним, то кількість способів вибору обчислюється за формулою:

$$C_{16}^3 = \frac{16!}{3!(16-3)!} = \frac{14 \cdot 15 \cdot 16}{2 \cdot 3} = 560.$$

Відповідь: 560.

Приклад 3. Якою кількістю способів може утворитися трійка призерів першості з футболу, в якій приймають участь 16 команд?

Розв'язання. На відміну від попереднього прикладу, тут істотно, яка саме команда стане чемпіоном, яка буде другою і яка посяде третє місце.

Перестановки, розміщення і сполучення

Тому кількість способів утворення трійки призерів обчислюємо за формулою:

$$A_{16}^3 = \frac{16!}{(16-3)!} = 14 \cdot 15 \cdot 16 = 3360.$$

Відповідь: 3360.

Перестановки, розміщення і сполучення

Тому кількість способів утворення трійки призерів обчислюємо за формулою:

$$A_{16}^3 = \frac{16!}{(16-3)!} = 14 \cdot 15 \cdot 16 = 3360.$$

Відповідь: 3360.

Біном Ньютона

Справедлива формула

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n,$$

де n – натуральне число.

Скорочено цей вираз можна записати так:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Числа C_n^k називають також **біноміальними коефіцієнтами**.

Біном Ньютона

Для їх обчислення часто використовують формули $C_n^k = C_n^{n-k}$, $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$. За допомогою останньої формули будують трикутник Паскаля:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 2 & & 1 \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\ & & \dots & & & & \end{array}$$

(тут кожне число утворюється в результаті додавання двох чисел, розміщених над ним зліва і справа. Числа C_n^k розміщуються в $(n+1)$ -му рядку. Наприклад, в п'ятому рядку знаходяться числа $C_4^0 = 1$, $C_4^1 = 4$, $C_4^2 = 6$, $C_4^3 = 4$, $C_4^4 = 1$).

Біном Ньютона

Приклад 4. В розкладі $\left(\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{15}$ обчислити коефіцієнт при x^2 .

Розв'язання. За формулою бінома Ньютона отримуємо

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{15} &= \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k (\sqrt[4]{x})^{15-k} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^k = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^{\frac{15-k}{4}} x^{-\frac{k}{3}} = \\ &= \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^{\frac{45-7k}{12}}. \end{aligned}$$

Доданок з x^2 маємо при

$$\frac{45-7k}{12} = 2 \iff 45 - 7k = 24 \iff k = 3.$$

Отже, коефіцієнт при x^2 дорівнює

$$C_{15}^3 = \frac{15!}{3!(15-3)!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{2 \cdot 3} = 455.$$

Відповідь: 455.

Біном Ньютона

Приклад 4. В розкладі $\left(\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{15}$ обчислити коефіцієнт при x^2 .

Розв'язання. За формулою бінома Ньютона отримуємо

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{15} &= \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k (\sqrt[4]{x})^{15-k} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^k = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^{\frac{15-k}{4}} x^{-\frac{k}{3}} = \\ &= \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^{\frac{45-7k}{12}}. \end{aligned}$$

Доданок з x^2 маємо при

$$\frac{45-7k}{12} = 2 \iff 45 - 7k = 24 \iff k = 3.$$

Отже, коефіцієнт при x^2 дорівнює

$$C_{15}^3 = \frac{15!}{3!(15-3)!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{2 \cdot 3} = 455.$$

Відповідь: 455.

Біном Ньютона

Приклад 4. В розкладі $\left(\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{15}$ обчислити коефіцієнт при x^2 .

Розв'язання. За формулою бінома Ньютона отримуємо

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{15} &= \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k (\sqrt[4]{x})^{15-k} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^k = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^{\frac{15-k}{4}} x^{-\frac{k}{3}} = \\ &= \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^{\frac{45-7k}{12}}. \end{aligned}$$

Доданок з x^2 маємо при

$$\frac{45-7k}{12} = 2 \iff 45 - 7k = 24 \iff k = 3.$$

Отже, коефіцієнт при x^2 дорівнює

$$C_{15}^3 = \frac{15!}{3!(15-3)!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{2 \cdot 3} = 455.$$

Відповідь: 455.

Біном Ньютона

Приклад 4. В розкладі $\left(\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{15}$ обчислити коефіцієнт при x^2 .

Розв'язання. За формулою бінома Ньютона отримуємо

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{15} &= \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k (\sqrt[4]{x})^{15-k} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^k = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^{\frac{15-k}{4}} x^{-\frac{k}{3}} = \\ &= \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^{\frac{45-7k}{12}}. \end{aligned}$$

Доданок з x^2 маємо при

$$\frac{45-7k}{12} = 2 \iff 45 - 7k = 24 \iff k = 3.$$

Отже, коефіцієнт при x^2 дорівнює

$$C_{15}^3 = \frac{15!}{3!(15-3)!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{2 \cdot 3} = 455.$$

Відповідь: 455.

Біном Ньютона

Приклад 4. В розкладі $\left(\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{15}$ обчислити коефіцієнт при x^2 .

Розв'язання. За формулою бінома Ньютона отримуємо

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{15} &= \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k (\sqrt[4]{x})^{15-k} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^k = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^{\frac{15-k}{4}} x^{-\frac{k}{3}} = \\ &= \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^{\frac{45-7k}{12}}. \end{aligned}$$

Доданок з x^2 маємо при

$$\frac{45-7k}{12} = 2 \iff 45 - 7k = 24 \iff k = 3.$$

Отже, коефіцієнт при x^2 дорівнює

$$C_{15}^3 = \frac{15!}{3!(15-3)!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{2 \cdot 3} = 455.$$

Відповідь: 455.

Перестановки з повтореннями

- Впорядкована множина з n елементів, серед яких є k_1 елементів першого типу, k_2 елементів другого типу, $\dots$, k_m елементів m -го типу, причому $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$, називається **перестановкою з повтореннями**.

Кількість перестановок з повтореннями дорівнює

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}.$$

Приклад 5. Скільки різних слів можна отримати, переставляючи букви в слові "математика"?

Розв'язання. В слові "математика" 10 букв, з яких буква "м" зустрічається 2 рази, буква "а" – 3 рази, буква "т" – 2 рази, буква "е" – 1 раз, буква "и" – 1 раз, буква "к" – 1 раз. Тому кількість слів, що утворюються при всіх можливих перестановках цих букв, дорівнює

$$P_{10}(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{2! 3! 2! 1! 1! 1!} = 151200.$$

Відповідь: 151200.

Перестановки з повтореннями

- Впорядкована множина з n елементів, серед яких є k_1 елементів першого типу, k_2 елементів другого типу, $\dots$, k_m елементів m -го типу, причому $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$, називається **перестановкою з повтореннями**.

Кількість перестановок з повтореннями дорівнює

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}.$$

Приклад 5. Скільки різних слів можна отримати, переставляючи букви в слові "математика"?

Розв'язання. В слові "математика" 10 букв, з яких буква "м" зустрічається 2 рази, буква "а" – 3 рази, буква "т" – 2 рази, буква "е" – 1 раз, буква "и" – 1 раз, буква "к" – 1 раз. Тому кількість слів, що утворюються при всіх можливих перестановках цих букв, дорівнює

$$P_{10}(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{2! 3! 2! 1! 1! 1!} = 151200.$$

Відповідь: 151200.

Перестановки з повтореннями

- Впорядкована множина з n елементів, серед яких є k_1 елементів першого типу, k_2 елементів другого типу, $\dots$, k_m елементів m -го типу, причому $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$, називається **перестановкою з повтореннями**.

Кількість перестановок з повтореннями дорівнює

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}.$$

Приклад 5. Скільки різних слів можна отримати, переставляючи букви в слові "математика"?

Розв'язання. В слові "математика" 10 букв, з яких буква "м" зустрічається 2 рази, буква "а" – 3 рази, буква "т" – 2 рази, буква "е" – 1 раз, буква "и" – 1 раз, буква "к" – 1 раз. Тому кількість слів, що утворюються при всіх можливих перестановках цих букв, дорівнює

$$P_{10}(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{2! 3! 2! 1! 1! 1!} = 151200.$$

Відповідь: 151200.

Перестановки з повтореннями

- Впорядкована множина з n елементів, серед яких є k_1 елементів першого типу, k_2 елементів другого типу, $\dots$, k_m елементів m -го типу, причому $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$, називається **перестановкою з повтореннями**.

Кількість перестановок з повтореннями дорівнює

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}.$$

Приклад 5. Скільки різних слів можна отримати, переставляючи букви в слові "математика"?

Розв'язання. В слові "математика" 10 букв, з яких буква "м" зустрічається 2 рази, буква "а" – 3 рази, буква "т" – 2 рази, буква "е" – 1 раз, буква "и" – 1 раз, буква "к" – 1 раз. Тому кількість слів, що утворюються при всіх можливих перестановках цих букв, дорівнює

$$P_{10}(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{2! 3! 2! 1! 1! 1!} = 151200.$$

Відповідь: 151200.

Приклади

Приклад 6. В ящику лежать кілька білих і чорних пронумерованих кульок. Відомо, що взяти одну білу і одну чорну кульку разом можна 80 способами, а одну білу і дві чорних – 360 способами. Скільки в ящику білих кульок і скільки чорних?

Розв'язання. Нехай в ящику лежать n білих і k чорних кульок. Тоді кількість способів взяти одну білу і одну чорну кульку дорівнює $C_n^1 C_k^1 = 80$, а кількість способів взяти одну білу і дві чорних кульки разом дорівнює $C_n^1 C_k^2 = 360$. Маємо систему двох рівнянь з двома невідомими n і k :

$$\begin{cases} nk = 80, \\ n \frac{k(k-1)}{2} = 360, \end{cases} \iff \begin{cases} nk = 80, \\ \frac{80(k-1)}{2} = 360, \end{cases} \iff \begin{cases} k = 10, \\ n = \frac{80}{k} = 8. \end{cases}$$

Відповідь: 8 білих і 10 чорних кульок.

Приклади

Приклад 6. В ящику лежать кілька білих і чорних пронумерованих кульок. Відомо, що взяти одну білу і одну чорну кульку разом можна 80 способами, а одну білу і дві чорних – 360 способами. Скільки в ящику білих кульок і скільки чорних?

Розв'язання. Нехай в ящику лежать n білих і k чорних кульок. Тоді кількість способів взяти одну білу і одну чорну кульки дорівнює $C_n^1 C_k^1 = 80$, а кількість способів взяти одну білу і дві чорних кульки разом дорівнює $C_n^1 C_k^2 = 360$. Маємо систему двох рівнянь з двома невідомими n і k :

$$\begin{cases} nk = 80, \\ n \frac{k(k-1)}{2} = 360, \end{cases} \iff \begin{cases} nk = 80, \\ \frac{80(k-1)}{2} = 360, \end{cases} \iff \begin{cases} k = 10, \\ n = \frac{80}{k} = 8. \end{cases}$$

Відповідь: 8 білих і 10 чорних кульок.

Приклади

Приклад 6. В ящику лежать кілька білих і чорних пронумерованих кульок. Відомо, що взяти одну білу і одну чорну кульку разом можна 80 способами, а одну білу і дві чорних – 360 способами. Скільки в ящику білих кульок і скільки чорних?

Розв'язання. Нехай в ящику лежать n білих і k чорних кульок. Тоді кількість способів взяти одну білу і одну чорну кульку дорівнює $C_n^1 C_k^1 = 80$, а кількість способів взяти одну білу і дві чорних кульки разом дорівнює $C_n^1 C_k^2 = 360$. Маємо систему двох рівнянь з двома невідомими n і k :

$$\begin{cases} nk = 80, \\ n \frac{k(k-1)}{2} = 360, \end{cases} \iff \begin{cases} nk = 80, \\ \frac{80(k-1)}{2} = 360, \end{cases} \iff \begin{cases} k = 10, \\ n = \frac{80}{k} = 8. \end{cases}$$

Відповідь: 8 білих і 10 чорних кульок.

Приклади

Приклад 7. Розв'язати рівняння: $3A_{x-1}^2 - C_x^2 = 45$.

Розв'язання. Використовуючи формули сполучень і розміщень, отримуємо:

$$3(x-1)(x-2) - \frac{x(x-1)}{2} = 45.$$

Після розкриття дужок і зведення подібних доданків отримаємо квадратне рівняння:

$$6(x^2 - 3x + 2) - (x^2 - x) = 90 \iff$$

$$\iff 6x^2 - 18x + 12 - x^2 + x - 90 = 0 \iff$$

$$\iff 5x^2 - 17x - 78 = 0 \iff \begin{cases} x_1 = 6, \\ x_2 = -2,6. \end{cases}$$

Враховуючи, що x – натуральне число, маємо $x = 6$.

Відповідь: $x = 6$.

Приклади

Приклад 7. Розв'язати рівняння: $3A_{x-1}^2 - C_x^2 = 45$.

Розв'язання. Використовуючи формули сполучень і розміщень, отримуємо:

$$3(x-1)(x-2) - \frac{x(x-1)}{2} = 45.$$

Після розкриття дужок і зведення подібних доданків отримаємо квадратне рівняння:

$$6(x^2 - 3x + 2) - (x^2 - x) = 90 \iff$$

$$\iff 6x^2 - 18x + 12 - x^2 + x - 90 = 0 \iff$$

$$\iff 5x^2 - 17x - 78 = 0 \iff \begin{cases} x_1 = 6, \\ x_2 = -2,6. \end{cases}$$

Враховуючи, що x – натуральне число, маємо $x = 6$.

Відповідь: $x = 6$.

Приклади

Приклад 7. Розв'язати рівняння: $3A_{x-1}^2 - C_x^2 = 45$.

Розв'язання. Використовуючи формули сполучень і розміщень, отримуємо:

$$3(x-1)(x-2) - \frac{x(x-1)}{2} = 45.$$

Після розкриття дужок і зведення подібних доданків отримаємо квадратне рівняння:

$$6(x^2 - 3x + 2) - (x^2 - x) = 90 \iff$$

$$\iff 6x^2 - 18x + 12 - x^2 + x - 90 = 0 \iff$$

$$\iff 5x^2 - 17x - 78 = 0 \iff \begin{cases} x_1 = 6, \\ x_2 = -2,6. \end{cases}$$

Враховуючи, що x – натуральне число, маємо $x = 6$.

Відповідь: $x = 6$.

Приклади

Приклад 7. Розв'язати рівняння: $3A_{x-1}^2 - C_x^2 = 45$.

Розв'язання. Використовуючи формули сполучень і розміщень, отримуємо:

$$3(x-1)(x-2) - \frac{x(x-1)}{2} = 45.$$

Після розкриття дужок і зведення подібних доданків отримаємо квадратне рівняння:

$$6(x^2 - 3x + 2) - (x^2 - x) = 90 \iff$$

$$\iff 6x^2 - 18x + 12 - x^2 + x - 90 = 0 \iff$$

$$\iff 5x^2 - 17x - 78 = 0 \iff \begin{cases} x_1 = 6, \\ x_2 = -2,6. \end{cases}$$

Враховуючи, що x – натуральне число, маємо $x = 6$.

Відповідь: $x = 6$.

Елементи теорії ймовірностей

В теорії ймовірностей розглядаються **стохастичні експерименти** – певні випробування, які можна повторити будь-яку кількість разів, але результати яких неможливо точно передбачити.

Результат стохастичного експеримента називають **елементарною подією**.

З кожним стохастичним експериментом пов'язують **простір елементарних подій Ω** – сукупність всіх можливих результатів експеримента.

Будь-яка підмножина A простору елементарних подій Ω називається **випадковою подією**.

Класичне означення ймовірності

Нехай простір елементарних подій Ω складається з n елементарних подій $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, причому всі ці елементарні події є рівноможливими, а у склад випадкової події A входять m з цих подій.

- Ймовірністю $P(A)$ випадкової події A називається відношення

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Ця формула називається **класичним означенням ймовірності**.

Ймовірність – це числова характеристика можливості появи випадкової події.

Класичне означення ймовірності

Приклад 8. Дано відрізки, довжини яких 3, 4, 7, 8, 10. Знайти ймовірність того, що із трьох навмання взятих відрізків можна скласти трикутник.

Розв'язання. Кількість способів вибрати три з п'яти різних відрізків дорівнює $C_5^3 = 10$. Отже, простір Ω складається з $n = 10$ елементарних подій.

Подія A полягає в тому, що з цих трьох відрізків можна скласти трикутник, тобто для вибраних трьох чисел повинна виконуватися нерівність трикутника: сума будь-яких двох із них більша, ніж третє число. Очевидно, що з 10 можливих подій цій умові задовольняють такі 6 трійок чисел: 3, 7, 8; 3, 8, 10; 4, 7, 8; 4, 7, 10; 4, 8, 10; 7, 8, 10. Тому подія A складається з $m = 6$ елементарних подій.

Отже, ймовірність події A дорівнює
 $P(A) = m/n = 6/10 = 3/5$.

Відповідь: $3/5$.

Класичне означення ймовірності

Приклад 8. Дано відрізки, довжини яких 3, 4, 7, 8, 10. Знайти ймовірність того, що із трьох навмання взятих відрізків можна скласти трикутник.

Розв'язання. Кількість способів вибрати три з п'яти різних відрізків дорівнює $C_5^3 = 10$. Отже, простір Ω складається з $n = 10$ елементарних подій.

Подія A полягає в тому, що з цих трьох відрізків можна скласти трикутник, тобто для вибраних трьох чисел повинна виконуватися нерівність трикутника: сума будь-яких двох із них більша, ніж третє число. Очевидно, що з 10 можливих подій цій умові задовольняють такі 6 трійок чисел: 3, 7, 8; 3, 8, 10; 4, 7, 8; 4, 7, 10; 4, 8, 10; 7, 8, 10. Тому подія A складається з $m = 6$ елементарних подій.

Отже, ймовірність події A дорівнює $P(A) = m/n = 6/10 = 3/5$.

Відповідь: $3/5$.

Класичне означення ймовірності

Приклад 8. Дано відрізки, довжини яких 3, 4, 7, 8, 10. Знайти ймовірність того, що із трьох навмання взятих відрізків можна скласти трикутник.

Розв'язання. Кількість способів вибрати три з п'яти різних відрізків дорівнює $C_5^3 = 10$. Отже, простір Ω складається з $n = 10$ елементарних подій.

Подія A полягає в тому, що з цих трьох відрізків можна скласти трикутник, тобто для вибраних трьох чисел повинна виконуватися нерівність трикутника: сума будь-яких двох із них більша, ніж третє число. Очевидно, що з 10 можливих подій цій умові задовольняють такі 6 трійок чисел: 3, 7, 8; 3, 8, 10; 4, 7, 8; 4, 7, 10; 4, 8, 10; 7, 8, 10. Тому подія A складається з $m = 6$ елементарних подій.

Отже, ймовірність події A дорівнює $P(A) = m/n = 6/10 = 3/5$.

Відповідь: $3/5$.

Класичне означення ймовірності

Приклад 9. Власник лотерейного білета закреслює 6 номерів із 40. Знайти ймовірність того, що він угадає хоча б 3 виграшних номери.

Розв'язання. Кількість способів вибрати 6 номерів із 40 дорівнює C_{40}^6 . Нехай подія A полягає в тому, що власник білета вгадає хоча б 3 виграшних номери, тобто він угадає або 3, або 4, або 5, або всі 6 виграшних номерів із 40. Кількість способів угадати рівно 3 номери дорівнює $C_6^3 \cdot C_{34}^3$, оскільки гравець повинен вибрати 3 номери з 6 виграшних та ще 3 номери з 34 невикористаних. Аналогічно, кількість способів угадати рівно 4 номери дорівнює $C_6^4 \cdot C_{34}^2$, угадати 5 номерів – $C_6^5 \cdot C_{34}^1$ та угадати всі 6 номерів – $C_6^6 = 1$. Тому ймовірність події A дорівнює

$$P(A) = \frac{C_6^3 \cdot C_{34}^3 + C_6^4 \cdot C_{34}^2 + C_6^5 \cdot C_{34}^1 + 1}{C_{40}^6} \approx 0,033.$$

Відповідь: $\approx 0,033$.

Класичне означення ймовірності

Приклад 9. Власник лотерейного білета закреслює 6 номерів із 40. Знайти ймовірність того, що він угадає хоча б 3 виграшних номери.

Розв'язання. Кількість способів вибрати 6 номерів із 40 дорівнює C_{40}^6 . Нехай подія A полягає в тому, що власник білета вгадає хоча б 3 виграшних номери, тобто він угадає або 3, або 4, або 5, або всі 6 виграшних номерів із 40. Кількість способів угадати рівно 3 номери дорівнює $C_6^3 \cdot C_{34}^3$, оскільки гравець повинен вибрати 3 номери з 6 виграшних та ще 3 номери з 34 невикрашних. Аналогічно, кількість способів угадати рівно 4 номери дорівнює $C_6^4 \cdot C_{34}^2$, угадати 5 номерів – $C_6^5 \cdot C_{34}^1$ та угадати всі 6 номерів – $C_6^6 = 1$. Тому ймовірність події A дорівнює

$$P(A) = \frac{C_6^3 \cdot C_{34}^3 + C_6^4 \cdot C_{34}^2 + C_6^5 \cdot C_{34}^1 + 1}{C_{40}^6} \approx 0,033.$$

Відповідь: $\approx 0,033$.

Класичне означення ймовірності

Приклад 9. Власник лотерейного білета закреслює 6 номерів із 40. Знайти ймовірність того, що він угадає хоча б 3 виграшних номери.

Розв'язання. Кількість способів вибрати 6 номерів із 40 дорівнює C_{40}^6 . Нехай подія A полягає в тому, що власник білета вгадає хоча б 3 виграшних номери, тобто він угадає або 3, або 4, або 5, або всі 6 виграшних номерів із 40. Кількість способів угадати рівно 3 номери дорівнює $C_6^3 \cdot C_{34}^3$, оскільки гравець повинен вибрати 3 номери з 6 виграшних та ще 3 номери з 34 невикористаних. Аналогічно, кількість способів угадати рівно 4 номери дорівнює $C_6^4 \cdot C_{34}^2$, угадати 5 номерів – $C_6^5 \cdot C_{34}^1$ та угадати всі 6 номерів – $C_6^6 = 1$. Тому ймовірність події A дорівнює

$$P(A) = \frac{C_6^3 \cdot C_{34}^3 + C_6^4 \cdot C_{34}^2 + C_6^5 \cdot C_{34}^1 + 1}{C_{40}^6} \approx 0,033.$$

Відповідь: $\approx 0,033$.

Протилежна подія

- Події A і $\bar{A}$ називаються **протилежними**, якщо в результаті випробування може відбутися одна і тільки одна з них. Подію $\bar{A}$ називають також **доповненням до події A** .
Очевидно, що $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

В деяких задачах підрахунок кількості елементарних подій, що утворюють доповнення $\bar{A}$, можна здійснити простіше, ніж підрахунок кількості елементарних подій, що утворюють саму подію A .

Приклад 10. В ящику знаходяться 8 білих і 5 чорних кульок. Знайти ймовірність того, що серед навмання витягнутих з ящика трьох кульок хоча б одна буде чорною.

Розв'язання. Кількість способів вибрати 3 кульки з 13, що містяться в ящику, дорівнює C_{13}^3 .

Протилежна подія

- Події A і $\bar{A}$ називаються **протилежними**, якщо в результаті випробування може відбутися одна і тільки одна з них. Подію $\bar{A}$ називають також **доповненням до події A** .
Очевидно, що $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

В деяких задачах підрахунок кількості елементарних подій, що утворюють доповнення $\bar{A}$, можна здійснити простіше, ніж підрахунок кількості елементарних подій, що утворюють саму подію A .

Приклад 10. В ящику знаходяться 8 білих і 5 чорних кульок. Знайти ймовірність того, що серед навмання витягнутих з ящика трьох кульок хоча б одна буде чорною.

Розв'язання. Кількість способів вибрати 3 кульки з 13, що містяться в ящику, дорівнює C_{13}^3 .

Протилежна подія

- Події A і $\bar{A}$ називаються **протилежними**, якщо в результаті випробування може відбутися одна і тільки одна з них. Подію $\bar{A}$ називають також **доповненням до події A** .
Очевидно, що $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

В деяких задачах підрахунок кількості елементарних подій, що утворюють доповнення $\bar{A}$, можна здійснити простіше, ніж підрахунок кількості елементарних подій, що утворюють саму подію A .

Приклад 10. В ящику знаходяться 8 білих і 5 чорних кульок. Знайти ймовірність того, що серед навмання витягнутих з ящика трьох кульок хоча б одна буде чорною.

Розв'язання. Кількість способів вибрати 3 кульки з 13, що містяться в ящику, дорівнює C_{13}^3 .

Протилежна подія

- Події A і $\bar{A}$ називаються **протилежними**, якщо в результаті випробування може відбутися одна і тільки одна з них. Подію $\bar{A}$ називають також **доповненням до події A** .
Очевидно, що $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

В деяких задачах підрахунок кількості елементарних подій, що утворюють доповнення $\bar{A}$, можна здійснити простіше, ніж підрахунок кількості елементарних подій, що утворюють саму подію A .

Приклад 10. В ящику знаходяться 8 білих і 5 чорних кульок. Знайти ймовірність того, що серед навмання витягнутих з ящика трьох кульок хоча б одна буде чорною.

Розв'язання. Кількість способів вибрати 3 кульки з 13, що містяться в ящику, дорівнює C_{13}^3 .

Протилежна подія

Нехай подія A полягає в тому, що серед трьох витягнутих кульок хоча б одна буде чорною, тобто буде або 1 чорна, або 2 чорних, або 3 чорних кульки.

Розглянемо протилежну подію $\bar{A}$, яка полягає в тому, що серед витягнутих трьох кульок чорні кульки відсутні, тобто всі три витягнуті кульки – білі.

Кількість способів дістати 3 білих кульки з 8, що знаходяться в ящику, дорівнює C_8^3 . Тому ймовірність події $\bar{A}$ дорівнює

$$P(\bar{A}) = C_8^3 / C_{13}^3 \approx 0,196,$$

а ймовірність події A дорівнює

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \approx 1 - 0,196 = 0,804.$$

Відповідь: $\approx 0,804$.

Протилежна подія

Нехай подія A полягає в тому, що серед трьох витягнутих кульок хоча б одна буде чорною, тобто буде або 1 чорна, або 2 чорних, або 3 чорних кульки.

Розглянемо протилежну подію $\bar{A}$, яка полягає в тому, що серед витягнутих трьох кульок чорні кульки відсутні, тобто всі три витягнуті кульки – білі.

Кількість способів дістати 3 білих кульки з 8, що знаходяться в ящику, дорівнює C_8^3 . Тому ймовірність події $\bar{A}$ дорівнює

$$P(\bar{A}) = C_8^3 / C_{13}^3 \approx 0,196,$$

а ймовірність події A дорівнює

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \approx 1 - 0,196 = 0,804.$$

Відповідь: $\approx 0,804$.

Геометрична ймовірність

При деяких випробуваннях простір елементарних подій є нескінченним. Нехай кожній елементарній події можна поставити у взаємно однозначну відповідність точку певної геометричної області G (відрізка на прямій, фігури на площині чи тіла в просторі) так, що ймовірність попадання точки в рівновеликі (відповідно, за довжиною, площею або об'ємом) частини цієї області є прямо пропорційною їх **мірі** (довжині, площі або об'єму). Тоді

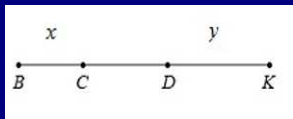
- у якості ймовірності події A , яка може відбутися при такому випробуванні, приймають **геометричну ймовірність**

$$P(A) = \frac{\text{mes}(g)}{\text{mes}(G)},$$

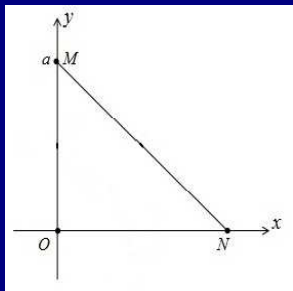
де $\text{mes}(g)$ – міра області g точок, які відповідають елементарним подіям, що входять до події A , а $\text{mes}(G)$ – міра області G .

Геометрична ймовірність

Приклад 11. Відрізок довжини a розділили навмання на три частини. Знайти ймовірність того, що з отриманих частин можна скласти трикутник.



Розв'язання. Нехай задано відрізок BK , на якому навмання вибрано точки C і D (див. мал.), причому довжина частини $BC = x$, довжина $DK = y$, точка C знаходиться ближче до точки B , ніж точка D , тому $BC + DK < BK$. Усім можливим значенням x, y відповідає



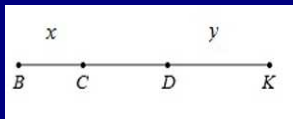
множина G точок, координати яких задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ x + y < a, \end{cases}$$

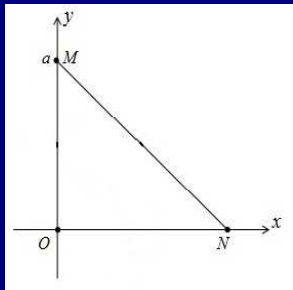
тобто трикутник OMN з вершинами $O(0;0)$, $M(0;a)$, $N(a;0)$, площа якого $S_{OMN} = a^2/2$ (див. мал.).

Геометрична ймовірність

Приклад 11. Відрізок довжини a розділили навмання на три частини. Знайти ймовірність того, що з отриманих частин можна скласти трикутник.



Розв'язання. Нехай задано відрізок BK , на якому навмання вибрано точки C і D (див. мал.), причому довжина частини $BC = x$, довжина $DK = y$, точка C знаходиться ближче до точки B , ніж точка D , тому $BC + DK < BK$. Усім можливим значенням x, y відповідає



множина G точок, координати яких задовольняють систему нерівностей

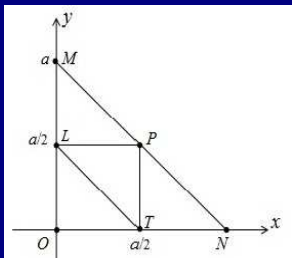
$$\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ x + y < a, \end{cases}$$

тобто трикутник OMN з вершинами $O(0;0)$, $M(0;a)$, $N(a;0)$, площа якого $S_{OMN} = a^2/2$ (див. мал.).

Геометрична ймовірність

Нехай подія A полягає в тому, що з відрізків $BC = x$, $CD = a - x - y$, $DK = y$ можна скласти трикутник. Тоді для довжин цих відрізків повинні виконуватися нерівності трикутника. Всім можливим значенням x, y , що реалізують подію A , відповідає множина g точок, координати яких задовольняють систему нерівностей

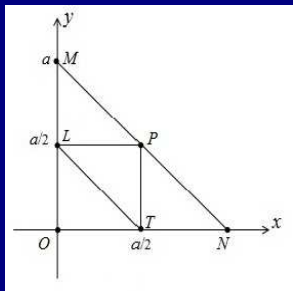
$$\begin{cases} y < a - x - y + x, \\ a - x - y < x + y, \\ x < a - x - y + y \end{cases} \iff \begin{cases} y < \frac{a}{2}, \\ y > \frac{a}{2} - x, \\ x < \frac{a}{2}. \end{cases}$$



На координатній площині розв'язки цієї системи містяться в трикутнику LPT з вершинами $L(0; a/2)$, $P(a/2; a/2)$, $T(a/2; 0)$, площа якого

$$S_{LPT} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{8} \text{ (див. мал.)}.$$

Геометрична ймовірність

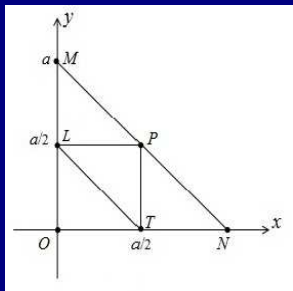


Отже, ймовірність

$$P(A) = \frac{S_{LPT}}{S_{OMN}} = \frac{a^2}{8} : \frac{a^2}{2} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Відповідь: 0,25.

Геометрична ймовірність



Отже, ймовірність

$$P(A) = \frac{S_{LPT}}{S_{OMN}} = \frac{a^2}{8} : \frac{a^2}{2} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Відповідь: 0,25.

Умовна ймовірність

- Умовною ймовірністю $P_A(B)$ називається ймовірність події B , обчислена у припущенні, що подія A вже відбулася.

Приклад 12. З ящика, в якому лежать 4 білих і 5 чорних кульок, по черзі дістають дві кульки. Відомо, що перша кулька виявилась білою. Знайти ймовірність того, що друга кулька також буде білою.

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що перша кулька – біла, а подія B – в тому, що друга кулька – біла. Очевидно, що в початковий момент ймовірність дістати білу кульку дорівнює $4/9$. Проте, відомо, що подія A вже відбулася. Тому знаходження ймовірності події B зводиться до обчислення ймовірності дістати білу кульку при нових умовах, а саме: тепер в ящику залишилося 3 білих і 5 чорних кульок. Оскільки всього в ящику знаходяться 8 кульок, з яких 3 білих, то шукана ймовірність $P_A(B)$ дорівнює $3/8$.

Відповідь: $3/8$.

Умовна ймовірність

- Умовною ймовірністю $P_A(B)$ називається ймовірність події B , обчислена у припущенні, що подія A вже відбулася.

Приклад 12. З ящика, в якому лежать 4 білих і 5 чорних кульок, по черзі дістають дві кульки. Відомо, що перша кулька виявилась білою. Знайти ймовірність того, що друга кулька також буде білою.

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що перша кулька – біла, а подія B – в тому, що друга кулька – біла. Очевидно, що в початковий момент ймовірність дістати білу кульку дорівнює $4/9$. Проте, відомо, що подія A вже відбулася. Тому знаходження ймовірності події B зводиться до обчислення ймовірності дістати білу кульку при нових умовах, а саме: тепер в ящику залишилося 3 білих і 5 чорних кульок. Оскільки всього в ящику знаходяться 8 кульок, з яких 3 білих, то шукана ймовірність $P_A(B)$ дорівнює $3/8$.

Відповідь: $3/8$.

Умовна ймовірність

- Умовною ймовірністю $P_A(B)$ називається ймовірність події B , обчислена у припущенні, що подія A вже відбулася.

Приклад 12. З ящика, в якому лежать 4 білих і 5 чорних кульок, по черзі дістають дві кульки. Відомо, що перша кулька виявилась білою. Знайти ймовірність того, що друга кулька також буде білою.

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що перша кулька – біла, а подія B – в тому, що друга кулька – біла. Очевидно, що в початковий момент ймовірність дістати білу кульку дорівнює $4/9$. Проте, відомо, що подія A вже відбулася. Тому знаходження ймовірності події B зводиться до обчислення ймовірності дістати білу кульку при **нових умовах**, а саме: тепер в ящику залишилося 3 білих і 5 чорних кульок. Оскільки всього в ящику знаходяться 8 кульок, з яких 3 білих, то шукана ймовірність $P_A(B)$ дорівнює $3/8$.

Відповідь: $3/8$.

Умовна ймовірність

- Умовною ймовірністю $P_A(B)$ називається ймовірність події B , обчислена у припущенні, що подія A вже відбулася.

Приклад 12. З ящика, в якому лежать 4 білих і 5 чорних кульок, по черзі дістають дві кульки. Відомо, що перша кулька виявилась білою. Знайти ймовірність того, що друга кулька також буде білою.

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що перша кулька – біла, а подія B – в тому, що друга кулька – біла. Очевидно, що в початковий момент ймовірність дістати білу кульку дорівнює $4/9$. Проте, відомо, що подія A вже відбулася. Тому знаходження ймовірності події B зводиться до обчислення ймовірності дістати білу кульку при **нових умовах**, а саме: тепер в ящику залишилося 3 білих і 5 чорних кульок. Оскільки всього в ящику знаходяться 8 кульок, з яких 3 білих, то шукана ймовірність $P_A(B)$ дорівнює $3/8$.

Відповідь: $3/8$.

Умовна ймовірність

У випадку, коли події A і B – **незалежні**, умовна ймовірність $P_A(B)$ не залежить від здійснення чи не здійснення події A і дорівнює ймовірності здійснення події B , тобто $P_A(B) = P(B)$.

Приклад 13. З ящика, в якому лежать 4 білих і 5 чорних кульок, по черзі дістають дві кульки, повертаючи кожного разу кульку назад в ящик. Відомо, що перша кулька виявилась білою. Знайти ймовірність того, що друга кулька також буде білою.

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що перша кулька – біла, а подія B – в тому, що друга кулька – біла. Оскільки за умов задачі події A і B – незалежні, то ймовірність події B дорівнює ймовірності дістати білу кульку з ящика, в якому лежать 9 кульок, 4 з яких – білі, тобто $P(B) = 4/9$.

Відповідь: $4/9$.

Умовна ймовірність

У випадку, коли події A і B – **незалежні**, умовна ймовірність $P_A(B)$ не залежить від здійснення чи не здійснення події A і дорівнює ймовірності здійснення події B , тобто $P_A(B) = P(B)$.

Приклад 13. З ящика, в якому лежать 4 білих і 5 чорних кульок, по черзі дістають дві кульки, повертаючи кожного разу кульку назад в ящик. Відомо, що перша кулька виявилась білою. Знайти ймовірність того, що друга кулька також буде білою.

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що перша кулька – біла, а подія B – в тому, що друга кулька – біла. Оскільки за умов задачі події A і B – незалежні, то ймовірність події B дорівнює ймовірності дістати білу кульку з ящика, в якому лежать 9 кульок, 4 з яких – білі, тобто $P(B) = 4/9$.

Відповідь: $4/9$.

Умовна ймовірність

У випадку, коли події A і B – **незалежні**, умовна ймовірність $P_A(B)$ не залежить від здійснення чи не здійснення події A і дорівнює ймовірності здійснення події B , тобто $P_A(B) = P(B)$.

Приклад 13. З ящика, в якому лежать 4 білих і 5 чорних кульок, по черзі дістають дві кульки, повертаючи кожного разу кульку назад в ящик. Відомо, що перша кулька виявилась білою. Знайти ймовірність того, що друга кулька також буде білою.

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що перша кулька – біла, а подія B – в тому, що друга кулька – біла. Оскільки за умов задачі події A і B – незалежні, то ймовірність події B дорівнює ймовірності дістати білу кульку з ящика, в якому лежать 9 кульок, 4 з яких – білі, тобто $P(B) = 4/9$.

Відповідь: $4/9$.

Умовна ймовірність

У випадку, коли події A і B – **незалежні**, умовна ймовірність $P_A(B)$ не залежить від здійснення чи не здійснення події A і дорівнює ймовірності здійснення події B , тобто $P_A(B) = P(B)$.

Приклад 13. З ящика, в якому лежать 4 білих і 5 чорних кульок, по черзі дістають дві кульки, повертаючи кожного разу кульку назад в ящик. Відомо, що перша кулька виявилась білою. Знайти ймовірність того, що друга кулька також буде білою.

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що перша кулька – біла, а подія B – в тому, що друга кулька – біла. Оскільки за умов задачі події A і B – незалежні, то ймовірність події B дорівнює ймовірності дістати білу кульку з ящика, в якому лежать 9 кульок, 4 з яких – білі, тобто $P(B) = 4/9$.

Відповідь: $4/9$.

Добуток подій

- **Добутком** (або **перетином**) **подій** A і B називається подія, яка відбувається, якщо в результаті випробування відбуваються обидві події A і B .

Ймовірність добутку двох довільних подій A і B обчислюється за формулою

$$P(A \cdot B) = P(A) P_A(B).$$

Ймовірність добутку двох незалежних подій A і B дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A \cdot B) = P(A) P(B),$$

оскільки при цьому $P_A(B) = P(B)$.

Добуток подій

- **Добутком** (або **перетином**) **подій** A і B називається подія, яка відбувається, якщо в результаті випробування відбуваються обидві події A і B .

Ймовірність добутку двох довільних подій A і B обчислюється за формулою

$$P(A \cdot B) = P(A) P_A(B).$$

Ймовірність добутку двох незалежних подій A і B дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A \cdot B) = P(A) P(B),$$

оскільки при цьому $P_A(B) = P(B)$.

Добуток подій

- **Добутком** (або **перетином**) **подій** A і B називається подія, яка відбувається, якщо в результаті випробування відбуваються обидві події A і B .

Ймовірність добутку двох довільних подій A і B обчислюється за формулою

$$P(A \cdot B) = P(A) P_A(B).$$

Ймовірність добутку двох незалежних подій A і B дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A \cdot B) = P(A) P(B),$$

оскільки при цьому $P_A(B) = P(B)$.

Сума подій

- **Сумою** (або **об'єднанням**) **подій** A і B називається подія, яка відбувається, якщо в результаті випробування відбувається або подія A , або подія B , або обидві ці події.

Ймовірність суми двох довільних подій A і B дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх добутку:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Ймовірність суми двох несумісних подій A і B (тобто подій, які в даному випробуванні не можуть відбутися одночасно) дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A + B) = P(A) + P(B),$$

оскільки при цьому $P(A \cdot B) = 0$.

Сума подій

- **Сумою** (або **об'єднанням**) **подій** A і B називається подія, яка відбувається, якщо в результаті випробування відбувається або подія A , або подія B , або обидві ці події.

Ймовірність суми двох довільних подій A і B дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх добутку:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Ймовірність суми двох несумісних подій A і B (тобто подій, які в даному випробуванні не можуть відбутися одночасно) дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A+B) = P(A) + P(B),$$

оскільки при цьому $P(A \cdot B) = 0$.

Сума подій

- **Сумою** (або **об'єднанням**) **подій** A і B називається подія, яка відбувається, якщо в результаті випробування відбувається або подія A , або подія B , або обидві ці події.

Ймовірність суми двох довільних подій A і B дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх добутку:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Ймовірність суми двох несумісних подій A і B (тобто подій, які в даному випробуванні не можуть відбутися одночасно) дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A + B) = P(A) + P(B),$$

оскільки при цьому $P(A \cdot B) = 0$.

Приклади

Приклад 14. Кожен із трьох стрілків робить по одному пострілу в мішень. Ймовірність влучення в ціль: для першого стрілка – 0,9; для другого – 0,8; для третього – 0,6. Знайти ймовірність таких подій:

A – в мішень влучать рівно два стрілка;

B – в мішень влучить хоча б один стрілок.

Розв'язання. Нехай подія A_1 полягає в тому, що перший стрілок влучить в мішень, подія A_2 – в тому, що в мішень влучить другий стрілок, подія A_3 – в тому, що в мішень влучить третій стрілок; $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ – події, протилежні відповідно до подій A_1 , A_2 , A_3 . Тоді

$$P(A_1) = 0,9, \quad P(A_2) = 0,8, \quad P(A_3) = 0,6, \quad P(\overline{A_1}) = 0,1, \quad P(\overline{A_2}) = 0,2, \\ P(\overline{A_3}) = 0,4.$$

Приклади

Приклад 14. Кожен із трьох стрілків робить по одному пострілу в мішень. Ймовірність влучення в ціль: для першого стрілка – 0,9; для другого – 0,8; для третього – 0,6. Знайти ймовірність таких подій:

A – в мішень влучать рівно два стрілка;

B – в мішень влучить хоча б один стрілок.

Розв'язання. Нехай подія A_1 полягає в тому, що перший стрілок влучить в мішень, подія A_2 – в тому, що в мішень влучить другий стрілок, подія A_3 – в тому, що в мішень влучить третій стрілок; $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ – події, протилежні відповідно до подій A_1 , A_2 , A_3 . Тоді

$$P(A_1) = 0,9, \quad P(A_2) = 0,8, \quad P(A_3) = 0,6, \quad P(\overline{A_1}) = 0,1, \quad P(\overline{A_2}) = 0,2, \\ P(\overline{A_3}) = 0,4.$$

Приклади

Подія A (в мішень влучать рівно два стрілки) відбувається в таких **несумісних** випадках: 1) перші два стрілки влучають в ціль, а третій – не влучає; 2) перший і третій стрілки влучають в ціль, а другий – не влучає; 3) другий і третій стрілки влучають в ціль, а перший – не влучає.

Враховуючи **незалежність** подій A_1, A_2, A_3 , отримуємо

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3) = \\ &= 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,4 + 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,6 = 0,444. \end{aligned}$$

Протилежна події B (в мішень влучить хоча б один стрілок) подія $\overline{B}$ полягає в тому, що в мішень не влучить жоден із стрілків. Тому ймовірність події B можна обчислити так:

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 1 - 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,4 = 0,992.$$

Відповідь: $P(A) = 0,444$, $P(B) = 0,992$.

Приклади

Подія A (в мішень влучать рівно два стрілки) відбувається в таких **несумісних** випадках: 1) перші два стрілки влучають в ціль, а третій – не влучає; 2) перший і третій стрілки влучають в ціль, а другий – не влучає; 3) другий і третій стрілки влучають в ціль, а перший – не влучає.

Враховуючи **незалежність** подій A_1, A_2, A_3 , отримуємо

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3) = \\ &= 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,4 + 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,6 = 0,444. \end{aligned}$$

Протилежна події B (в мішень влучить хоча б один стрілок) подія $\overline{B}$ полягає в тому, що в мішень не влучить жоден із стрілків. Тому ймовірність події B можна обчислити так:

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 1 - 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,4 = 0,992.$$

Відповідь: $P(A) = 0,444$, $P(B) = 0,992$.

Приклади

Подія A (в мішень влучать рівно два стрілки) відбувається в таких **несумісних** випадках: 1) перші два стрілки влучають в ціль, а третій – не влучає; 2) перший і третій стрілки влучають в ціль, а другий – не влучає; 3) другий і третій стрілки влучають в ціль, а перший – не влучає.

Враховуючи **незалежність** подій A_1, A_2, A_3 , отримуємо

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3) = \\ &= 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,4 + 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,6 = 0,444. \end{aligned}$$

Протилежна події B (в мішень влучить хоча б один стрілок) подія $\overline{B}$ полягає в тому, що в мішень не влучить жоден із стрілків. Тому ймовірність події B можна обчислити так:

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 1 - 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,4 = 0,992.$$

Відповідь: $P(A) = 0,444$, $P(B) = 0,992$.

Приклади

Приклад 15. В ящику знаходяться 3 білих і 4 чорних кульки. Два гравці по черзі дістають із ящика по одній кульці, не повертаючи їх назад. Виграє той, хто перший дістане білу кульку. Знайти ймовірність виграшу першого гравця.

Розв'язання. Нехай подія A_k полягає в тому, що перший гравець дістає білу кульку в k -й спробі, а подія B_k полягає в тому, що другий гравець дістає білу кульку в k -й спробі, і $\overline{A_k}, \overline{B_k}$ – події, протилежні відповідно до подій A_k, B_k .

Перший гравець може виграти в таких трьох несутісних випадках.

1) В першій спробі він одразу дістане білу кульку.

Всього в ящику знаходилося 7 кульок, серед них було 3 білих. Отже, ймовірність дістати білу кульку $P(A_1) = 3/7$.

Приклади

Приклад 15. В ящику знаходяться 3 білих і 4 чорних кульки. Два гравці по черзі дістають із ящика по одній кульці, не повертаючи їх назад. Виграє той, хто перший дістане білу кульку. Знайти ймовірність виграшу першого гравця.

Розв'язання. Нехай подія A_k полягає в тому, що перший гравець дістає білу кульку в k -й спробі, а подія B_k полягає в тому, що другий гравець дістає білу кульку в k -й спробі, і $\overline{A_k}, \overline{B_k}$ – події, протилежні відповідно до подій A_k, B_k .

Перший гравець може виграти в таких трьох несутісних випадках.

1) В першій спробі він одразу дістане білу кульку.

Всього в ящику знаходилося 7 кульок, серед них було 3 білих. Отже, ймовірність дістати білу кульку $P(A_1) = 3/7$.

Приклади

Приклад 15. В ящику знаходяться 3 білих і 4 чорних кульки. Два гравці по черзі дістають із ящика по одній кульці, не повертаючи їх назад. Виграє той, хто перший дістане білу кульку. Знайти ймовірність виграшу першого гравця.

Розв'язання. Нехай подія A_k полягає в тому, що перший гравець дістає білу кульку в k -й спробі, а подія B_k полягає в тому, що другий гравець дістає білу кульку в k -й спробі, і $\overline{A_k}, \overline{B_k}$ – події, протилежні відповідно до подій A_k, B_k .

Перший гравець може виграти в таких трьох **несумісних** випадках.

1) В першій спробі він одразу дістане білу кульку.

Всього в ящику знаходилось 7 кульок, серед них було 3 білих. Отже, ймовірність дістати білу кульку $P(A_1) = 3/7$.

Приклади

2) Спочатку перший гравець дістає чорну кульку, ймовірність цієї події $P(\overline{A_1}) = 4/7$. Після цього другий гравець також дістає чорну кульку; на цьому етапі в ящику залишалось 3 білих і 3 чорних кульки, тому ймовірність цієї події $P_{\overline{A_1}}(\overline{B_1}) = 3/6 = 1/2$. Нарешті, в своїй другій спробі перший гравець дістає білу кульку; на цьому етапі в ящику залишалось 3 білих і 2 чорних кульки, тому ймовірність цієї події $P_{\overline{A_1} \cdot \overline{B_1}}(A_2) = 3/5$.

3) Перший і другий гравці по черзі двічі дістають чорні кульки, ймовірності цих подій дорівнюють відповідно $P(\overline{A_1}) = 4/7$, $P_{\overline{A_1}}(\overline{B_1}) = 1/2$, $P_{\overline{A_1} \cdot \overline{B_1}}(\overline{A_2}) = 2/5$, $P_{\overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{A_2}}(\overline{B_2}) = 1/4$. В своїй третій спробі перший гравець дістає білу кульку; на цей момент в ящику залишається тільки 3 білих кульки, тому ймовірність цієї події $P_{\overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{B_2}}(A_3) = 1$.

Приклади

2) Спочатку перший гравець дістає чорну кульку, ймовірність цієї події $P(\overline{A_1}) = 4/7$. Після цього другий гравець також дістає чорну кульку; на цьому етапі в ящику залишалось 3 білих і 3 чорних кульки, тому ймовірність цієї події $P_{\overline{A_1}}(\overline{B_1}) = 3/6 = 1/2$. Нарешті, в своїй другій спробі перший гравець дістає білу кульку; на цьому етапі в ящику залишалось 3 білих і 2 чорних кульки, тому ймовірність цієї події $P_{\overline{A_1} \cdot \overline{B_1}}(A_2) = 3/5$.

3) Перший і другий гравці по черзі двічі дістають чорні кульки, ймовірності цих подій дорівнюють відповідно $P(\overline{A_1}) = 4/7$, $P_{\overline{A_1}}(\overline{B_1}) = 1/2$, $P_{\overline{A_1} \cdot \overline{B_1}}(\overline{A_2}) = 2/5$, $P_{\overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{A_2}}(\overline{B_2}) = 1/4$. В своїй третій спробі перший гравець дістає білу кульку; на цей момент в ящику залишається тільки 3 білих кульки, тому ймовірність цієї події $P_{\overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{B_2}}(A_3) = 1$.

Приклади

З урахуванням **несумісності** описаних у перерахованих випадках подій обчислюємо ймовірність виграшу першого гравця:

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(A_1) + P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{B_1})P_{\overline{A_1} \cdot \overline{B_1}}(A_2) + \\
 &+ P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{B_1})P_{\overline{A_1} \cdot \overline{B_1}}(\overline{A_2})P_{\overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{A_2}}(\overline{B_2})P_{\overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{B_2}}(A_3) = \\
 &= \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{22}{35} \approx 0,63.
 \end{aligned}$$

Відповідь: $\approx 0,63$.

Приклади

З урахуванням **несумісності** описаних у перерахованих випадках подій обчислюємо ймовірність виграшу першого гравця:

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(A_1) + P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{B_1})P_{\overline{A_1} \cdot \overline{B_1}}(A_2) + \\
 &+ P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{B_1})P_{\overline{A_1} \cdot \overline{B_1}}(\overline{A_2})P_{\overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{A_2}}(\overline{B_2})P_{\overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{B_2}}(A_3) = \\
 &= \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{22}{35} \approx 0,63.
 \end{aligned}$$

Відповідь: $\approx 0,63$.

Формула Бернуллі

Нехай проводиться серія з n незалежних випробувань, в кожному з яких може бути два результати: "успіх" із ймовірністю p або "невдача" із ймовірністю $q = 1 - p$. Ймовірність того, що в такій серії рівно k випробувань закінчатся "успіхом", обчислюється за **формулою Бернуллі**

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k},$$

а сама серія випробувань називається схемою Бернуллі.

Приклад 16. Проводиться 7 незалежних пострілів в ціль, ймовірність влучення в яку з одного пострілу дорівнює 0,6. Знайти: 1) ймовірність рівно 5 влучень в ціль; 2) ймовірність, принаймні, двох влучень в ціль.

Розв'язання. Очевидно, що серія пострілів є схемою Бернуллі, в якій $n = 7$; $p = 0,6$; $q = 1 - p = 0,4$.

1) Ймовірність рівно 5 влучень із 7 пострілів дорівнює

$$P_7(5) = C_7^5 (0,6)^5 (0,4)^2 \approx 0,261.$$

Формула Бернуллі

Нехай проводиться серія з n незалежних випробувань, в кожному з яких може бути два результати: "успіх" із ймовірністю p або "невдача" із ймовірністю $q = 1 - p$. Ймовірність того, що в такій серії рівно k випробувань закінчатся "успіхом", обчислюється за **формулою Бернуллі**

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k},$$

а сама серія випробувань називається схемою Бернуллі.

Приклад 16. Проводиться 7 незалежних пострілів в ціль, ймовірність влучення в яку з одного пострілу дорівнює 0,6. Знайти: 1) ймовірність рівно 5 влучень в ціль; 2) ймовірність, принаймні, двох влучень в ціль.

Розв'язання. Очевидно, що серія пострілів є схемою Бернуллі, в якій $n = 7$; $p = 0,6$; $q = 1 - p = 0,4$.

1) Ймовірність рівно 5 влучень із 7 пострілів дорівнює

$$P_7(5) = C_7^5 (0,6)^5 (0,4)^2 \approx 0,261.$$

Формула Бернуллі

Нехай проводиться серія з n незалежних випробувань, в кожному з яких може бути два результати: "успіх" із ймовірністю p або "невдача" із ймовірністю $q = 1 - p$. Ймовірність того, що в такій серії рівно k випробувань закінчатся "успіхом", обчислюється за **формулою Бернуллі**

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k},$$

а сама серія випробувань називається схемою Бернуллі.

Приклад 16. Проводиться 7 незалежних пострілів в ціль, ймовірність влучення в яку з одного пострілу дорівнює 0,6. Знайти: 1) ймовірність рівно 5 влучень в ціль; 2) ймовірність, принаймні, двох влучень в ціль.

Розв'язання. Очевидно, що серія пострілів є схемою Бернуллі, в якій $n = 7$; $p = 0,6$; $q = 1 - p = 0,4$.

1) Ймовірність рівно 5 влучень із 7 пострілів дорівнює

$$P_7(5) = C_7^5 (0,6)^5 (0,4)^2 \approx 0,261.$$

Формула Бернуллі

Нехай проводиться серія з n незалежних випробувань, в кожному з яких може бути два результати: "успіх" із ймовірністю p або "невдача" із ймовірністю $q = 1 - p$. Ймовірність того, що в такій серії рівно k випробувань закінчатся "успіхом", обчислюється за **формулою Бернуллі**

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k},$$

а сама серія випробувань називається схемою Бернуллі.

Приклад 16. Проводиться 7 незалежних пострілів в ціль, ймовірність влучення в яку з одного пострілу дорівнює 0,6. Знайти: 1) ймовірність рівно 5 влучень в ціль; 2) ймовірність, принаймні, двох влучень в ціль.

Розв'язання. Очевидно, що серія пострілів є схемою Бернуллі, в якій $n = 7$; $p = 0,6$; $q = 1 - p = 0,4$.

1) Ймовірність рівно 5 влучень із 7 пострілів дорівнює

$$P_7(5) = C_7^5 (0,6)^5 (0,4)^2 \approx 0,261.$$

Формула Бернуллі

2) Протилежною події "принаймні, два влучення в ціль" є подія "або одне влучення, або жодного", тому шукану ймовірність можна обчислити так:

$$P(A) = 1 - P_7(1) - P_7(0) = 1 - C_7^1 (0,6)^1 (0,4)^6 - C_7^0 (0,6)^0 (0,4)^7 \approx \\ \approx 1 - 0,017 - 0,002 = 0,981.$$

Відповідь: 1) $\approx 0,261$; 2) $\approx 0,981$.

Формула Бернуллі

2) Протилежною події "принаймні, два влучення в ціль" є подія "або одне влучення, або жодного", тому шукану ймовірність можна обчислити так:

$$P(A) = 1 - P_7(1) - P_7(0) = 1 - C_7^1 (0,6)^1 (0,4)^6 - C_7^0 (0,6)^0 (0,4)^7 \approx \\ \approx 1 - 0,017 - 0,002 = 0,981.$$

Відповідь: 1) $\approx 0,261$; 2) $\approx 0,981$.

Елементи математичної статистики

Вибіркою об'єму n називається набір величин $x_1, x_2, \dots, x_n$, вибраних за певною процедурою із сукупності об'єктів, що вивчаються дослідником. За допомогою вибірки роблять висновки відносно об'єктів усієї сукупності.

Розмістимо величини $x_1, x_2, \dots, x_n$ у порядку неспадання і отриману послідовність позначимо у наступний спосіб: $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$. Така послідовність називається **варіаційним рядом** вибірки.

Якщо деякі значення в послідовності $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ повторюються, то таку вибірку зручніше записати у вигляді таблиці, яка називається **статистичним рядом**:

Значення	y_1	y_2	$\dots$	y_s
Частота	m_1	m_2	$\dots$	m_s

де $y_1, y_2, \dots, y_s$ – різні значення даних варіаційного ряду $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$, а m_i – кількість повторів значення y_i в цьому ряді, $i = 1, 2, \dots, s$. Очевидно, що $m_1 + m_2 + \dots + m_s = n$.

Елементи математичної статистики

Вибіркою об'єму n називається набір величин $x_1, x_2, \dots, x_n$, вибраних за певною процедурою із сукупності об'єктів, що вивчаються дослідником. За допомогою вибірки роблять висновки відносно об'єктів усієї сукупності.

Розмістимо величини $x_1, x_2, \dots, x_n$ у порядку неспадання і отриману послідовність позначимо у наступний спосіб: $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$. Така послідовність називається **варіаційним рядом** вибірки.

Якщо деякі значення в послідовності $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ повторюються, то таку вибірку зручніше записати у вигляді таблиці, яка називається **статистичним рядом**:

Значення	y_1	y_2	$\dots$	y_s
Частота	m_1	m_2	$\dots$	m_s

де $y_1, y_2, \dots, y_s$ – різні значення даних варіаційного ряду $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$, а m_i – кількість повторів значення y_i в цьому ряді, $i = 1, 2, \dots, s$. Очевидно, що $m_1 + m_2 + \dots + m_s = n$.

Елементи математичної статистики

Вибіркою об'єму n називається набір величин $x_1, x_2, \dots, x_n$, вибраних за певною процедурою із сукупності об'єктів, що вивчаються дослідником. За допомогою вибірки роблять висновки відносно об'єктів усієї сукупності.

Розмістимо величини $x_1, x_2, \dots, x_n$ у порядку неспадання і отриману послідовність позначимо у наступний спосіб: $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$. Така послідовність називається **варіаційним рядом** вибірки.

Якщо деякі значення в послідовності $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ повторюються, то таку вибірку зручніше записати у вигляді таблиці, яка називається **статистичним рядом**:

Значення	y_1	y_2	$\dots$	y_s
Частота	m_1	m_2	$\dots$	m_s

де $y_1, y_2, \dots, y_s$ – різні значення даних варіаційного ряду $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$, а m_i – кількість повторів значення y_i в цьому ряді, $i = 1, 2, \dots, s$. Очевидно, що $m_1 + m_2 + \dots + m_s = n$.

Елементи математичної статистики

- **Розмахом вибірки** Δ називається різниця між максимальним і мінімальним елементами вибірки або те ж саме, що і різниця між останнім і першим елементами варіаційного або статистичного ряду: $\Delta = x_{(n)} - x_{(1)}$.
- **Мода вибірки** (позначається M_o) – це елемент, який частіше всього зустрічається у виборці, тобто елемент статистичного ряду, якому відповідає найбільша частота: $M_o = u_k$, якщо $m_k = \max_i m_i$.

Якщо кілька елементів статистичного ряду мають однакову найбільшу частоту, то вибірка має кілька мод.

Елементи математичної статистики

- **Розмахом вибірки** Δ називається різниця між максимальним і мінімальним елементами вибірки або те ж саме, що і різниця між останнім і першим елементами варіаційного або статистичного ряду: $\Delta = x_{(n)} - x_{(1)}$.
- **Мода вибірки** (позначається Mo) – це елемент, який частіше всього зустрічається у виборці, тобто елемент статистичного ряду, якому відповідає найбільша частота: $Mo = y_k$, якщо $m_k = \max_i m_i$.

Якщо кілька елементів статистичного ряду мають однакову найбільшу частоту, то вибірка має кілька мод.

Елементи математичної статистики

- **Медіана вибірки** (позначається Me) – це елемент, який знаходиться посередині варіаційного ряду вибірки.

Якщо кількість елементів вибірки непарна: $n = 2k - 1$, то посередині варіаційного ряду знаходиться один елемент з номером k : $Me = x_{(k)}$.

Якщо кількість елементів вибірки парна: $n = 2k$, то посередині варіаційного ряду знаходяться два елементи з номерами k та $k + 1$ і медіана дорівнює їх середньому арифметичному:

$$Me = \frac{x_{(k)} + x_{(k+1)}}{2}.$$

Елементи математичної статистики

- Середнє вибірки (позначається $\bar{x}$) дорівнює середньому арифметичному усіх елементів вибірки:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Середнє для статистичного ряду

Значення	y_1	y_2	$\dots$	y_s
Частота	m_1	m_2	$\dots$	m_s

обчислюється за формулою:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s y_i m_i = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \cdots + y_s m_s}{n},$$

де $n = m_1 + m_2 + \cdots + m_s$.

Елементи математичної статистики

- **Середнє вибірки** (позначається $\bar{x}$) дорівнює середньому арифметичному усіх елементів вибірки:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Середнє для статистичного ряду

Значення	y_1	y_2	$\dots$	y_s
Частота	m_1	m_2	$\dots$	m_s

обчислюється за формулою:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s y_i m_i = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \cdots + y_s m_s}{n},$$

де $n = m_1 + m_2 + \cdots + m_s$.

Елементи математичної статистики

Приклад 17. Задано вибірку:

4, 2, 10, 3, 5, 5, 8, 4, 10, 7, 3, 2, 5, 8, 3, 5, 2.

- 1) Записати вибірку у вигляді варіаційного і статистичного ряду.
- 2) Обчислити розмах, моду, медіану і середнє вибірки.
- 3) Представити вибірку у вигляді графіка.

Розв'язання. 1) Запишемо **варіаційний ряд** вибірки:

2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 7, 8, 8, 10.

Представимо вибірку у вигляді **статистичного ряду**:

y_i	2	3	4	5	7	8	10
m_i	3	3	2	4	1	2	1

2) **Розмах** вибірки $\Delta = x_{(n)} - x_{(1)} = 10 - 2 = 8$.

Мода $Mo = 5$, оскільки елемент 5 має найбільшу частоту 4.

Елементи математичної статистики

Приклад 17. Задано вибірку:

4, 2, 10, 3, 5, 5, 8, 4, 10, 7, 3, 2, 5, 8, 3, 5, 2.

- 1) Записати вибірку у вигляді варіаційного і статистичного ряду.
- 2) Обчислити розмах, моду, медіану і середнє вибірки.
- 3) Представити вибірку у вигляді графіка.

Розв'язання. 1) Запишемо **варіаційний ряд** вибірки:

2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 7, 8, 8, 10.

Представимо вибірку у вигляді **статистичного ряду**:

y_i	2	3	4	5	7	8	10
m_i	3	3	2	4	1	2	1

2) Розмах вибірки $\Delta = x_{(n)} - x_{(1)} = 10 - 2 = 8$.

Мода $Mo = 5$, оскільки елемент 5 має найбільшу частоту 4.

Елементи математичної статистики

Приклад 17. Задано вибірку:

4, 2, 10, 3, 5, 5, 8, 4, 10, 7, 3, 2, 5, 8, 3, 5, 2.

- 1) Записати вибірку у вигляді варіаційного і статистичного ряду.
- 2) Обчислити розмах, моду, медіану і середнє вибірки.
- 3) Представити вибірку у вигляді графіка.

Розв'язання. 1) Запишемо **варіаційний ряд** вибірки:

2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 7, 8, 8, 10.

Представимо вибірку у вигляді **статистичного ряду**:

y_i	2	3	4	5	7	8	10
m_i	3	3	2	4	1	2	1

2) Розмах вибірки $\Delta = x_{(n)} - x_{(1)} = 10 - 2 = 8$.

Мода $Mo = 5$, оскільки елемент 5 має найбільшу частоту 4.

Елементи математичної статистики

Приклад 17. Задано вибірку:

4, 2, 10, 3, 5, 5, 8, 4, 10, 7, 3, 2, 5, 8, 3, 5, 2.

- 1) Записати вибірку у вигляді варіаційного і статистичного ряду.
- 2) Обчислити розмах, моду, медіану і середнє вибірки.
- 3) Представити вибірку у вигляді графіка.

Розв'язання. 1) Запишемо **варіаційний ряд** вибірки:

2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 7, 8, 8, 10.

Представимо вибірку у вигляді **статистичного ряду**:

y_i	2	3	4	5	7	8	10
m_i	3	3	2	4	1	2	1

2) **Розмах** вибірки $\Delta = x_{(n)} - x_{(1)} = 10 - 2 = 8$.

Мода $Mo = 5$, оскільки елемент 5 має найбільшу частоту 4.

Елементи математичної статистики

Приклад 17. Задано вибірку:

4, 2, 10, 3, 5, 5, 8, 4, 10, 7, 3, 2, 5, 8, 3, 5, 2.

- 1) Записати вибірку у вигляді варіаційного і статистичного ряду.
- 2) Обчислити розмах, моду, медіану і середнє вибірки.
- 3) Представити вибірку у вигляді графіка.

Розв'язання. 1) Запишемо **варіаційний ряд** вибірки:

2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 7, 8, 8, 10.

Представимо вибірку у вигляді **статистичного ряду**:

y_i	2	3	4	5	7	8	10
m_i	3	3	2	4	1	2	1

2) **Розмах** вибірки $\Delta = x_{(n)} - x_{(1)} = 10 - 2 = 8$.

Мода $M_o = 5$, оскільки елемент 5 має найбільшу частоту 4.

Елементи математичної статистики

Для обчислення медіани знайдемо середній елемент варіаційного ряду:

2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 7, 8, 8, 10.

Кількість елементів вибірки $n = 16$, посередині варіаційного ряду знаходяться елементи $x_{(8)} = 4$, $x_{(9)} = 5$.

Отже, **медіана** дорівнює

$$Me = \frac{x_{(8)} + x_{(9)}}{2} = \frac{4 + 5}{2} = 4,5.$$

Середнє вибірки знаходимо за формулою

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s y_i m_i = \frac{1}{16} (2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 10 \cdot 1) = \\ &= 4,75.\end{aligned}$$

Елементи математичної статистики

Для обчислення медіани знайдемо середній елемент варіаційного ряду:

2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 7, 8, 8, 10.

Кількість елементів вибірки $n = 16$, посередині варіаційного ряду знаходяться елементи $x_{(8)} = 4$, $x_{(9)} = 5$.

Отже, **медіана** дорівнює

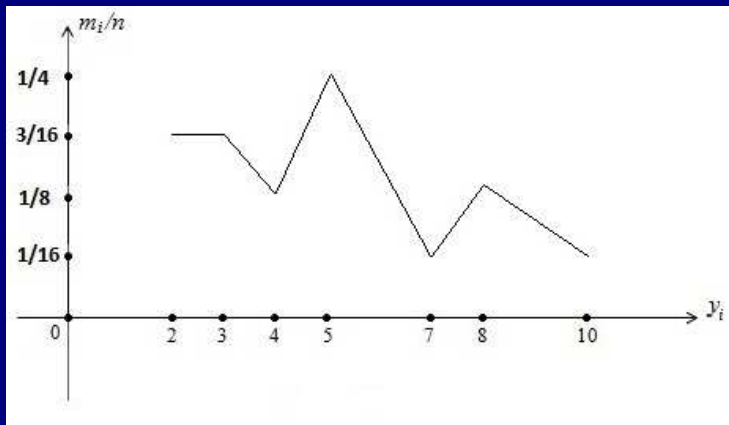
$$Me = \frac{x_{(8)} + x_{(9)}}{2} = \frac{4 + 5}{2} = 4,5.$$

Середнє вибірки знаходимо за формулою

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s y_i m_i = \frac{1}{16} (2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 10 \cdot 1) = \\ &= 4,75.\end{aligned}$$

Елементи математичної статистики

3) Зазвичай вибірку представляють графічно у вигляді **полігону частот**, при цьому на осі абсцис відкладають значення статистичного ряду y_i , а на осі ординат – значення m_i/n (див. мал.).



Приклади із ЗНО

Приклад 18 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2019 р.). У фінал пісенного конкурсу вийшли 4 солісти та 3 гурти. Порядковий номер виступу фіналістів визначають жеребкуванням. Скільки всього є варіантів послідовностей виступів фіналістів, якщо спочатку виступатимуть гурти, а після них – солісти? Вважайте, що кожен фіналіст виступатиме у фіналі лише один раз.

Розв'язання. Число різних варіантів послідовностей виступів 3-х гуртів дорівнює $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, а число різних варіантів послідовностей виступів 4-х солістів дорівнює $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Тому існує всього $6 \cdot 24 = 144$ різних варіантів послідовностей виступів фіналістів.

Відповідь: 144.

Приклади із ЗНО

Приклад 18 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2019 р.). У фінал пісенного конкурсу вийшли 4 солісти та 3 гурти. Порядковий номер виступу фіналістів визначають жеребкуванням. Скільки всього є варіантів послідовностей виступів фіналістів, якщо спочатку виступатимуть гурти, а після них – солісти? Вважайте, що кожен фіналіст виступатиме у фіналі лише один раз.

Розв'язання. Число різних варіантів послідовностей виступів 3-х гуртів дорівнює $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, а число різних варіантів послідовностей виступів 4-х солістів дорівнює $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Тому існує всього $6 \cdot 24 = 144$ різних варіантів послідовностей виступів фіналістів.

Відповідь: 144.

Приклади із ЗНО

Приклад 18 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2019 р.). У фінал пісенного конкурсу вийшли 4 солісти та 3 гурти. Порядковий номер виступу фіналістів визначають жеребкуванням. Скільки всього є варіантів послідовностей виступів фіналістів, якщо спочатку виступатимуть гурти, а після них – солісти? Вважайте, що кожен фіналіст виступатиме у фіналі лише один раз.

Розв'язання. Число різних варіантів послідовностей виступів 3-х гуртів дорівнює $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, а число різних варіантів послідовностей виступів 4-х солістів дорівнює $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Тому існує всього $6 \cdot 24 = 144$ різних варіантів послідовностей виступів фіналістів.

Відповідь: 144.

Приклади із ЗНО

Приклад 19 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2018 р.). В Оленки є 8 різних фотографій з її зображенням та 6 різних фотографій її класу. Скільки всього в неї є способів вибрати з них 3 фотографії зі своїм зображенням для персональної сторінки в соціальній мережі та 2 фотографії свого класу для сайту школи?

Розв'язання. Число способів вибрати 3 фотографії Оленки з 8-ми різних фотографій дорівнює числу комбінацій

$$C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$$

Число способів вибрати 2 фотографії класу з 6-ти різних фотографій дорівнює числу комбінацій $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$.

Тому всього є $56 \cdot 15 = 840$ різних способів вказаного в умові задачі вибору фотографій.

Відповідь: 840.

Приклади із ЗНО

Приклад 19 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2018 р.). В Оленки є 8 різних фотографій з її зображенням та 6 різних фотографій її класу. Скільки всього в неї є способів вибрати з них 3 фотографії зі своїм зображенням для персональної сторінки в соціальній мережі та 2 фотографії свого класу для сайту школи?

Розв'язання. Число способів вибрати 3 фотографії Оленки з 8-ми різних фотографій дорівнює числу комбінацій

$$C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$$

Число способів вибрати 2 фотографії класу з 6-ти різних фотографій дорівнює числу комбінацій $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$.

Тому всього є $56 \cdot 15 = 840$ різних способів вказаного в умові задачі вибору фотографій.

Відповідь: 840.

Приклади із ЗНО

Приклад 19 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2018 р.). В Оленки є 8 різних фотографій з її зображенням та 6 різних фотографій її класу. Скільки всього в неї є способів вибрати з них 3 фотографії зі своїм зображенням для персональної сторінки в соціальній мережі та 2 фотографії свого класу для сайту школи?

Розв'язання. Число способів вибрати 3 фотографії Оленки з 8-ми різних фотографій дорівнює числу комбінацій

$$C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$$

Число способів вибрати 2 фотографії класу з 6-ти різних фотографій дорівнює числу комбінацій $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$.

Тому всього є $56 \cdot 15 = 840$ різних способів вказаного в умові задачі вибору фотографій.

Відповідь: 840.

Приклади із ЗНО

Приклад 20 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2017 р.).
У торбинці лежать 3 цукерки з молочного шоколаду та m цукерок з чорного шоколаду. Усі цукерки – однакової форми й розміру. Якого НАЙМЕНШОГО ЗНАЧЕННЯ може набувати m , якщо ймовірність навмання витягнути з торбинки цукерку з молочного шоколаду менша за 0,25?

Розв'язання. Оскільки в торбинці лежать 3 цукерки з молочного шоколаду та m цукерок з чорного шоколаду, то ймовірність навмання витягнути цукерку з молочного шоколаду дорівнює $\frac{3}{m+3}$.

Для знаходження m маємо нерівність $\frac{3}{m+3} < \frac{1}{4}$.

Звідси з урахуванням того, що $m+3 > 0$, отримуємо

$$12 < m+3 \iff m > 9.$$

Отже, найменше натуральне число m , яке задовольняє останню нерівність, – це $m = 10$.

Відповідь: 10.

Приклади із ЗНО

Приклад 20 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2017 р.).
У торбинці лежать 3 цукерки з молочного шоколаду та m цукерок з чорного шоколаду. Усі цукерки – однакової форми й розміру. Якого НАЙМЕНШОГО ЗНАЧЕННЯ може набувати m , якщо ймовірність навмання витягнути з торбинки цукерку з молочного шоколаду менша за 0,25?

Розв'язання. Оскільки в торбинці лежать 3 цукерки з молочного шоколаду та m цукерок з чорного шоколаду, то ймовірність навмання витягнути цукерку з молочного шоколаду дорівнює $\frac{3}{m+3}$.

Для знаходження m маємо нерівність $\frac{3}{m+3} < \frac{1}{4}$.

Звідси з урахуванням того, що $m+3 > 0$, отримуємо

$$12 < m+3 \iff m > 9.$$

Отже, найменше натуральне число m , яке задовольняє останню нерівність, – це $m = 10$.

Відповідь: 10.

Приклади із ЗНО

Приклад 20 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2017 р.).
У торбинці лежать 3 цукерки з молочного шоколаду та m цукерок з чорного шоколаду. Усі цукерки – однакової форми й розміру. Якого НАЙМЕНШОГО ЗНАЧЕННЯ може набувати m , якщо ймовірність навмання витягнути з торбинки цукерку з молочного шоколаду менша за 0,25?

Розв'язання. Оскільки в торбинці лежать 3 цукерки з молочного шоколаду та m цукерок з чорного шоколаду, то ймовірність навмання витягнути цукерку з молочного шоколаду дорівнює $\frac{3}{m+3}$.

Для знаходження m маємо нерівність $\frac{3}{m+3} < \frac{1}{4}$.

Звідси з урахуванням того, що $m+3 > 0$, отримуємо

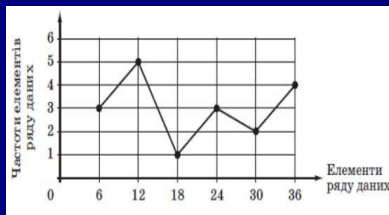
$$12 < m+3 \iff m > 9.$$

Отже, найменше натуральне число m , яке задовольняє останню нерівність, – це $m = 10$.

Відповідь: 10.

Приклади із ЗНО

Приклад 21 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2014 р.).



На рисунку зображено полігон частот певного ряду даних, на якому по осі абсцис відмічені елементи цього ряду, а по осі ординат – їхні частоти.

Встановіть відповідність між характеристикою (1-4) цього ряду даних та її числовим значенням (А-Д).

Характеристика ряду даних:

- 1) кількість елементів;
- 2) розмах;
- 3) мода;
- 4) медіана.

Числове значення характеристики:

- А) 12;
- Б) 18;
- В) 21;
- Г) 30;
- Д) 36.

Приклади із ЗНО

Розв'язання. **Розмах** $\Delta = 36 - 6 = 30$ як різниця між максимальним і мінімальним елементами ряду даних.

Мода $M_o = 12$, оскільки елемент 12 має найбільшу частоту 5.

Для підрахунку кількості елементів та обчислення медіани представимо дані у вигляді варіаційного ряду:

6, 6, 6, 12, 12, 12, 12, 12, 18, 24, 24, 24, 24, 30, 30, 36, 36, 36, 36.

Кількість елементів ряду $n = 18$.

Посередині варіаційного ряду знаходяться елементи

$x_{(9)} = 18$, $x_{(10)} = 24$. Тому **медіана** дорівнює

$$Me = \frac{x_{(9)} + x_{(10)}}{2} = \frac{18 + 24}{2} = 21.$$

Відповідь: 1-Б, 2-Г, 3-А, 4-В.

Відзначимо, що в Прикладі 21 на полігоні частот по осі ординат відмічена частота m_i , тобто кількість повторень елемента $x_{(i)}$ в ряді, на відміну від Приклада 17, де по осі ординат відмічено значення величини m_i/n .

Приклади із ЗНО

Розв'язання. **Розмах** $\Delta = 36 - 6 = 30$ як різниця між максимальним і мінімальним елементами ряду даних.

Мода $M_o = 12$, оскільки елемент 12 має найбільшу частоту 5.

Для підрахунку кількості елементів та обчислення медіани представимо дані у вигляді варіаційного ряду:

6, 6, 6, 12, 12, 12, 12, 12, 18, 24, 24, 24, 24, 30, 30, 36, 36, 36, 36.

Кількість елементів ряду $n = 18$.

Посередині варіаційного ряду знаходяться елементи

$x_{(9)} = 18$, $x_{(10)} = 24$. Тому **медіана** дорівнює

$$Me = \frac{x_{(9)} + x_{(10)}}{2} = \frac{18 + 24}{2} = 21.$$

Відповідь: 1-Б, 2-Г, 3-А, 4-В.

Відзначимо, що в Прикладі 21 на полігоні частот по осі ординат відмічена частота m_i , тобто кількість повторень елемента $x_{(i)}$ в ряді, на відміну від Приклада 17, де по осі ординат відмічено значення величини m_i/n .

Приклади із ЗНО

Розв'язання. **Розмах** $\Delta = 36 - 6 = 30$ як різниця між максимальним і мінімальним елементами ряду даних.

Мода $M_o = 12$, оскільки елемент 12 має найбільшу частоту 5.

Для підрахунку кількості елементів та обчислення медіани представимо дані у вигляді варіаційного ряду:

6, 6, 6, 12, 12, 12, 12, 12, 18, 24, 24, 24, 24, 30, 30, 36, 36, 36, 36.

Кількість елементів ряду $n = 18$.

Посередині варіаційного ряду знаходяться елементи $x_{(9)} = 18$, $x_{(10)} = 24$. Тому медіана дорівнює

$$Me = \frac{x_{(9)} + x_{(10)}}{2} = \frac{18 + 24}{2} = 21.$$

Відповідь: 1-Б, 2-Г, 3-А, 4-В.

Відзначимо, що в Прикладі 21 на полігоні частот по осі ординат відмічена частота m_i , тобто кількість повторень елемента $x_{(i)}$ в ряді, на відміну від Приклада 17, де по осі ординат відмічено значення величини m_i/n .

Приклади із ЗНО

Розв'язання. **Розмах** $\Delta = 36 - 6 = 30$ як різниця між максимальним і мінімальним елементами ряду даних.

Мода $M_o = 12$, оскільки елемент 12 має найбільшу частоту 5.

Для підрахунку кількості елементів та обчислення медіани представимо дані у вигляді варіаційного ряду:

6, 6, 6, 12, 12, 12, 12, 12, 18, 24, 24, 24, 24, 30, 30, 36, 36, 36, 36.

Кількість елементів ряду $n = 18$.

Посередині варіаційного ряду знаходяться елементи $x_{(9)} = 18$, $x_{(10)} = 24$. Тому **медіана** дорівнює

$$Me = \frac{x_{(9)} + x_{(10)}}{2} = \frac{18 + 24}{2} = 21.$$

Відповідь: 1-Б, 2-Г, 3-А, 4-В.

Відзначимо, що в Прикладі 21 на полігоні частот по осі ординат відмічена частота m_i , тобто кількість повторень елемента $x_{(i)}$ в ряді, на відміну від Прикладу 17, де по осі ординат відмічено значення величини m_i/n .

Приклади із ЗНО

Розв'язання. **Розмах** $\Delta = 36 - 6 = 30$ як різниця між максимальним і мінімальним елементами ряду даних.

Мода $M_o = 12$, оскільки елемент 12 має найбільшу частоту 5.

Для підрахунку кількості елементів та обчислення медіани представимо дані у вигляді варіаційного ряду:

6, 6, 6, 12, 12, 12, 12, 12, 18, 24, 24, 24, 24, 30, 30, 36, 36, 36, 36.

Кількість елементів ряду $n = 18$.

Посередині варіаційного ряду знаходяться елементи

$x_{(9)} = 18$, $x_{(10)} = 24$. Тому **медіана** дорівнює

$$Me = \frac{x_{(9)} + x_{(10)}}{2} = \frac{18 + 24}{2} = 21.$$

Відповідь: 1-Б, 2-Г, 3-А, 4-В.

Відзначимо, що в Прикладі 21 на полігоні частот по осі ординат відмічена частота m_i , тобто кількість повторень елемента $x_{(i)}$ в ряді, на відміну від Прикладу 17, де по осі ординат відмічено значення величини m_i/n .

Приклади із ЗНО

Розв'язання. **Розмах** $\Delta = 36 - 6 = 30$ як різниця між максимальним і мінімальним елементами ряду даних.

Мода $M_o = 12$, оскільки елемент 12 має найбільшу частоту 5.

Для підрахунку кількості елементів та обчислення медіани представимо дані у вигляді варіаційного ряду:

6, 6, 6, 12, 12, 12, 12, 12, 18, 24, 24, 24, 24, 30, 30, 36, 36, 36, 36.

Кількість елементів ряду $n = 18$.

Посередині варіаційного ряду знаходяться елементи

$x_{(9)} = 18$, $x_{(10)} = 24$. Тому **медіана** дорівнює

$$Me = \frac{x_{(9)} + x_{(10)}}{2} = \frac{18 + 24}{2} = 21.$$

Відповідь: 1-Б, 2-Г, 3-А, 4-В.

Відзначимо, що в Прикладі 21 на полігоні частот по осі ординат відмічена частота m_i , тобто кількість повторень елемента $x_{(i)}$ в ряді, на відміну від Приклада 17, де по осі ординат відмічено значення величини m_i/n .