

Інтеграл і первісна

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 35



Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Первісна і невизначений інтеграл

- Функція $F(x)$ називається **первісною** для функції $f(x)$ на деякому проміжку, якщо для всіх x з цього проміжку виконується співвідношення $F'(x) = f(x)$.

Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, то будь-яка функція вигляду $F(x) + C$, де C – довільне дійсне число, також є первісною для $f(x)$.

- Операцію знаходження первісної $F(x)$ для заданої функції $f(x)$ називають **невизначеним інтегруванням** функції $f(x)$.

Невизначеність цієї операції полягає в тому, що первісна для функції $f(x)$ знаходиться лише з точністю до сталого доданка C .

Первісна і невизначений інтеграл

- Функція $F(x)$ називається **первісною** для функції $f(x)$ на деякому проміжку, якщо для всіх x з цього проміжку виконується співвідношення $F'(x) = f(x)$.

Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, то будь-яка функція вигляду $F(x) + C$, де C – довільне дійсне число, також є первісною для $f(x)$.

- Операцію знаходження первісної $F(x)$ для заданої функції $f(x)$ називають **невизначеним інтегруванням** функції $f(x)$.

Невизначеність цієї операції полягає в тому, що первісна для функції $f(x)$ знаходиться лише з точністю до сталого доданка C .

Первісна і невизначений інтеграл

- Функція $F(x)$ називається **первісною** для функції $f(x)$ на деякому проміжку, якщо для всіх x з цього проміжку виконується співвідношення $F'(x) = f(x)$.

Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, то будь-яка функція вигляду $F(x) + C$, де C – довільне дійсне число, також є первісною для $f(x)$.

- Операцію знаходження первісної $F(x)$ для заданої функції $f(x)$ називають **невизначеним інтегруванням** функції $f(x)$.

Невизначеність цієї операції полягає в тому, що первісна для функції $f(x)$ знаходиться лише з точністю до сталого доданка C .

Первісна і невизначений інтеграл

- Сукупність усіх первісних функції $f(x)$ називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ і позначається символом $\int f(x) dx$ так, що

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

де $F(x)$ – деяка первісна для $f(x)$.

Знак $\int$ називається знаком інтеграла,

$f(x)$ – підінтегральною функцією,

$f(x) dx$ – підінтегральним виразом,

x – змінною інтегрування,

C – сталою інтегрування.

Таблиця невизначених інтегралів

Наведемо коротку таблицю первісних (невизначених інтегралів) елементарних функцій, що вивчаються в шкільному курсі математики.

Таблиця невизначених інтегралів

$f(x)$	$a = \text{const}$	$x^\alpha, \alpha = \text{const} \neq -1$	$1/x$
$\int f(x) dx$	$ax + \text{const}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{const}$	$\ln x + \text{const}$
$f(x)$	$a^x, \begin{matrix} a > 0, \\ a \neq 1 \end{matrix}$	e^x	$\sin x$
$\int f(x) dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + \text{const}$	$e^x + \text{const}$	$-\cos x + \text{const}$
$f(x)$	$\cos x$	$1/\cos^2 x$	$1/\sin^2 x$
$\int f(x) dx$	$\sin x + \text{const}$	$\text{tg} x + \text{const}$	$-\text{ctg} x + \text{const}$
$f(x)$	$\frac{1}{x^2+a^2}, a = \text{const} \neq 0$	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, a = \text{const} \neq 0$	
$\int f(x) dx$	$\frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + \text{const}$	$\arcsin \frac{x}{a} + \text{const}$	

Властивості первісних

При знаходженні невизначених інтегралів використовуються також наступні **властивості первісних**:

- якщо $F(x)$ і $G(x)$ відповідно первісні функції $f(x)$ і $g(x)$, то $F(x) \pm G(x) + C$ — первісна функції $f(x) \pm g(x)$;
- якщо $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ і $\alpha \in \mathbf{R}$, то $\alpha F(x) + C$ — первісна функції $\alpha f(x)$;
- якщо $F(x)$ — первісна функції $f(x)$, $b \in \mathbf{R}$ і k — деяке не рівне нулю число, то $\frac{1}{k} F(kx + b) + C$ — первісна функції $f(kx + b)$.

Властивості первісних

При знаходженні невизначених інтегралів використовуються також наступні **властивості первісних**:

- якщо $F(x)$ і $G(x)$ відповідно первісні функції $f(x)$ і $g(x)$, то $F(x) \pm G(x) + C$ — первісна функції $f(x) \pm g(x)$;
- якщо $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ і $\alpha \in \mathbf{R}$, то $\alpha F(x) + C$ — первісна функції $\alpha f(x)$;
- якщо $F(x)$ — первісна функції $f(x)$, $b \in \mathbf{R}$ і k — деяке не рівне нулю число, то $\frac{1}{k} F(kx + b) + C$ — первісна функції $f(kx + b)$.

Властивості первісних

При знаходженні невизначених інтегралів використовуються також наступні **властивості первісних**:

- якщо $F(x)$ і $G(x)$ відповідно первісні функцій $f(x)$ і $g(x)$, то $F(x) \pm G(x) + C$ — первісна функції $f(x) \pm g(x)$;
- якщо $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ і $\alpha \in \mathbf{R}$, то $\alpha F(x) + C$ — первісна функції $\alpha f(x)$;
- якщо $F(x)$ — первісна функції $f(x)$, $b \in \mathbf{R}$ і k — деяке не рівне нулю число, то $\frac{1}{k} F(kx + b) + C$ — первісна функції $f(kx + b)$.

Властивості первісних

При знаходженні невизначених інтегралів використовуються також наступні **властивості** первісних:

- якщо $F(x)$ і $G(x)$ відповідно первісні функцій $f(x)$ і $g(x)$, то $F(x) \pm G(x) + C$ — первісна функції $f(x) \pm g(x)$;
- якщо $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ і $\alpha \in \mathbf{R}$, то $\alpha F(x) + C$ — первісна функції $\alpha f(x)$;
- якщо $F(x)$ — первісна функції $f(x)$, $b \in \mathbf{R}$ і k — деяке не рівне нулю число, то $\frac{1}{k} F(kx + b) + C$ — первісна функції $f(kx + b)$.

Приклад

Приклад 1. Знайти первісну функції

$f(x) = 8\sin 2x + 18\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$, графік якої проходить через точку $M(\pi/3; 15)$.

Розв'язання. Враховуючи властивості первісних, знаходимо невизначений інтеграл (іншими словами, вигляд довільної з первісних функції $f(x)$):

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= 8 \cdot \frac{1}{2}(-\cos 2x) + 18 \cdot \frac{1}{3} \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + C = \\ &= 6\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos 2x + C.\end{aligned}$$

Тепер шукаємо те значення сталої інтегрування C , при якому графік функції $F(x) = 6\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos 2x + C$ проходить через точку $M(\pi/3; 15)$. При цьому

$$\begin{aligned}F(\pi/3) = 15 &\iff 6\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos \frac{2\pi}{3} + C = 15 \iff \\ &\iff 6 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + C = 15 \iff 3 + 2 + C = 15 \iff C = 10.\end{aligned}$$

Отже, шукана первісна

$$F(x) = 6\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos 2x + 10.$$

Відповідь: $F(x) = 6\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos 2x + 10$.

Приклад

Приклад 1. Знайти первісну функції

$f(x) = 8\sin 2x + 18\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$, графік якої проходить через точку $M(\pi/3; 15)$.

Розв'язання. Враховуючи властивості первісних, знаходимо невизначений інтеграл (іншими словами, вигляд довільної з первісних функції $f(x)$):

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= 8 \cdot \frac{1}{2}(-\cos 2x) + 18 \cdot \frac{1}{3} \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + C = \\ &= 6\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos 2x + C.\end{aligned}$$

Тепер шукаємо те значення сталої інтегрування C , при якому графік функції $F(x) = 6\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos 2x + C$ проходить через точку $M(\pi/3; 15)$. При цьому

$$\begin{aligned}F(\pi/3) = 15 &\iff 6\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos \frac{2\pi}{3} + C = 15 \iff \\ &\iff 6 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + C = 15 \iff 3 + 2 + C = 15 \iff C = 10.\end{aligned}$$

Отже, шукана первісна

$$F(x) = 6\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos 2x + 10.$$

Відповідь: $F(x) = 6\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos 2x + 10$.

Приклад

Приклад 1. Знайти первісну функції

$f(x) = 8\sin 2x + 18\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$, графік якої проходить через точку $M(\pi/3; 15)$.

Розв'язання. Враховуючи властивості первісних, знаходимо невизначений інтеграл (іншими словами, вигляд довільної з первісних функції $f(x)$):

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= 8 \cdot \frac{1}{2}(-\cos 2x) + 18 \cdot \frac{1}{3} \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + C = \\ &= 6\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos 2x + C.\end{aligned}$$

Тепер шукаємо те значення сталої інтегрування C , при якому графік функції $F(x) = 6\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos 2x + C$ проходить через точку $M(\pi/3; 15)$. При цьому

$$\begin{aligned}F(\pi/3) = 15 &\iff 6\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos \frac{2\pi}{3} + C = 15 \iff \\ &\iff 6 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + C = 15 \iff 3 + 2 + C = 15 \iff C = 10.\end{aligned}$$

Отже, шукана первісна

$$F(x) = 6\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos 2x + 10.$$

Відповідь: $F(x) = 6\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos 2x + 10$.

Приклад

Приклад 1. Знайти первісну функції

$f(x) = 8\sin 2x + 18\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$, графік якої проходить через точку $M(\pi/3; 15)$.

Розв'язання. Враховуючи властивості первісних, знаходимо невизначений інтеграл (іншими словами, вигляд довільної з первісних функції $f(x)$):

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= 8 \cdot \frac{1}{2}(-\cos 2x) + 18 \cdot \frac{1}{3} \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + C = \\ &= 6\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos 2x + C.\end{aligned}$$

Тепер шукаємо те значення сталої інтегрування C , при якому графік функції $F(x) = 6\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos 2x + C$ проходить через точку $M(\pi/3; 15)$. При цьому

$$\begin{aligned}F(\pi/3) = 15 &\iff 6\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos \frac{2\pi}{3} + C = 15 \iff \\ &\iff 6 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + C = 15 \iff 3 + 2 + C = 15 \iff C = 10.\end{aligned}$$

Отже, шукана первісна

$$F(x) = 6\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos 2x + 10.$$

Відповідь: $F(x) = 6\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos 2x + 10$.

Приклад

Приклад 1. Знайти первісну функції

$f(x) = 8\sin 2x + 18\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$, графік якої проходить через точку $M(\pi/3; 15)$.

Розв'язання. Враховуючи властивості первісних, знаходимо невизначений інтеграл (іншими словами, вигляд довільної з первісних функції $f(x)$):

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= 8 \cdot \frac{1}{2}(-\cos 2x) + 18 \cdot \frac{1}{3} \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + C = \\ &= 6\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos 2x + C.\end{aligned}$$

Тепер шукаємо те значення сталої інтегрування C , при якому графік функції $F(x) = 6\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos 2x + C$ проходить через точку $M(\pi/3; 15)$. При цьому

$$\begin{aligned}F(\pi/3) = 15 &\iff 6\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos \frac{2\pi}{3} + C = 15 \iff \\ &\iff 6 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + C = 15 \iff 3 + 2 + C = 15 \iff C = 10.\end{aligned}$$

Отже, шукана первісна

$$F(x) = 6\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos 2x + 10.$$

Відповідь: $F(x) = 6\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos 2x + 10$.

Приклад

Приклад 1. Знайти первісну функції

$f(x) = 8\sin 2x + 18\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$, графік якої проходить через точку $M(\pi/3; 15)$.

Розв'язання. Враховуючи властивості первісних, знаходимо невизначений інтеграл (іншими словами, вигляд довільної з первісних функції $f(x)$):

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= 8 \cdot \frac{1}{2}(-\cos 2x) + 18 \cdot \frac{1}{3} \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + C = \\ &= 6\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos 2x + C.\end{aligned}$$

Тепер шукаємо те значення сталої інтегрування C , при якому графік функції $F(x) = 6\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos 2x + C$ проходить через точку $M(\pi/3; 15)$. При цьому

$$\begin{aligned}F(\pi/3) = 15 &\iff 6\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos \frac{2\pi}{3} + C = 15 \iff \\ &\iff 6 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + C = 15 \iff 3 + 2 + C = 15 \iff C = 10.\end{aligned}$$

Отже, шукана первісна

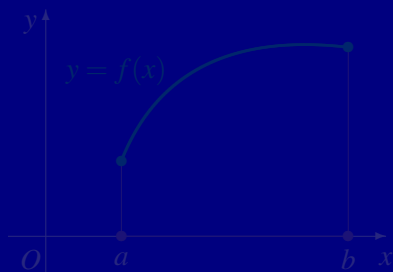
$$F(x) = 6\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos 2x + 10.$$

Відповідь: $F(x) = 6\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos 2x + 10$.

Площа криволінійної трапеції. Поняття про визначений інтеграл

До поняття визначеного інтеграла приводить, зокрема, задача про знаходження площі криволінійної трапеції.

Нехай на відрізку $[a, b]$ задано неперервну функцію $f(x)$ і $f(x) \geq 0$.

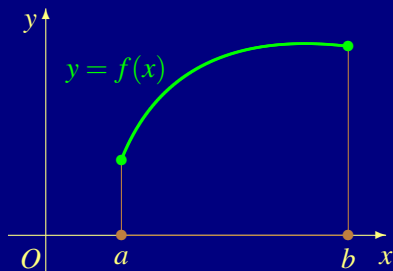


Криволінійною трапецією називають фігуру, обмежену відрізком $[a, b]$, прямими $x = a$, $x = b$ і графіком функції $y = f(x)$.

Площа криволінійної трапеції. Поняття про визначений інтеграл

До поняття визначеного інтеграла приводить, зокрема, задача про знаходження площі криволінійної трапеції.

Нехай на відрізку $[a, b]$ задано неперервну функцію $f(x)$ і $f(x) \geq 0$.



Криволінійною трапецією називають фігуру, обмежену відрізком $[a, b]$, прямими $x = a$, $x = b$ і графіком функції $y = f(x)$.

Площа криволінійної трапеції. Поняття про визначений інтеграл

Розділимо відрізок $[a, b]$ на n рівних частин точками $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ так, що

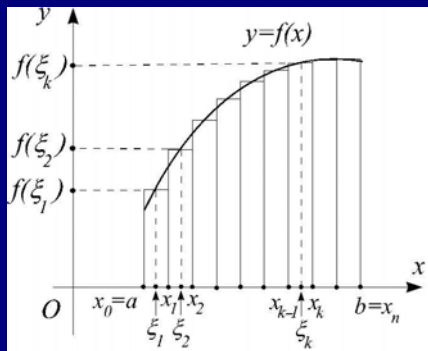
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Виберемо на кожному з відрізків $[x_{k-1}, x_k]$ точку ξ_k і розглянемо суму

$$\begin{aligned} f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \dots \\ \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Цю суму називають **інтегральною сумою** функції $f(x)$.

Площа криволінійної трапеції. Поняття про визначений інтеграл



Кожен доданок $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ вказаної інтегральної суми виражає площу "прямокутного стовпчика" з основою $[x_{k-1}, x_k]$ і висотою $f(\xi_k)$.

Тому інтегральна сума

$$f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \dots \\ \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}).$$

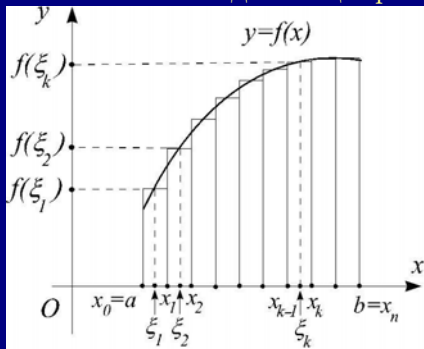
виражає площу многокутника, складеного із вказаних "прямокутних стовпчиків".

Площа криволінійної трапеції. Поняття про визначений інтеграл

При збільшенні числа n частин розбиття відрізка $[a, b]$ чисельне значення інтегральної суми

$$f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \dots \\ \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}).$$

наближається до площі криволінійної трапеції, а сама



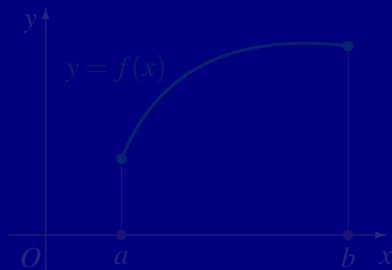
площа криволінійної трапеції знаходиться як границя інтегральних сум функції $f(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

Площа криволінійної трапеції. Поняття про визначений інтеграл

Вказана

- границя інтегральних сум функції $f(x)$ називається визначеним інтегралом від функції $f(x)$ по відрізку $[a, b]$ і позначається $\int_a^b f(x) dx$.

Числа a і b називаються при цьому відповідно нижньою і верхньою межами інтегрування.



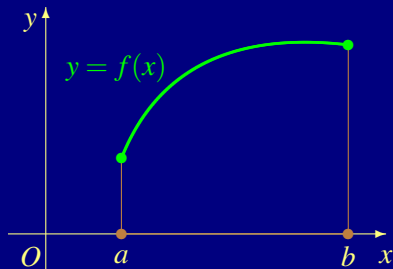
Отже,
визначений інтеграл
 $\int_a^b f(x) dx$ виражає площу
криволінійної трапеції,
зображеної на мал.

Площа криволінійної трапеції. Поняття про визначений інтеграл

Вказана

- границя інтегральних сум функції $f(x)$ називається визначеним інтегралом від функції $f(x)$ по відрізку $[a, b]$ і позначається $\int_a^b f(x) dx$.

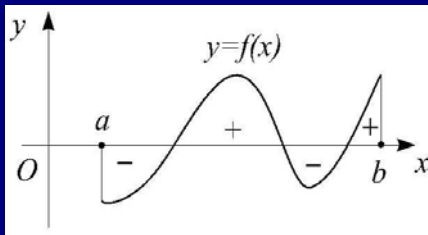
Числа a і b називаються при цьому відповідно нижньою і верхньою межами інтегрування.



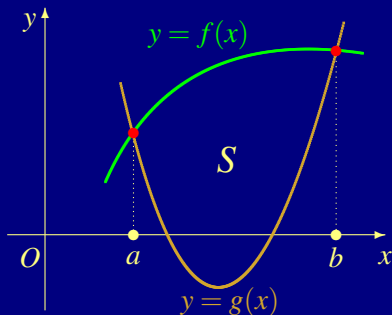
Отже,
визначений інтеграл
 $\int_a^b f(x) dx$ виражає площу
криволінійної трапеції,
зображеної на мал.

Визначений інтеграл і площі фігур

У випадку довільної неперервної на відрізку $[a, b]$ функції $f(x)$ визначений інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ дорівнює різниці між площею тієї частини фігури (обмеженої відрізком $[a, b]$, прямими $x = a, x = b$ і графіком функції $y = f(x)$), яка розміщена вище осі Ox (на мал. ця частина відмічена знаками "+"), і площею тієї частини цієї фігури, яка розміщена нижче осі Ox (на мал. ця частина відмічена знаками "-").



Визначений інтеграл і площі фігур

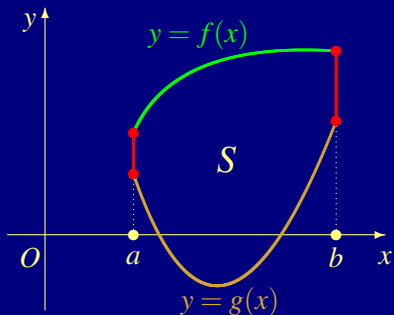


Площа S фігури, обмеженої зображеними на мал. графіками функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$,

виражається визначеним інтегралом від різниці $f(x) - g(x)$ по відрізку $[a, b]$, де a і b – точки перетину графіків $y = f(x)$ і $y = g(x)$, тобто корені рівняння $f(x) = g(x)$. Отже,

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Визначений інтеграл і площі фігур



Такою ж формулою виражається площа S фігури, обмеженої прямими $x = a$, $x = b$ та графіками заданих на відрізку $[a, b]$ функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ за умови, що $f(x) \geq g(x)$ при всіх $x \in [a, b]$.

Отже,

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Деякі властивості визначеного інтеграла

З означення **визначеного інтеграла** випливають наступні його **властивості** (за умови існування відповідних інтегралів):

- якщо $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, то

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx;$$

- якщо $r \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^r f(x) dx + \int_r^b f(x) dx.$$

Деякі властивості визначеного інтеграла

З означення **визначеного інтеграла** випливають наступні його **властивості** (за умови існування відповідних інтегралів):

- якщо $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, то

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx;$$

- якщо $r \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^r f(x) dx + \int_r^b f(x) dx.$$

Деякі властивості визначеного інтеграла

З означення **визначеного інтеграла** випливають наступні його **властивості** (за умови існування відповідних інтегралів):

- якщо $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, то

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx;$$

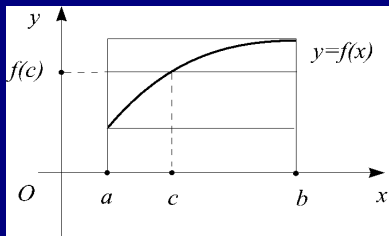
- якщо $r \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^r f(x) dx + \int_r^b f(x) dx.$$

Середнє значення функції на відрізку

Очевидно, що для визначеного інтеграла від неперервної функції $f(x)$ по відрізку $[a, b]$ виконуються співвідношення

$$\min_{x \in [a, b]} f(x) \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \max_{x \in [a, b]} f(x) \cdot (b - a). \quad (1)$$



У випадку $f(x) \geq 0$ ліва частина подвійної нерівності (1) виражає площу найбільшого з прямокутників з основою $[a, b]$, які містяться в криволінійній трапеції, а права частина подвійної нерівності (1) – площу найменшого з прямокутників з основою $[a, b]$, в яких міститься ця криволінійна трапеція (див. мал.).

При цьому очевидно також, що існує прямокутник з основою $[a, b]$, площа якого дорівнює площі криволінійної трапеції (див. мал.). Висотою цього прямокутника є значення функції $f(c)$ в деякій точці $c \in [a, b]$. Це значення функції $f(c)$ називають **середнім значенням функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$** (позначимо його $f_{\text{ср}}$, тобто $f(c) = f_{\text{ср}}$).

Середнє значення функції на відрізку

У випадку довільної неперервної на відрізку функції $f(x)$ також існує точка $c \in [a, b]$ така, що

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) (b - a),$$

звідки отримуємо формулу для обчислення середнього значення $f_{\text{ср}}$ функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$:

$$f_{\text{ср}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Формула Ньютона–Лейбніца

Для обчислення визначеного інтеграла використовуються **формула Ньютона–Лейбніца**, згідно з якою визначений інтеграл по відрізку $[a, b]$ від функції $f(x)$, неперервної на цьому відрізку, дорівнює приросту первісної $F(x)$ функції f :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (2)$$

Використовується також наступне позначення

$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

для приросту функції $F(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Наведемо доведення формули (2) для функції $f(x)$, неперервної на відрізку $[a, b]$, за умови $f(x) \geq 0$.

Формула Ньютона–Лейбніца

Для обчислення визначеного інтеграла використовуються **формула Ньютона–Лейбніца**, згідно з якою визначений інтеграл по відрізку $[a, b]$ від функції $f(x)$, неперервної на цьому відрізку, дорівнює приросту первісної $F(x)$ функції f :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (2)$$

Використовується також наступне позначення

$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

для приросту функції $F(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Наведемо доведення формули (2) для функції $f(x)$, неперервної на відрізку $[a, b]$, за умови $f(x) \geq 0$.

Формула Ньютона–Лейбніца

Для обчислення визначеного інтеграла використовуються **формула Ньютона–Лейбніца**, згідно з якою визначений інтеграл по відрізку $[a, b]$ від функції $f(x)$, неперервної на цьому відрізку, дорівнює приросту первісної $F(x)$ функції f :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (2)$$

Використовується також наступне позначення

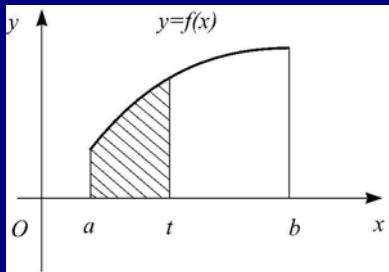
$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

для приросту функції $F(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Наведемо доведення формули (2) для функції $f(x)$, неперервної на відрізку $[a, b]$, за умови $f(x) \geq 0$.

Формула Ньютона–Лейбніца

Доведення.

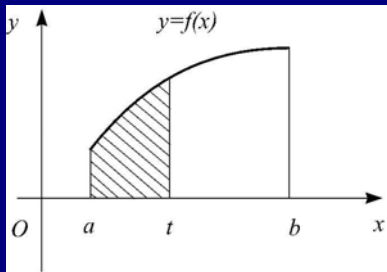


Розглянемо визначений інтеграл $\int_a^t f(x) dx$ зі змінною верхньою межею інтегрування $t \in [a, b]$. Цей інтеграл є функцією від змінної t і виражає площу тієї криволінійної трапеції, яка розміщена лівіше прямої $x = t$ (на мал. ця частина відмічена штриховкою).

Покажемо, що ця функція $F_0(t) = \int_a^t f(x) dx$ є первісною для функції f на проміжку (a, b) , тобто виконується рівність $F_0'(t) = f(t)$ при всіх $t \in (a, b)$.

Формула Ньютона–Лейбніца

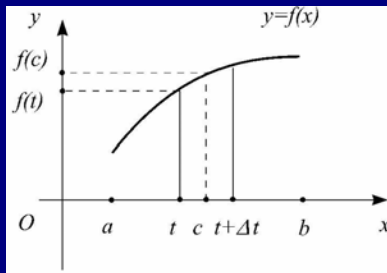
Доведення.



Розглянемо визначений інтеграл $\int_a^t f(x) dx$ зі змінною верхньою межею інтегрування $t \in [a, b]$. Цей інтеграл є функцією від змінної t і виражає площу тієї криволінійної трапеції, яка розміщена лівіше прямої $x = t$ (на мал. ця частина відмічена штриховкою).

Покажемо, що ця функція $F_0(t) = \int_a^t f(x) dx$ є первісною для функції f на проміжку (a, b) , тобто виконується рівність $F_0'(t) = f(t)$ при всіх $t \in (a, b)$.

Формула Ньютона–Лейбніца



З цією метою розглянемо приріст $F_0(t + \Delta t) - F_0(t)$ функції F_0 в точці $t \in (a, b)$, який виражає площу криволінійної трапеції, обмеженої віссю Ox , прямими $x = t$, $x = t + \Delta t$ та графіком функції $y = f(x)$ (див. мал.) і тому виражається визначеним інтегралом $\int_t^{t+\Delta t} f(x) dx$ по відрізку $[t, t + \Delta t]$, тобто

$$F_0(t + \Delta t) - F_0(t) = \int_t^{t+\Delta t} f(x) dx.$$

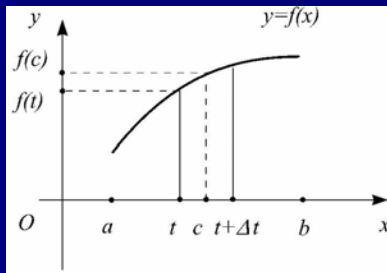
Справедлива також рівність

$$\int_t^{t+\Delta t} f(x) dx = f(c) \Delta t,$$

де $f(c)$ – середнє значення функції $f(x)$ на відрізку $[t, t + \Delta t]$ і c – деяка точка цього відрізка (див. мал.). Тому середня швидкість зміни функції F_0 на відрізку $[t, t + \Delta t]$ виражається рівністю

$$\frac{F_0(t + \Delta t) - F_0(t)}{\Delta t} = f(c).$$

Формула Ньютона–Лейбніца



З цією метою розглянемо приріст $F_0(t + \Delta t) - F_0(t)$ функції F_0 в точці $t \in (a, b)$, який виражає площу криволінійної трапеції, обмеженої віссю Ox , прямими $x = t$, $x = t + \Delta t$ та графіком функції $y = f(x)$ (див. мал.) і тому виражається визначеним інтегралом $\int_t^{t+\Delta t} f(x) dx$ по відрізку $[t, t + \Delta t]$, тобто

$$F_0(t + \Delta t) - F_0(t) = \int_t^{t+\Delta t} f(x) dx.$$

Справедлива також рівність

$$\int_t^{t+\Delta t} f(x) dx = f(c) \Delta t,$$

де $f(c)$ – середнє значення функції $f(x)$ на відрізку $[t, t + \Delta t]$ і c – деяка точка цього відрізка (див. мал.). Тому середня швидкість зміни функції F_0 на відрізку $[t, t + \Delta t]$ виражається рівністю

$$\frac{F_0(t + \Delta t) - F_0(t)}{\Delta t} = f(c).$$

Формула Ньютона–Лейбніца

Нарешті, в силу неперервності функції f її середнє значення $f(c)$ на відрізку $[t, t + \Delta t]$ прямує до значення $f(t)$ при $\Delta t \rightarrow 0$, що і доводить рівність $F'_0(t) = f(t)$ при $t \in (a, b)$.

Оскільки функція $F_0(t) = \int_a^t f(x) dx$ є первісною для функції f , то довільна з первісних функції f – функція F – виражається рівністю

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx + C,$$

де стала C знаходиться при підстановці в цю рівність значення $t = a$, в результаті чого отримуємо $C = F(a)$.

Отже, доведено рівність

$$\int_a^t f(x) dx = F(t) - F(a),$$

з якої при $t = b$ отримуємо формулу Ньютона–Лейбніца

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Доведення завершено.

Формула Ньютона–Лейбніца

Нарешті, в силу неперервності функції f її середнє значення $f(c)$ на відрізку $[t, t + \Delta t]$ прямує до значення $f(t)$ при $\Delta t \rightarrow 0$, що і доводить рівність $F'_0(t) = f(t)$ при $t \in (a, b)$.

Оскільки функція $F_0(t) = \int_a^t f(x) dx$ є первісною для функції f , то довільна з первісних функції f – функція F – виражається рівністю

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx + C,$$

де стала C знаходиться при підстановці в цю рівність значення $t = a$, в результаті чого отримуємо $C = F(a)$.

Отже, доведено рівність

$$\int_a^t f(x) dx = F(t) - F(a),$$

з якої при $t = b$ отримуємо формулу Ньютона–Лейбніца

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Доведення завершено.

Формула Ньютона–Лейбніца

Нарешті, в силу неперервності функції f її середнє значення $f(c)$ на відрізку $[t, t + \Delta t]$ прямує до значення $f(t)$ при $\Delta t \rightarrow 0$, що і доводить рівність $F'_0(t) = f(t)$ при $t \in (a, b)$.

Оскільки функція $F_0(t) = \int_a^t f(x) dx$ є первісною для функції f , то довільна з первісних функції f – функція F – виражається рівністю

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx + C,$$

де стала C знаходиться при підстановці в цю рівність значення $t = a$, в результаті чого отримуємо $C = F(a)$.

Отже, доведено рівність

$$\int_a^t f(x) dx = F(t) - F(a),$$

з якої при $t = b$ отримуємо формулу Ньютона–Лейбніца

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Доведення завершено.

Приклади

Приклад 2. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^{\pi/3} \left(18 \cos \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) + 8 \sin 2x \right) dx.$$

Розв'язання. В прикладі 1 встановлено, що функція $F(x) = 6 \sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) - 4 \cos 2x$ є первісною для функції $f(x) = 18 \cos \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) + 8 \sin 2x$.

Тому за формулою Ньютона–Лейбніца отримуємо

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} f(x) dx &= \left(6 \sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) - 4 \cos 2x \right) \Big|_0^{\pi/3} = \\ &= \left(6 \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) - 4 \cos \frac{2\pi}{3} \right) - \left(6 \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) - 4 \cos 0 \right) = \\ &= \left(6 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \right) - \left(6 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) - 4 \cdot 1 \right) = \\ &= (3 + 2) - (-3 - 4) = 12. \end{aligned}$$

Відповідь: 12.

Приклади

Приклад 2. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^{\pi/3} \left(18 \cos \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) + 8 \sin 2x \right) dx.$$

Розв'язання. В прикладі 1 встановлено, що функція $F(x) = 6 \sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) - 4 \cos 2x$ є первісною для функції $f(x) = 18 \cos \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) + 8 \sin 2x$.

Тому за формулою Ньютона–Лейбніца отримуємо

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} f(x) dx &= \left(6 \sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) - 4 \cos 2x \right) \Big|_0^{\pi/3} = \\ &= \left(6 \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) - 4 \cos \frac{2\pi}{3} \right) - \left(6 \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) - 4 \cos 0 \right) = \\ &= \left(6 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \right) - \left(6 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) - 4 \cdot 1 \right) = \\ &= (3 + 2) - (-3 - 4) = 12. \end{aligned}$$

Відповідь: 12.

Приклади

Приклад 2. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^{\pi/3} \left(18 \cos \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) + 8 \sin 2x \right) dx.$$

Розв'язання. В прикладі 1 встановлено, що функція $F(x) = 6 \sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) - 4 \cos 2x$ є первісною для функції $f(x) = 18 \cos \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) + 8 \sin 2x$.

Тому за формулою Ньютона–Лейбніца отримуємо

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} f(x) dx &= \left(6 \sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) - 4 \cos 2x \right) \Big|_0^{\pi/3} = \\ &= \left(6 \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) - 4 \cos \frac{2\pi}{3} \right) - \left(6 \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) - 4 \cos 0 \right) = \\ &= \left(6 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \right) - \left(6 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) - 4 \cdot 1 \right) = \\ &= (3 + 2) - (-3 - 4) = 12. \end{aligned}$$

Відповідь: 12.

Приклади

Приклад 2. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^{\pi/3} (18 \cos(3x - \frac{\pi}{6}) + 8 \sin 2x) dx.$$

Розв'язання. В прикладі 1 встановлено, що функція $F(x) = 6 \sin(3x - \frac{\pi}{6}) - 4 \cos 2x$ є первісною для функції $f(x) = 18 \cos(3x - \frac{\pi}{6}) + 8 \sin 2x$.

Тому за формулою Ньютона–Лейбніца отримуємо

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} f(x) dx &= (6 \sin(3x - \frac{\pi}{6}) - 4 \cos 2x) \Big|_0^{\pi/3} = \\ &= (6 \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) - 4 \cos \frac{2\pi}{3}) - (6 \sin(-\frac{\pi}{6}) - 4 \cos 0) = \\ &= (6 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot (-\frac{1}{2})) - (6 \cdot (-\frac{1}{2}) - 4 \cdot 1) = \\ &= (3 + 2) - (-3 - 4) = 12. \end{aligned}$$

Відповідь: 12.

Приклади

Приклад 2. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^{\pi/3} (18 \cos(3x - \frac{\pi}{6}) + 8 \sin 2x) dx.$$

Розв'язання. В прикладі 1 встановлено, що функція $F(x) = 6 \sin(3x - \frac{\pi}{6}) - 4 \cos 2x$ є первісною для функції $f(x) = 18 \cos(3x - \frac{\pi}{6}) + 8 \sin 2x$.

Тому за формулою Ньютона–Лейбніца отримуємо

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} f(x) dx &= (6 \sin(3x - \frac{\pi}{6}) - 4 \cos 2x) \Big|_0^{\pi/3} = \\ &= (6 \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) - 4 \cos \frac{2\pi}{3}) - (6 \sin(-\frac{\pi}{6}) - 4 \cos 0) = \\ &= (6 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot (-\frac{1}{2})) - (6 \cdot (-\frac{1}{2}) - 4 \cdot 1) = \\ &= (3 + 2) - (-3 - 4) = 12. \end{aligned}$$

Відповідь: 12.

Приклади

Приклад 2. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^{\pi/3} (18 \cos(3x - \frac{\pi}{6}) + 8 \sin 2x) dx.$$

Розв'язання. В прикладі 1 встановлено, що функція $F(x) = 6 \sin(3x - \frac{\pi}{6}) - 4 \cos 2x$ є первісною для функції $f(x) = 18 \cos(3x - \frac{\pi}{6}) + 8 \sin 2x$.

Тому за формулою Ньютона–Лейбніца отримуємо

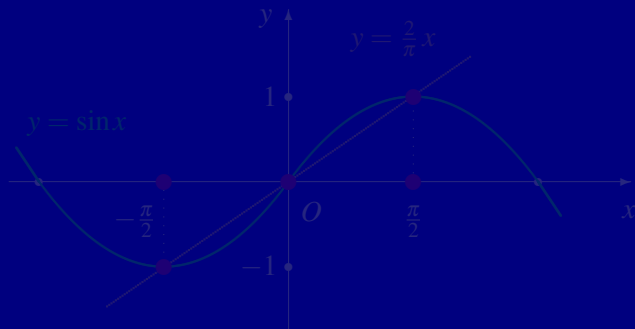
$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} f(x) dx &= \left(6 \sin(3x - \frac{\pi}{6}) - 4 \cos 2x \right) \Big|_0^{\pi/3} = \\ &= \left(6 \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) - 4 \cos \frac{2\pi}{3} \right) - \left(6 \sin(-\frac{\pi}{6}) - 4 \cos 0 \right) = \\ &= \left(6 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot (-\frac{1}{2}) \right) - \left(6 \cdot (-\frac{1}{2}) - 4 \cdot 1 \right) = \\ &= (3 + 2) - (-3 - 4) = 12. \end{aligned}$$

Відповідь: 12.

Приклади

Приклад 3. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = \sin x$ і $y = \frac{2}{\pi}x$.

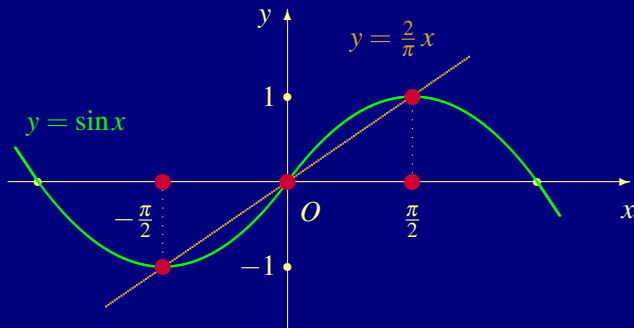
Розв'язання. В силу непарності функцій $y = \sin x$ і $y = \frac{2}{\pi}x$ їх графіки симетричні відносно початку координат і обмежують фігуру, яка складається з двох рівних за площею сегментів синусоїди (див. мал.). Точки перетину графіків мають абсиси $x = 0$ і $x = \pm \frac{\pi}{2}$.



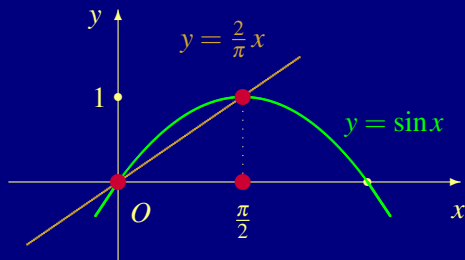
Приклади

Приклад 3. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = \sin x$ і $y = \frac{2}{\pi}x$.

Розв'язання. В силу непарності функцій $y = \sin x$ і $y = \frac{2}{\pi}x$ їх графіки симетричні відносно початку координат і обмежують фігуру, яка складається з двох рівних за площею сегментів синусоїди (див. мал.). Точки перетину графіків мають абсиси $x = 0$ і $x = \pm \frac{\pi}{2}$.



Приклади



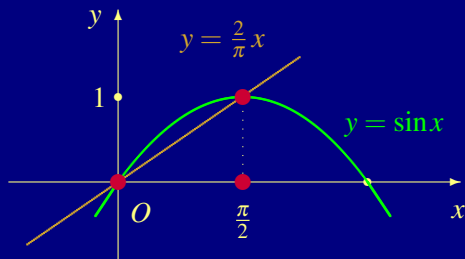
Площа одного сегмента синусоїди виражається визначеним інтегралом від різниці $\sin x - \frac{2}{\pi}x$ по відрізку $[0; \pi/2]$.

Тому шукана площа виражається рівностями

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\sin x - \frac{2}{\pi}x \right) dx \right) = 2 \left(-\cos x - \frac{1}{\pi}x^2 \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\
 &= 2 \left(-\cos \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - 2(-\cos 0 - 0) = 2 \left(-\frac{\pi}{4} \right) - 2(-1) = 2 - \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Відповідь: $2 - \frac{\pi}{2}$.

Приклади



Площа одного сегмента синусоїди виражається визначеним інтегралом від різниці $\sin x - \frac{2}{\pi}x$ по відрізку $[0; \pi/2]$.

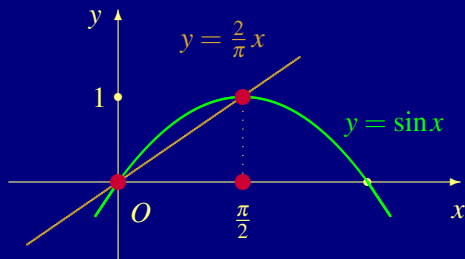
Тому шукана площа виражається рівностями

$$S = 2 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\sin x - \frac{2}{\pi}x \right) dx \right) = 2 \left(-\cos x - \frac{1}{\pi}x^2 \right) \Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= 2 \left(-\cos \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - 2(-\cos 0 - 0) = 2 \left(-\frac{\pi}{4} \right) - 2(-1) = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $2 - \frac{\pi}{2}$.

Приклади



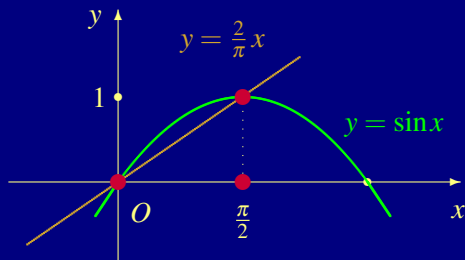
Площа одного сегмента синусоїди виражається визначеним інтегралом від різниці $\sin x - \frac{2}{\pi}x$ по відрітку $[0; \pi/2]$.

Тому шукана площа виражається рівностями

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\sin x - \frac{2}{\pi}x \right) dx \right) = 2 \left(-\cos x - \frac{1}{\pi}x^2 \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\
 &= 2 \left(-\cos \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - 2(-\cos 0 - 0) = 2 \left(-\frac{\pi}{4} \right) - 2(-1) = 2 - \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Відповідь: $2 - \frac{\pi}{2}$.

Приклади



Площа одного сегмента синусоїди виражається визначеним інтегралом від різниці $\sin x - \frac{2}{\pi}x$ по відрізку $[0; \pi/2]$.

Тому шукана площа виражається рівностями

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\sin x - \frac{2}{\pi}x \right) dx \right) = 2 \left(-\cos x - \frac{1}{\pi}x^2 \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\
 &= 2 \left(-\cos \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - 2(-\cos 0 - 0) = 2 \left(-\frac{\pi}{4} \right) - 2(-1) = 2 - \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Відповідь: $2 - \frac{\pi}{2}$.

Приклади із ЗНО

Приклад 4 (Пробне тестування ЗНО, 2015 р.).

Визначте для функції $f(x) = 2x + 2$ первісну, графік якої проходить через точку $(1; 4)$.

Розв'язання. Первісні заданої функції мають вигляд

$$F(x) = x^2 + 2x + C.$$

Знаходимо те значення сталої C , при якому графік функції $F(x)$ проходить через точку $(1; 4)$:

$$F(1) = 4 \iff 1 + 2 + C = 4 \iff C = 1.$$

Отже, шукана первісна

$$F(x) = x^2 + 2x + 1.$$

Відповідь: $F(x) = x^2 + 2x + 1$.

Приклади із ЗНО

Приклад 4 (Пробне тестування ЗНО, 2015 р.).

Визначте для функції $f(x) = 2x + 2$ первісну, графік якої проходить через точку $(1; 4)$.

Розв'язання. Первісні заданої функції мають вигляд $F(x) = x^2 + 2x + C$.

Знаходимо те значення сталої C , при якому графік функції $F(x)$ проходить через точку $(1; 4)$:

$$F(1) = 4 \iff 1 + 2 + C = 4 \iff C = 1.$$

Отже, шукана первісна

$$F(x) = x^2 + 2x + 1.$$

Відповідь: $F(x) = x^2 + 2x + 1$.

Приклади із ЗНО

Приклад 4 (Пробне тестування ЗНО, 2015 р.).

Визначте для функції $f(x) = 2x + 2$ первісну, графік якої проходить через точку $(1; 4)$.

Розв'язання. Первісні заданої функції мають вигляд

$$F(x) = x^2 + 2x + C.$$

Знаходимо те значення сталої C , при якому графік функції $F(x)$ проходить через точку $(1; 4)$:

$$F(1) = 4 \iff 1 + 2 + C = 4 \iff C = 1.$$

Отже, шукана первісна

$$F(x) = x^2 + 2x + 1.$$

Відповідь: $F(x) = x^2 + 2x + 1$.

Приклади із ЗНО

Приклад 4 (Пробне тестування ЗНО, 2015 р.).

Визначте для функції $f(x) = 2x + 2$ первісну, графік якої проходить через точку $(1; 4)$.

Розв'язання. Первісні заданої функції мають вигляд

$$F(x) = x^2 + 2x + C.$$

Знаходимо те значення сталої C , при якому графік функції $F(x)$ проходить через точку $(1; 4)$:

$$F(1) = 4 \iff 1 + 2 + C = 4 \iff C = 1.$$

Отже, шукана первісна

$$F(x) = x^2 + 2x + 1.$$

Відповідь: $F(x) = x^2 + 2x + 1$.

Приклади із ЗНО

Приклад 4 (Пробне тестування ЗНО, 2015 р.).

Визначте для функції $f(x) = 2x + 2$ первісну, графік якої проходить через точку $(1; 4)$.

Розв'язання. Первісні заданої функції мають вигляд

$$F(x) = x^2 + 2x + C.$$

Знаходимо те значення сталої C , при якому графік функції $F(x)$ проходить через точку $(1; 4)$:

$$F(1) = 4 \iff 1 + 2 + C = 4 \iff C = 1.$$

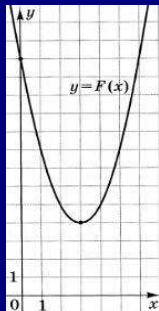
Отже, шукана первісна

$$F(x) = x^2 + 2x + 1.$$

Відповідь: $F(x) = x^2 + 2x + 1$.

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.).



На рисунку зображено графік функції $F(x) = x^2 + bx + c$, яка є первісною для функції $f(x)$. Визначте параметри b і c , знайдіть функцію $f(x)$. У відповідь запишіть значення $f(-6)$.

Розв'язання. Оскільки $F(0) = 13$, то $c = 13$.

Для абсциси вершини параболи $y = x^2 + bx + c$ справедливі рівності $x_{\text{верш}} = -b/2 = 3$, звідки знаходимо $b = -6$.

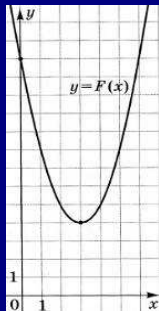
Тому $F(x) = x^2 - 6x + 13$ і $f(x) = F'(x) = 2x - 6$.

Нарешті, $f(-6) = 2(-6) - 6 = -12 - 6 = -18$.

Відповідь: -18 .

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.).



На рисунку зображено графік функції $F(x) = x^2 + bx + c$, яка є первісною для функції $f(x)$. Визначте параметри b і c , знайдіть функцію $f(x)$. У відповідь запишіть значення $f(-6)$.

Розв'язання. Оскільки $F(0) = 13$, то $c = 13$.

Для абсциси вершини параболи $y = x^2 + bx + c$ справедливі рівності $x_{\text{верш}} = -b/2 = 3$, звідки знаходимо $b = -6$.

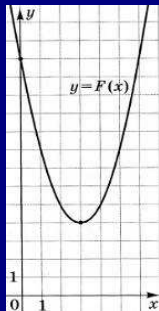
Тому $F(x) = x^2 - 6x + 13$ і $f(x) = F'(x) = 2x - 6$.

Нарешті, $f(-6) = 2(-6) - 6 = -12 - 6 = -18$.

Відповідь: -18 .

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.).



На рисунку зображено графік функції $F(x) = x^2 + bx + c$, яка є первісною для функції $f(x)$. Визначте параметри b і c , знайдіть функцію $f(x)$. У відповідь запишіть значення $f(-6)$.

Розв'язання. Оскільки $F(0) = 13$, то $c = 13$.

Для абсциси вершини параболи $y = x^2 + bx + c$ справедливі рівності $x_{\text{верш}} = -b/2 = 3$, звідки знаходимо $b = -6$.

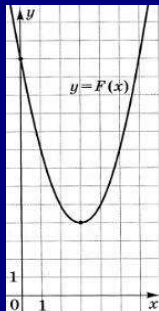
Тому $F(x) = x^2 - 6x + 13$ і $f(x) = F'(x) = 2x - 6$.

Нарешті, $f(-6) = 2(-6) - 6 = -12 - 6 = -18$.

Відповідь: -18 .

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.).



На рисунку зображено графік функції $F(x) = x^2 + bx + c$, яка є первісною для функції $f(x)$. Визначте параметри b і c , знайдіть функцію $f(x)$. У відповідь запишіть значення $f(-6)$.

Розв'язання. Оскільки $F(0) = 13$, то $c = 13$.

Для абсциси вершини параболи $y = x^2 + bx + c$ справедливі рівності $x_{\text{верш}} = -b/2 = 3$, звідки знаходимо $b = -6$.

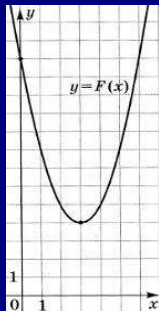
Тому $F(x) = x^2 - 6x + 13$ і $f(x) = F'(x) = 2x - 6$.

Нарешті, $f(-6) = 2(-6) - 6 = -12 - 6 = -18$.

Відповідь: -18 .

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.).



На рисунку зображено графік функції $F(x) = x^2 + bx + c$, яка є первісною для функції $f(x)$. Визначте параметри b і c , знайдіть функцію $f(x)$. У відповідь запишіть значення $f(-6)$.

Розв'язання. Оскільки $F(0) = 13$, то $c = 13$.

Для абсциси вершини параболи $y = x^2 + bx + c$ справедливі рівності $x_{\text{верш}} = -b/2 = 3$, звідки знаходимо $b = -6$.

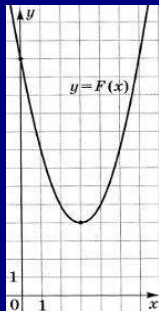
Тому $F(x) = x^2 - 6x + 13$ і $f(x) = F'(x) = 2x - 6$.

Нарешті, $f(-6) = 2(-6) - 6 = -12 - 6 = -18$.

Відповідь: -18 .

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.).



На рисунку зображено графік функції $F(x) = x^2 + bx + c$, яка є первісною для функції $f(x)$. Визначте параметри b і c , знайдіть функцію $f(x)$. У відповідь запишіть значення $f(-6)$.

Розв'язання. Оскільки $F(0) = 13$, то $c = 13$.

Для абсциси вершини параболи $y = x^2 + bx + c$ справедливі рівності $x_{\text{верш}} = -b/2 = 3$, звідки знаходимо $b = -6$.

Тому $F(x) = x^2 - 6x + 13$ і $f(x) = F'(x) = 2x - 6$.

Нарешті, $f(-6) = 2(-6) - 6 = -12 - 6 = -18$.

Відповідь: -18 .

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.).

Обчислити інтеграл $\int_{-2}^1 (x^2 - 4x) dx$.

Розв'язання. Використовуючи формулу Ньютона–Лейбніца, отримуємо

$$\begin{aligned}\int_{-2}^1 (x^2 - 4x) dx &= \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right) \Big|_{-2}^1 = \\ &= \left(\frac{1}{3} - 2 \right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - 2(-2)^2 \right) = \frac{1}{3} - 2 + \frac{8}{3} + 8 = \frac{9}{3} + 6 = 9.\end{aligned}$$

Відповідь: 9.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.).

Обчислити інтеграл $\int_{-2}^1 (x^2 - 4x) dx$.

Розв'язання. Використовуючи формулу Ньютона–Лейбніца, отримуємо

$$\begin{aligned}\int_{-2}^1 (x^2 - 4x) dx &= \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right) \Big|_{-2}^1 = \\ &= \left(\frac{1}{3} - 2 \right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - 2(-2)^2 \right) = \frac{1}{3} - 2 + \frac{8}{3} + 8 = \frac{9}{3} + 6 = 9.\end{aligned}$$

Відповідь: 9.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.).

Обчислити інтеграл $\int_{-2}^1 (x^2 - 4x) dx$.

Розв'язання. Використовуючи формулу Ньютона–Лейбніца, отримуємо

$$\begin{aligned}\int_{-2}^1 (x^2 - 4x) dx &= \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right) \Big|_{-2}^1 = \\ &= \left(\frac{1}{3} - 2 \right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - 2(-2)^2 \right) = \frac{1}{3} - 2 + \frac{8}{3} + 8 = \frac{9}{3} + 6 = 9.\end{aligned}$$

Відповідь: 9.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.).

Обчислити інтеграл $\int_{-2}^1 (x^2 - 4x) dx$.

Розв'язання. Використовуючи формулу Ньютона–Лейбніца, отримуємо

$$\begin{aligned}\int_{-2}^1 (x^2 - 4x) dx &= \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right) \Big|_{-2}^1 = \\ &= \left(\frac{1}{3} - 2 \right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - 2(-2)^2 \right) = \frac{1}{3} - 2 + \frac{8}{3} + 8 = \frac{9}{3} + 6 = 9.\end{aligned}$$

Відповідь: 9.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.).

Обчислити інтеграл $\int_{-2}^1 (x^2 - 4x) dx$.

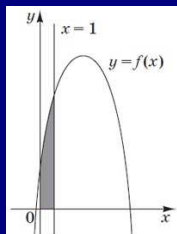
Розв'язання. Використовуючи формулу Ньютона–Лейбніца, отримуємо

$$\begin{aligned}\int_{-2}^1 (x^2 - 4x) dx &= \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right) \Big|_{-2}^1 = \\ &= \left(\frac{1}{3} - 2 \right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - 2(-2)^2 \right) = \frac{1}{3} - 2 + \frac{8}{3} + 8 = \frac{9}{3} + 6 = 9.\end{aligned}$$

Відповідь: 9.

Приклади із ЗНО

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2014 р.).



На рисунку зображено ескіз графіка квадратичної функції $f(x) = ax^2 + (\frac{2b}{3})x + 5$. Площа криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$, дорівнює 21 кв. од. Обчисліть суму $a + b$.

Розв'язання. Записуючи площу криволінійної трапеції у вигляді визначеного інтеграла, отримуємо

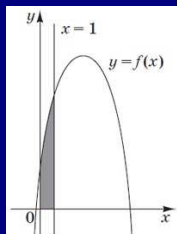
$$\int_0^1 (ax^2 + (\frac{2b}{3})x + 5) dx = 21 \iff \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{3} + 5x \right) \bigg|_0^1 = 21 \iff$$

$$\iff \frac{a}{3} + \frac{b}{3} + 5 = 21 \iff \frac{a+b}{3} = 16 \iff a+b = 48.$$

Відповідь: 48.

Приклади із ЗНО

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2014 р.).



На рисунку зображено ескіз графіка квадратичної функції $f(x) = ax^2 + (\frac{2b}{3})x + 5$. Площа криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$, дорівнює 21 кв. од. Обчисліть суму $a + b$.

Розв'язання. Записуючи площу криволінійної трапеції у вигляді визначеного інтеграла, отримуємо

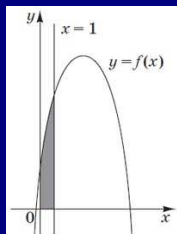
$$\int_0^1 (ax^2 + (\frac{2b}{3})x + 5) dx = 21 \iff \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{3} + 5x \right) \Big|_0^1 = 21 \iff$$

$$\iff \frac{a}{3} + \frac{b}{3} + 5 = 21 \iff \frac{a+b}{3} = 16 \iff a+b = 48.$$

Відповідь: 48.

Приклади із ЗНО

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2014 р.).



На рисунку зображено ескіз графіка квадратичної функції $f(x) = ax^2 + (\frac{2b}{3})x + 5$. Площа криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$, дорівнює 21 кв. од. Обчисліть суму $a + b$.

Розв'язання. Записуючи площу криволінійної трапеції у вигляді визначеного інтеграла, отримуємо

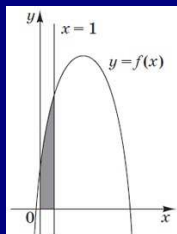
$$\int_0^1 (ax^2 + (\frac{2b}{3})x + 5) dx = 21 \iff \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{3} + 5x \right) \Big|_0^1 = 21 \iff$$

$$\iff \frac{a}{3} + \frac{b}{3} + 5 = 21 \iff \frac{a+b}{3} = 16 \iff a + b = 48.$$

Відповідь: 48.

Приклади із ЗНО

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2014 р.).



На рисунку зображено ескіз графіка квадратичної функції $f(x) = ax^2 + (\frac{2b}{3})x + 5$. Площа криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$, дорівнює 21 кв. од. Обчисліть суму $a + b$.

Розв'язання. Записуючи площу криволінійної трапеції у вигляді визначеного інтеграла, отримуємо

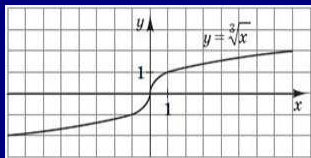
$$\int_0^1 (ax^2 + (\frac{2b}{3})x + 5) dx = 21 \iff \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{3} + 5x \right) \Big|_0^1 = 21 \iff$$

$$\iff \frac{a}{3} + \frac{b}{3} + 5 = 21 \iff \frac{a+b}{3} = 16 \iff a + b = 48.$$

Відповідь: 48.

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2015 р.).
Визначте ДОДАТНЄ значення параметра a , при якому



площа фігури, обмеженої
лініями $y = \sqrt[3]{x}$ (див. рисунок),
 $y = 0$ і $x = a$, дорівнює 192 кв.
од.

Розв'язання. Записуючи площу фігури у вигляді
визначеного інтеграла, отримуємо

$$\int_0^a \sqrt[3]{x} dx = 192 \iff \int_0^a x^{1/3} dx = 192 \iff \left. \frac{3x^{4/3}}{4} \right|_0^a = 192 \iff$$

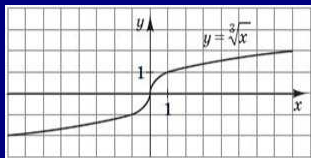
$$\iff \frac{3a^{4/3}}{4} = 192 \iff a^{4/3} = \frac{4}{3} \cdot 192 \iff a^{4/3} = 256 \iff$$

$$\iff a^{1/3} = \sqrt[4]{256} \iff \sqrt[3]{a} = 4 \iff a = 64.$$

Відповідь: 64.

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2015 р.).
Визначте ДОДАТНЄ значення параметра a , при якому



площа фігури, обмеженої
лініями $y = \sqrt[3]{x}$ (див. рисунок),
 $y = 0$ і $x = a$, дорівнює 192 кв.
од.

Розв'язання. Записуючи площу фігури у вигляді
визначеного інтеграла, отримуємо

$$\int_0^a \sqrt[3]{x} dx = 192 \iff \int_0^a x^{1/3} dx = 192 \iff \left. \frac{3x^{4/3}}{4} \right|_0^a = 192 \iff$$

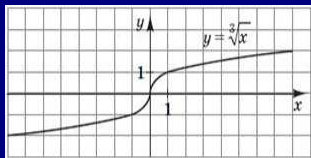
$$\iff \frac{3a^{4/3}}{4} = 192 \iff a^{4/3} = \frac{4}{3} \cdot 192 \iff a^{4/3} = 256 \iff$$

$$\iff a^{1/3} = \sqrt[4]{256} \iff \sqrt[3]{a} = 4 \iff a = 64.$$

Відповідь: 64.

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2015 р.).
Визначте ДОДАТНЄ значення параметра a , при якому



площа фігури, обмеженої
лініями $y = \sqrt[3]{x}$ (див. рисунок),
 $y = 0$ і $x = a$, дорівнює 192 кв.
од.

Розв'язання. Записуючи площу фігури у вигляді
визначеного інтеграла, отримуємо

$$\int_0^a \sqrt[3]{x} dx = 192 \iff \int_0^a x^{1/3} dx = 192 \iff \left. \frac{3x^{4/3}}{4} \right|_0^a = 192 \iff$$

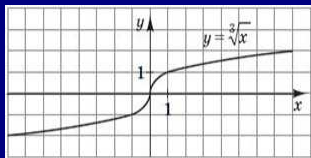
$$\iff \frac{3a^{4/3}}{4} = 192 \iff a^{4/3} = \frac{4}{3} \cdot 192 \iff a^{4/3} = 256 \iff$$

$$\iff a^{1/3} = \sqrt[4]{256} \iff \sqrt[3]{a} = 4 \iff a = 64.$$

Відповідь: 64.

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2015 р.).
Визначте ДОДАТНЄ значення параметра a , при якому



площа фігури, обмеженої
лініями $y = \sqrt[3]{x}$ (див. рисунок),
 $y = 0$ і $x = a$, дорівнює 192 кв.
од.

Розв'язання. Записуючи площу фігури у вигляді
визначеного інтеграла, отримуємо

$$\int_0^a \sqrt[3]{x} dx = 192 \iff \int_0^a x^{1/3} dx = 192 \iff \left. \frac{3x^{4/3}}{4} \right|_0^a = 192 \iff$$

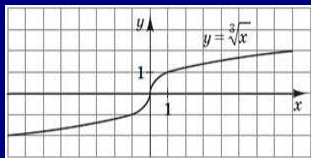
$$\iff \frac{3a^{4/3}}{4} = 192 \iff a^{4/3} = \frac{4}{3} \cdot 192 \iff a^{4/3} = 256 \iff$$

$$\iff a^{1/3} = \sqrt[4]{256} \iff \sqrt[3]{a} = 4 \iff a = 64.$$

Відповідь: 64.

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2015 р.).
Визначте ДОДАТНЄ значення параметра a , при якому



площа фігури, обмеженої
лініями $y = \sqrt[3]{x}$ (див. рисунок),
 $y = 0$ і $x = a$, дорівнює 192 кв.
од.

Розв'язання. Записуючи площу фігури у вигляді
визначеного інтеграла, отримуємо

$$\int_0^a \sqrt[3]{x} dx = 192 \iff \int_0^a x^{1/3} dx = 192 \iff \left. \frac{3x^{4/3}}{4} \right|_0^a = 192 \iff$$

$$\iff \frac{3a^{4/3}}{4} = 192 \iff a^{4/3} = \frac{4}{3} \cdot 192 \iff a^{4/3} = 256 \iff$$

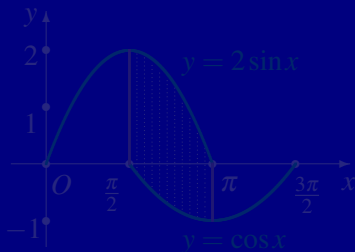
$$\iff a^{1/3} = \sqrt[4]{256} \iff \sqrt[3]{a} = 4 \iff a = 64.$$

Відповідь: 64.

Приклади із ЗНО

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.).
Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями: $y = 2 \sin x$,
 $y = \cos x$, $x = \pi/2$, $x = \pi$.

Розв'язання. Фігуру, обмежену заданими лініями, зображено на малюнку. Її площа виражається рівностями



$$\int_{\pi/2}^{\pi} (2 \sin x - \cos x) dx = (-2 \cos x - \sin x) \Big|_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= (-2 \cos \pi - \sin \pi) - (-2 \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2}) =$$

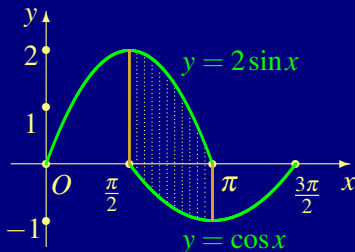
$$= (-2(-1) - 0) - (0 - 1) = 2 + 1 = 3.$$

Відповідь: 3.

Приклади із ЗНО

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.).
Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями: $y = 2 \sin x$,
 $y = \cos x$, $x = \pi/2$, $x = \pi$.

Розв'язання. Фігуру, обмежену заданими лініями, зображено на малюнку. Її площа виражається рівностями



$$\int_{\pi/2}^{\pi} (2 \sin x - \cos x) dx = (-2 \cos x - \sin x) \Big|_{\pi/2}^{\pi} =$$

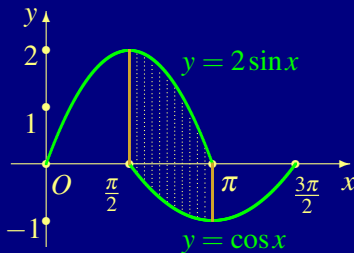
$$= (-2 \cos \pi - \sin \pi) - (-2 \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2}) =$$
$$= (-2(-1) - 0) - (0 - 1) = 2 + 1 = 3.$$

Відповідь: 3.

Приклади із ЗНО

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.).
Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями: $y = 2 \sin x$,
 $y = \cos x$, $x = \pi/2$, $x = \pi$.

Розв'язання. Фігуру, обмежену заданими лініями, зображено на малюнку. Її площа виражається рівностями



$$\int_{\pi/2}^{\pi} (2 \sin x - \cos x) dx = (-2 \cos x - \sin x) \Big|_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= (-2 \cos \pi - \sin \pi) - (-2 \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2}) =$$

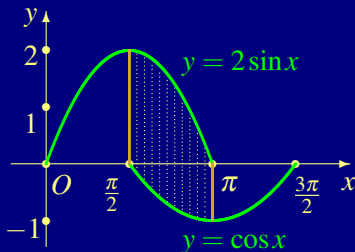
$$= (-2(-1) - 0) - (0 - 1) = 2 + 1 = 3.$$

Відповідь: 3.

Приклади із ЗНО

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.).
Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями: $y = 2 \sin x$,
 $y = \cos x$, $x = \pi/2$, $x = \pi$.

Розв'язання. Фігуру, обмежену заданими лініями, зображено на малюнку. Її площа виражається рівностями



$$\int_{\pi/2}^{\pi} (2 \sin x - \cos x) dx = (-2 \cos x - \sin x) \Big|_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= (-2 \cos \pi - \sin \pi) - (-2 \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2}) =$$

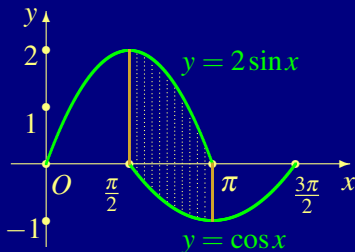
$$= (-2(-1) - 0) - (0 - 1) = 2 + 1 = 3.$$

Відповідь: 3.

Приклади із ЗНО

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.).
Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями: $y = 2 \sin x$,
 $y = \cos x$, $x = \pi/2$, $x = \pi$.

Розв'язання. Фігуру, обмежену заданими лініями, зображено на малюнку. Її площа виражається рівностями



$$\int_{\pi/2}^{\pi} (2 \sin x - \cos x) dx = (-2 \cos x - \sin x) \Big|_{\pi/2}^{\pi} =$$

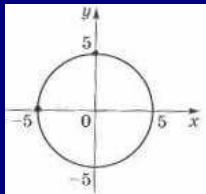
$$= (-2 \cos \pi - \sin \pi) - (-2 \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2}) =$$

$$= (-2(-1) - 0) - (0 - 1) = 2 + 1 = 3.$$

Відповідь: 3.

Приклади із ЗНО

Приклад 10 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.).



Обчисліть $\frac{1}{\pi} \int_{-5}^0 \sqrt{25-x^2} dx$, використовуючи рівняння кола $x^2 + y^2 = 25$, зображеного на рисунку.

Розв'язання. Оскільки

$y = \sqrt{25-x^2} \iff \begin{cases} y \geq 0, \\ x^2 + y^2 = 25, \end{cases}$ то графіком функції

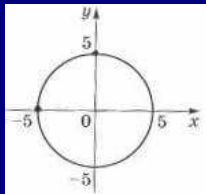
$y = \sqrt{25-x^2}$ є верхнє відносно осі Ox півколо заданого кола. Тоді заданий інтеграл по відрізку $[-5;0]$ виражає площу чверті круга (що лежить у другій координатній чверті), обмеженого заданим колом. Тому

$$\frac{1}{\pi} \int_{-5}^0 \sqrt{25-x^2} dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{4} S_{\text{кр}} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 5^2 = \frac{25}{4} = 6,25.$$

Відповідь: 6,25.

Приклади із ЗНО

Приклад 10 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.).



Обчисліть $\frac{1}{\pi} \int_{-5}^0 \sqrt{25-x^2} dx$, використовуючи рівняння кола $x^2 + y^2 = 25$, зображеного на рисунку.

Розв'язання. Оскільки

$y = \sqrt{25-x^2} \iff \begin{cases} y \geq 0, \\ x^2 + y^2 = 25, \end{cases}$, то графіком функції

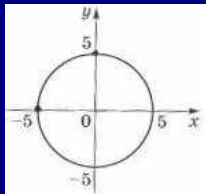
$y = \sqrt{25-x^2}$ є верхнє відносно осі Ox півколо заданого кола. Тоді заданий інтеграл по відрітку $[-5;0]$ виражає площу чверті круга (що лежить у другій координатній чверті), обмеженого заданим колом. Тому

$$\frac{1}{\pi} \int_{-5}^0 \sqrt{25-x^2} dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{4} S_{\text{кр}} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 5^2 = \frac{25}{4} = 6,25.$$

Відповідь: 6,25.

Приклади із ЗНО

Приклад 10 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.).



Обчисліть $\frac{1}{\pi} \int_{-5}^0 \sqrt{25-x^2} dx$, використовуючи рівняння кола $x^2 + y^2 = 25$, зображеного на рисунку.

Розв'язання. Оскільки

$y = \sqrt{25-x^2} \iff \begin{cases} y \geq 0, \\ x^2 + y^2 = 25, \end{cases}$, то графіком функції

$y = \sqrt{25-x^2}$ є верхнє відносно осі Ox півколо заданого кола. Тоді заданий інтеграл по відрітку $[-5;0]$ виражає площу чверті круга (що лежить у другій координатній чверті), обмеженого заданим колом. Тому

$$\frac{1}{\pi} \int_{-5}^0 \sqrt{25-x^2} dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{4} S_{\text{кр}} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 5^2 = \frac{25}{4} = 6,25.$$

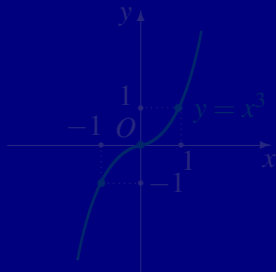
Відповідь: 6,25.

Приклади із ЗНО

Приклад 11 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2018 р.).
Задано функції $f(x) = x^3$ і $g(x) = 4|x|$.

1. Побудуйте графік функції f .
2. Побудуйте графік функції g .
3. Визначте абсиси точок перетину графіків функцій f і g .
4. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функцій f і g .

Розв'язання.



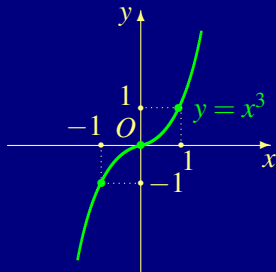
Графіком функції
 $y = f(x) = x^3$ є кубічна
парабола.

Приклади із ЗНО

Приклад 11 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2018 р.).
Задано функції $f(x) = x^3$ і $g(x) = 4|x|$.

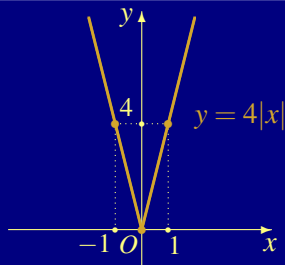
1. Побудуйте графік функції f .
2. Побудуйте графік функції g .
3. Визначте абсиси точок перетину графіків функцій f і g .
4. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функцій f і g .

Розв'язання.

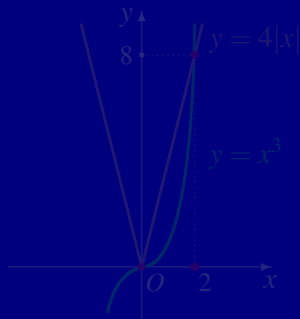


Графіком функції
 $y = f(x) = x^3$ є кубічна
парабола.

Приклади із ЗНО

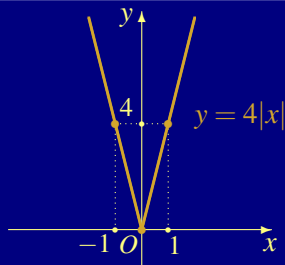


Графік функції $y = g(x) = 4|x|$ складається з двох частин прямих: $y = 4x$ при $x \geq 0$ і $y = -4x$ при $x \leq 0$.

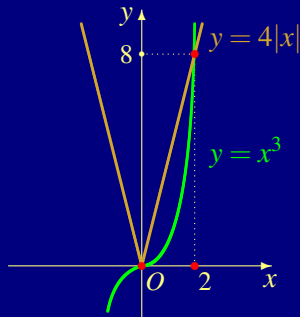


Абсциси точок перетину графіків функцій $f(x) = x^3$ і $g(x) = 4|x|$ – це корені рівняння $x^3 = 4|x|$ при $x \geq 0$, тобто невід'ємні корені рівняння $x^3 = 4x \iff x(x-2)(x+2) = 0$, а саме: $x_1 = 0$ і $x_2 = 2$.

Приклади із ЗНО

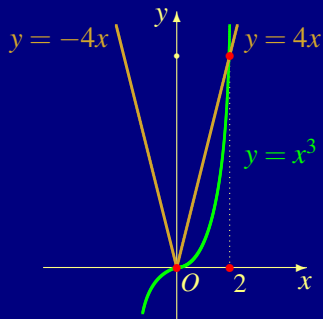


Графік функції $y = g(x) = 4|x|$ складається з двох частин прямих: $y = 4x$ при $x \geq 0$ і $y = -4x$ при $x \leq 0$.



Абсциси точок перетину графіків функцій $f(x) = x^3$ і $g(x) = 4|x|$ – це корені рівняння $x^3 = 4|x|$ при $x \geq 0$, тобто невід'ємні корені рівняння $x^3 = 4x \iff x(x-2)(x+2) = 0$, а саме: $x_1 = 0$ і $x_2 = 2$.

Приклади із ЗНО

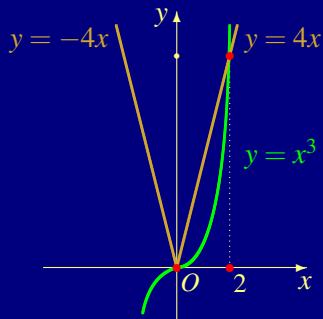


Запишемо площу S фігури, обмеженої графіками функцій $y = f(x) = x^3$ і $y = g(x) = 4|x|$ у вигляді визначеного інтеграла по відрізку $[0; 2]$, а саме:

$$S = \int_0^2 (4x - x^3) dx = \left(2x^2 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 = 2 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{4} = 8 - 4 = 4 \quad (\text{кв. од.}).$$

Відповідь: абсциси точок перетину графіків: $x_1 = 0$ і $x_2 = 2$; площа фігури $S = 4$ кв. од.

Приклади із ЗНО

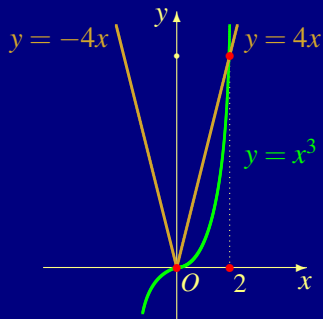


Запишемо площу S фігури, обмеженої графіками функцій $y = f(x) = x^3$ і $y = g(x) = 4|x|$ у вигляді визначеного інтеграла по відрізку $[0; 2]$, а саме:

$$S = \int_0^2 (4x - x^3) dx = \left(2x^2 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 = 2 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{4} = 8 - 4 = 4 \quad (\text{кв. од.}).$$

Відповідь: абсциси точок перетину графіків: $x_1 = 0$ і $x_2 = 2$; площа фігури $S = 4$ кв. од.

Приклади із ЗНО



Запишемо площу S фігури, обмеженої графіками функцій $y = f(x) = x^3$ і $y = g(x) = 4|x|$ у вигляді визначеного інтеграла по відрізьку $[0; 2]$, а саме:

$$S = \int_0^2 (4x - x^3) dx = \left(2x^2 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 = 2 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{4} = 8 - 4 = 4 \quad (\text{кв. од.}).$$

Відповідь: абсциси точок перетину графіків: $x_1 = 0$ і $x_2 = 2$; площа фігури $S = 4$ кв. од.