

Теорема про логарифми і степеневі-показникові вирази

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 34 (частина друга)



Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Теорема про логарифми

Ефективним засобом розв'язання ряду стандартних логарифмічних рівнянь і нерівностей є наступні **теорема про логарифми**.

Теорема 1. Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \iff \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \quad (\text{або} \quad g(x) > 0). \end{cases}$$

Внаслідок кожної з нерівностей $f(x) > 0$ чи $g(x) > 0$ корені рівняння $f(x) = g(x)$ належать області допустимих значень (ОДЗ) початкового логарифмічного рівняння. Природньо, що з нерівностей $f(x) > 0$ або $g(x) > 0$ доцільно включити до системи більш просту нерівність.

Теорема про логарифми

Ефективним засобом розв'язання ряду стандартних логарифмічних рівнянь і нерівностей є наступні **теорема про логарифми**.

Теорема 1. Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \iff \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \quad (\text{або} \quad g(x) > 0). \end{cases}$$

Внаслідок кожної з нерівностей $f(x) > 0$ чи $g(x) > 0$ корені рівняння $f(x) = g(x)$ належать області допустимих значень (ОДЗ) початкового логарифмічного рівняння. Природньо, що з нерівностей $f(x) > 0$ або $g(x) > 0$ доцільно включити до системи більш просту нерівність.

Теорема про логарифми

Ефективним засобом розв'язання ряду стандартних логарифмічних рівнянь і нерівностей є наступні **теорема про логарифми**.

Теорема 1. Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \iff \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \quad (\text{або} \quad g(x) > 0). \end{cases}$$

Внаслідок кожної з нерівностей $f(x) > 0$ чи $g(x) > 0$ корені рівняння $f(x) = g(x)$ належать області допустимих значень (ОДЗ) початкового логарифмічного рівняння. Природньо, що з нерівностей $f(x) > 0$ або $g(x) > 0$ доцільно включити до системи більш просту нерівність.

Теореми про логарифми

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\log_5(x^2 - 5) = \log_5(2x - 2).$$

Розв'язання. У відповідності з наведеною теоремою 1 маємо

$$\log_5(x^2 - 5) = \log_5(2x - 2) \iff \begin{cases} x^2 - 5 = 2x - 2, \\ 2x - 2 > 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи квадратне рівняння

$$x^2 - 5 = 2x - 2 \iff x^2 - 2x - 3 = 0, \text{ знаходимо його корені:} \\ x_1 = -1 \text{ і } x_2 = 3.$$

Число $x = -1$ не задовольняє нерівність $2x - 2 > 0$ системи, а число $x = 3$ задовольняє цю нерівність. Отже, задане рівняння має єдиний корінь $x = 3$.

Відповідь: $x = 3$.

Теорема про логарифми

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\log_5(x^2 - 5) = \log_5(2x - 2).$$

Розв'язання. У відповідності з наведеною теоремою 1 маємо

$$\log_5(x^2 - 5) = \log_5(2x - 2) \iff \begin{cases} x^2 - 5 = 2x - 2, \\ 2x - 2 > 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи квадратне рівняння

$$x^2 - 5 = 2x - 2 \iff x^2 - 2x - 3 = 0, \text{ знаходимо його корені:} \\ x_1 = -1 \text{ і } x_2 = 3.$$

Число $x = -1$ не задовольняє нерівність $2x - 2 > 0$ системи, а число $x = 3$ задовольняє цю нерівність. Отже, задане рівняння має єдиний корінь $x = 3$.

Відповідь: $x = 3$.

Теорема про логарифми

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\log_5(x^2 - 5) = \log_5(2x - 2).$$

Розв'язання. У відповідності з наведеною теоремою 1 маємо

$$\log_5(x^2 - 5) = \log_5(2x - 2) \iff \begin{cases} x^2 - 5 = 2x - 2, \\ 2x - 2 > 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи квадратне рівняння

$$x^2 - 5 = 2x - 2 \iff x^2 - 2x - 3 = 0, \text{ знаходимо його корені:} \\ x_1 = -1 \text{ і } x_2 = 3.$$

Число $x = -1$ не задовольняє нерівність $2x - 2 > 0$ системи, а число $x = 3$ задовольняє цю нерівність. Отже, задане рівняння має єдиний корінь $x = 3$.

Відповідь: $x = 3$.

Теорема про логарифми

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\log_5(x^2 - 5) = \log_5(2x - 2).$$

Розв'язання. У відповідності з наведеною теоремою 1 маємо

$$\log_5(x^2 - 5) = \log_5(2x - 2) \iff \begin{cases} x^2 - 5 = 2x - 2, \\ 2x - 2 > 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи квадратне рівняння

$$x^2 - 5 = 2x - 2 \iff x^2 - 2x - 3 = 0, \text{ знаходимо його корені:} \\ x_1 = -1 \text{ і } x_2 = 3.$$

Число $x = -1$ не задовольняє нерівність $2x - 2 > 0$ системи, а число $x = 3$ задовольняє цю нерівність. Отже, задане рівняння має єдиний корінь $x = 3$.

Відповідь: $x = 3$.

Теорема про логарифми

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\log_5(x^2 - 5) = \log_5(2x - 2).$$

Розв'язання. У відповідності з наведеною теоремою 1 маємо

$$\log_5(x^2 - 5) = \log_5(2x - 2) \iff \begin{cases} x^2 - 5 = 2x - 2, \\ 2x - 2 > 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи квадратне рівняння

$$x^2 - 5 = 2x - 2 \iff x^2 - 2x - 3 = 0, \text{ знаходимо його корені:} \\ x_1 = -1 \text{ і } x_2 = 3.$$

Число $x = -1$ не задовольняє нерівність $2x - 2 > 0$ системи, а число $x = 3$ задовольняє цю нерівність. Отже, задане рівняння має єдиний корінь $x = 3$.

Відповідь: $x = 3$.

Теореми про логарифми

Теорема 2. Якщо $a > 1$, то

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \iff \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0; \end{cases}$$

$$\log_a f(x) \leq \log_a g(x) \iff \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

В кожній із систем враховується той факт, що логарифм з основою $a > 1$ є зростаючою функцією. Крім того, наслідком кожної з систем є також нерівність $g(x) > 0$, яку, таким чином, немає необхідності включати додатково в систему. Тому в результаті обидва логарифми $\log_a f(x)$, $\log_a g(x)$ визначені, тобто усі розв'язки кожної з систем належать ОДЗ відповідної логарифмічної нерівності.

Теорема про логарифми

Теорема 2. Якщо $a > 1$, то

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \iff \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0; \end{cases}$$

$$\log_a f(x) \leq \log_a g(x) \iff \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

В кожній із систем враховується той факт, що логарифм з основою $a > 1$ є зростаючою функцією. Крім того, наслідком кожної з систем є також нерівність $g(x) > 0$, яку, таким чином, немає необхідності включати додатково в систему. Тому в результаті обидва логарифми $\log_a f(x)$, $\log_a g(x)$ визначені, тобто усі розв'язки кожної з систем належать ОДЗ відповідної логарифмічної нерівності.

Теореми про логарифми

Теорема 2. Якщо $a > 1$, то

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \iff \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0; \end{cases}$$

$$\log_a f(x) \leq \log_a g(x) \iff \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

В кожній із систем враховується той факт, що логарифм з основою $a > 1$ є зростаючою функцією. Крім того, наслідком кожної з систем є також нерівність $g(x) > 0$, яку, таким чином, немає необхідності включати додатково в систему. Тому в результаті обидва логарифми $\log_a f(x)$, $\log_a g(x)$ визначені, тобто усі розв'язки кожної з систем належать ОДЗ відповідної логарифмічної нерівності.

Теорема про логарифми

Теорема 3. Якщо $0 < a < 1$, то

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \iff \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0; \end{cases}$$

$$\log_a f(x) \leq \log_a g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

В кожній із систем враховується той факт, що логарифм з основою $0 < a < 1$ є спадною функцією. Крім того, наслідком кожної з систем є також нерівність $f(x) > 0$, яку, таким чином, немає необхідності включати додатково в систему. Тому в результаті обидва логарифми $\log_a f(x)$, $\log_a g(x)$ визначені, тобто усі розв'язки кожної з систем належать ОДЗ відповідної логарифмічної нерівності.

Теореми про логарифми

Теорема 3. Якщо $0 < a < 1$, то

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \iff \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0; \end{cases}$$

$$\log_a f(x) \leq \log_a g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

В кожній із систем враховується той факт, що логарифм з основою $0 < a < 1$ є спадною функцією. Крім того, наслідком кожної з систем є також нерівність $f(x) > 0$, яку, таким чином, немає необхідності включати додатково в систему. Тому в результаті обидва логарифми $\log_a f(x)$, $\log_a g(x)$ визначені, тобто усі розв'язки кожної з систем належать ОДЗ відповідної логарифмічної нерівності.

Теорема про логарифми

Теорема 3. Якщо $0 < a < 1$, то

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \iff \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0; \end{cases}$$

$$\log_a f(x) \leq \log_a g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

В кожній із систем враховується той факт, що логарифм з основою $0 < a < 1$ є **спадною** функцією. Крім того, наслідком кожної з систем є також нерівність $f(x) > 0$, яку, таким чином, немає необхідності включати додатково в систему. Тому в результаті обидва логарифми $\log_a f(x)$, $\log_a g(x)$ визначені, тобто усі розв'язки кожної з систем належать ОДЗ відповідної логарифмічної нерівності.

Теорема про логарифми

Приклад 2. Розв'язати нерівність

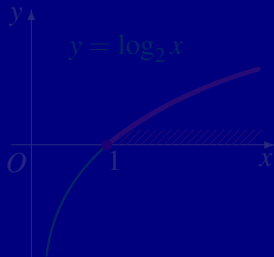
$$\log_{0,5} \log_2(2x+4) \leq \log_{0,5} \log_2 x.$$

Розв'язання. У відповідності з теоремою 3 при $a = 0,5$:

$$\log_{0,5} f(x) \leq \log_{0,5} g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Отже,

$$\log_{0,5} \log_2(2x+4) \leq \log_{0,5} \log_2 x \iff \begin{cases} \log_2(2x+4) \geq \log_2 x, \\ \log_2 x > 0, \end{cases}$$



Розв'язуючи найпростішу логарифмічну нерівність $\log_2 x > 0$ графічним методом (див. мал.), отримуємо $x \in (1, \infty)$.

Теорема про логарифми

Приклад 2. Розв'язати нерівність

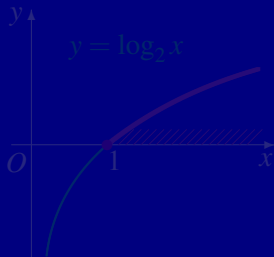
$$\log_{0,5} \log_2(2x+4) \leq \log_{0,5} \log_2 x.$$

Розв'язання. У відповідності з теоремою 3 при $a = 0,5$:

$$\log_{0,5} f(x) \leq \log_{0,5} g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Отже,

$$\log_{0,5} \log_2(2x+4) \leq \log_{0,5} \log_2 x \iff \begin{cases} \log_2(2x+4) \geq \log_2 x, \\ \log_2 x > 0, \end{cases}$$



Розв'язуючи найпростішу логарифмічну нерівність $\log_2 x > 0$ графічним методом (див. мал.), отримуємо $x \in (1, \infty)$.

Теорема про логарифми

Приклад 2. Розв'язати нерівність

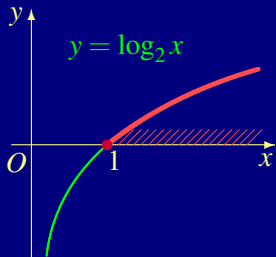
$$\log_{0,5} \log_2(2x+4) \leq \log_{0,5} \log_2 x.$$

Розв'язання. У відповідності з теоремою 3 при $a = 0,5$:

$$\log_{0,5} f(x) \leq \log_{0,5} g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Отже,

$$\log_{0,5} \log_2(2x+4) \leq \log_{0,5} \log_2 x \iff \begin{cases} \log_2(2x+4) \geq \log_2 x, \\ \log_2 x > 0, \end{cases}$$



Розв'язуючи найпростішу логарифмічну нерівність $\log_2 x > 0$ графічним методом (див. мал.), отримуємо $x \in (1, \infty)$.

Теорема про логарифми

Першу нерівність $\log_2(2x+4) \geq \log_2 x$ отриманої вище системи перепишемо у вигляді $\log_2 x \leq \log_2(2x+4)$ і використаємо для її розв'язання теорему 2 при $a = 2$, а саме:

$$\log_2 f(x) \leq \log_2 g(x) \iff \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Тому

$$\log_2 x \leq \log_2(2x+4) \iff \begin{cases} x \leq 2x+4, \\ x > 0, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x \geq -4, \\ x > 0, \end{cases} \iff x > 0.$$

Отже,

$$\begin{cases} \log_2(2x+4) \geq \log_2 x, \\ \log_2 x > 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0, \\ x \in (1, \infty), \end{cases} \iff x \in (1, \infty).$$

Відповідь: $x \in (1, \infty)$.

Теорема про логарифми

Першу нерівність $\log_2(2x+4) \geq \log_2 x$ отриманої вище системи перепишемо у вигляді $\log_2 x \leq \log_2(2x+4)$ і використаємо для її розв'язання теорему 2 при $a = 2$, а саме:

$$\log_2 f(x) \leq \log_2 g(x) \iff \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Тому

$$\log_2 x \leq \log_2(2x+4) \iff \begin{cases} x \leq 2x+4, \\ x > 0, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x \geq -4, \\ x > 0, \end{cases} \iff x > 0.$$

Отже,

$$\begin{cases} \log_2(2x+4) \geq \log_2 x, \\ \log_2 x > 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0, \\ x \in (1, \infty), \end{cases} \iff x \in (1, \infty).$$

Відповідь: $x \in (1, \infty)$.

Теорема про логарифми

Першу нерівність $\log_2(2x+4) \geq \log_2 x$ отриманої вище системи перепишемо у вигляді $\log_2 x \leq \log_2(2x+4)$ і використаємо для її розв'язання теорему 2 при $a = 2$, а саме:

$$\log_2 f(x) \leq \log_2 g(x) \iff \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Тому

$$\log_2 x \leq \log_2(2x+4) \iff \begin{cases} x \leq 2x+4, \\ x > 0, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x \geq -4, \\ x > 0, \end{cases} \iff x > 0.$$

Отже,

$$\begin{cases} \log_2(2x+4) \geq \log_2 x, \\ \log_2 x > 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0, \\ x \in (1, \infty), \end{cases} \iff x \in (1, \infty).$$

Відповідь: $x \in (1, \infty)$.

Теорема про логарифми

Першу нерівність $\log_2(2x+4) \geq \log_2 x$ отриманої вище системи перепишемо у вигляді $\log_2 x \leq \log_2(2x+4)$ і використаємо для її розв'язання теорему 2 при $a = 2$, а саме:

$$\log_2 f(x) \leq \log_2 g(x) \iff \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Тому

$$\log_2 x \leq \log_2(2x+4) \iff \begin{cases} x \leq 2x+4, \\ x > 0, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x \geq -4, \\ x > 0, \end{cases} \iff x > 0.$$

Отже,

$$\begin{cases} \log_2(2x+4) \geq \log_2 x, \\ \log_2 x > 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0, \\ x \in (1, \infty), \end{cases} \iff x \in (1, \infty).$$

Відповідь: $x \in (1, \infty)$.

Теорема про логарифми зі змінною основою

У випадку **змінної основи** у логарифма справедливі наступні теореми 1–5.

Теорема 1.

$$\log_{\varphi(x)} f(x) = b \iff \begin{cases} \varphi(x) > 0, \\ \varphi(x) \neq 1, \\ f(x) = (\varphi(x))^b. \end{cases}$$

Наслідком системи є також нерівність $f(x) > 0$, яку, таким чином, немає необхідності включати додатково в систему.

Теорема про логарифми зі змінною основою

У випадку **змінної основи** у логарифма справедливі наступні теореми 1–5.

Теорема 1.

$$\log_{\varphi(x)} f(x) = b \iff \begin{cases} \varphi(x) > 0, \\ \varphi(x) \neq 1, \\ f(x) = (\varphi(x))^b. \end{cases}$$

Наслідком системи є також нерівність $f(x) > 0$, яку, таким чином, немає необхідності включати додатково в систему.

Теорема про логарифми зі змінною основою

У випадку **змінної основи** у логарифма справедливі наступні теореми 1–5.

Теорема 1.

$$\log_{\varphi(x)} f(x) = b \iff \begin{cases} \varphi(x) > 0, \\ \varphi(x) \neq 1, \\ f(x) = (\varphi(x))^b. \end{cases}$$

Наслідком системи є також нерівність $f(x) > 0$, яку, таким чином, немає необхідності включати додатково в систему.

Теорема про логарифми зі змінною основою

Теорема 2.

$$\log_{\varphi(x)} f(x) < b \iff \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) > 1, \\ f(x) < (\varphi(x))^b, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} f(x) > 0, \\ 0 < \varphi(x) < 1, \\ f(x) > (\varphi(x))^b. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Теорема 3.

$$\log_{\varphi(x)} f(x) > b \iff \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) > 1, \\ f(x) > (\varphi(x))^b, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < \varphi(x) < 1, \\ f(x) < (\varphi(x))^b, \\ f(x) > 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

В кожній з теорем 2, 3 враховується той факт, що логарифм з основою $a > 1$ є зростаючою функцією, а з основою $0 < a < 1$ – є спадною функцією.

Теорема про логарифми зі змінною основою

Теорема 2.

$$\log_{\varphi(x)} f(x) < b \iff \begin{cases} \varphi(x) > 1, \\ f(x) < (\varphi(x))^b, \\ f(x) > 0, \\ 0 < \varphi(x) < 1, \\ f(x) > (\varphi(x))^b. \end{cases}$$

Теорема 3.

$$\log_{\varphi(x)} f(x) > b \iff \begin{cases} \varphi(x) > 1, \\ f(x) > (\varphi(x))^b, \\ 0 < \varphi(x) < 1, \\ f(x) < (\varphi(x))^b, \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

В кожній з теорем 2, 3 враховується той факт, що логарифм з основою $a > 1$ є зростаючою функцією, а з основою $0 < a < 1$ – є спадною функцією.

Теореми про логарифми зі змінною основою

Теорема 2.

$$\log_{\varphi(x)} f(x) < b \iff \begin{cases} \varphi(x) > 1, \\ f(x) < (\varphi(x))^b, \\ f(x) > 0, \\ 0 < \varphi(x) < 1, \\ f(x) > (\varphi(x))^b. \end{cases}$$

Теорема 3.

$$\log_{\varphi(x)} f(x) > b \iff \begin{cases} \varphi(x) > 1, \\ f(x) > (\varphi(x))^b, \\ 0 < \varphi(x) < 1, \\ f(x) < (\varphi(x))^b, \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

В кожній з теорем 2, 3 враховується той факт, що логарифм з основою $a > 1$ є зростаючою функцією, а з основою $0 < a < 1$ – є спадною функцією.

Теорема про логарифми зі змінною основою

Аналогічно розглянутим теоремам 2, 3 записуються наступні теореми 4, 5.

Теорема 4.

$$\log_{\varphi(x)} f(x) \leq b \iff \begin{cases} \varphi(x) > 1, \\ f(x) \leq (\varphi(x))^b, \\ f(x) > 0, \\ 0 < \varphi(x) < 1, \\ f(x) \geq (\varphi(x))^b. \end{cases}$$

Теорема 5.

$$\log_{\varphi(x)} f(x) \geq b \iff \begin{cases} \varphi(x) > 1, \\ f(x) \geq (\varphi(x))^b, \\ 0 < \varphi(x) < 1, \\ f(x) \leq (\varphi(x))^b, \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Теорема про логарифми зі змінною основою

Аналогічно розглянутим теоремам 2, 3 записуються наступні теореми 4, 5.

Теорема 4.

$$\log_{\varphi(x)} f(x) \leq b \iff \begin{cases} \varphi(x) > 1, \\ f(x) \leq (\varphi(x))^b, \\ f(x) > 0, \\ 0 < \varphi(x) < 1, \\ f(x) \geq (\varphi(x))^b. \end{cases}$$

Теорема 5.

$$\log_{\varphi(x)} f(x) \geq b \iff \begin{cases} \varphi(x) > 1, \\ f(x) \geq (\varphi(x))^b, \\ 0 < \varphi(x) < 1, \\ f(x) \leq (\varphi(x))^b, \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Теорема про логарифми зі змінною основою

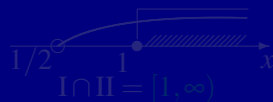
Приклад 3. Розв'язати нерівність $\log_{2x}(3x-1) \geq 1$.

Розв'язання. У відповідності з наведеною теоремою 5 маємо

$$\log_{2x}(3x-1) \geq 1 \iff \begin{cases} \begin{cases} 2x > 1, \\ 3x-1 \geq 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < 2x < 1, \\ 3x-1 \leq 2x, \\ 3x-1 > 0, \end{cases} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \begin{cases} x > 1/2, & \text{I} \\ x \geq 1, & \text{II} \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1/2, & \text{III} \\ x \leq 1, & \text{IV} \\ x > 1/3, & \text{V} \end{cases} \end{cases}$$

Перетинаючи множини $I = (1/2, \infty)$ і $II = [1, \infty)$, знаходимо розв'язки першої системи:



Для розв'язання другої системи знайдемо перетин множин $III = (0; 1/2)$, $IV = (-\infty, 1]$ і $V = (1/3, \infty)$.

Теорема про логарифми зі змінною основою

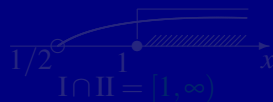
Приклад 3. Розв'язати нерівність $\log_{2x}(3x-1) \geq 1$.

Розв'язання. У відповідності з наведеною теоремою 5 маємо

$$\log_{2x}(3x-1) \geq 1 \iff \left[\begin{cases} \begin{cases} 2x > 1, \\ 3x-1 \geq 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < 2x < 1, \\ 3x-1 \leq 2x, \\ 3x-1 > 0, \end{cases} \end{cases} \right] \iff$$

$$\iff \left[\begin{cases} \begin{cases} x > 1/2, & \text{I} \\ x \geq 1, & \text{II} \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1/2, & \text{III} \\ x \leq 1, & \text{IV} \\ x > 1/3, & \text{V} \end{cases} \end{cases} \right]$$

Перетинаючи множини $I = (1/2, \infty)$ і $II = [1, \infty)$, знаходимо розв'язки першої системи:



Для розв'язання другої системи знайдемо перетин множин $III = (0; 1/2)$, $IV = (-\infty, 1]$ і $V = (1/3, \infty)$.

Теорема про логарифми зі змінною основою

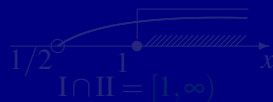
Приклад 3. Розв'язати нерівність $\log_{2x}(3x-1) \geq 1$.

Розв'язання. У відповідності з наведеною теоремою 5 маємо

$$\log_{2x}(3x-1) \geq 1 \iff \left[\begin{cases} \begin{cases} 2x > 1, \\ 3x-1 \geq 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < 2x < 1, \\ 3x-1 \leq 2x, \\ 3x-1 > 0, \end{cases} \end{cases} \iff$$

$$\iff \left[\begin{cases} \begin{cases} x > 1/2, & \text{I} \\ x \geq 1, & \text{II} \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1/2, & \text{III} \\ x \leq 1, & \text{IV} \\ x > 1/3. & \text{V} \end{cases} \end{cases}$$

Перетинаючи множини $I = (1/2, \infty)$ і $II = [1, \infty)$, знаходимо розв'язки першої системи:



Для розв'язання другої системи знайдемо перетин множин $III = (0; 1/2)$, $IV = (-\infty, 1]$ і $V = (1/3, \infty)$.

Теорема про логарифми зі змінною основою

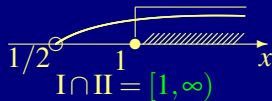
Приклад 3. Розв'язати нерівність $\log_{2x}(3x-1) \geq 1$.

Розв'язання. У відповідності з наведеною теоремою 5 маємо

$$\log_{2x}(3x-1) \geq 1 \iff \left[\begin{cases} \begin{cases} 2x > 1, \\ 3x-1 \geq 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < 2x < 1, \\ 3x-1 \leq 2x, \\ 3x-1 > 0, \end{cases} \end{cases} \iff$$

$$\iff \left[\begin{cases} \begin{cases} x > 1/2, & \text{I} \\ x \geq 1, & \text{II} \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1/2, & \text{III} \\ x \leq 1, & \text{IV} \\ x > 1/3, & \text{V} \end{cases} \end{cases}$$

Перетинаючи множини $\text{I} = (1/2, \infty)$ і $\text{II} = [1, \infty)$, знаходимо розв'язки першої системи:



Для розв'язання другої системи знайдемо перетин множин $\text{III} = (0; 1/2)$, $\text{IV} = (-\infty, 1]$ і $\text{V} = (1/3, \infty)$.

Теорема про логарифми зі змінною основою

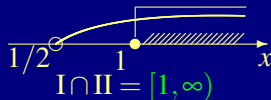
Приклад 3. Розв'язати нерівність $\log_{2x}(3x-1) \geq 1$.

Розв'язання. У відповідності з наведеною теоремою 5 маємо

$$\log_{2x}(3x-1) \geq 1 \iff \begin{cases} \begin{cases} 2x > 1, \\ 3x-1 \geq 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < 2x < 1, \\ 3x-1 \leq 2x, \\ 3x-1 > 0, \end{cases} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \begin{cases} x > 1/2, & \text{I} \\ x \geq 1, & \text{II} \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1/2, & \text{III} \\ x \leq 1, & \text{IV} \\ x > 1/3, & \text{V} \end{cases} \end{cases}$$

Перетинаючи множини $\text{I} = (1/2, \infty)$ і $\text{II} = [1, \infty)$, знаходимо розв'язки першої системи:



Для розв'язання другої системи знайдемо перетин множин $\text{III} = (0; 1/2)$, $\text{IV} = (-\infty, 1]$ і $\text{V} = (1/3, \infty)$.

Теореми про логарифми зі змінною основою

Спочатку перетинаємо множини $\text{III} = (0; 1/2)$ і $\text{IV} = (-\infty, 1]$:



$$\text{III} \cap \text{IV} = (0; 1/2) = \text{VI}$$

а потім отриману множину $\text{VI} = (0; 1/2)$ перетинаємо з множиною $\text{V} = (1/3, \infty)$:

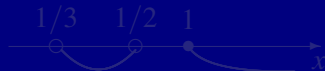


$$\text{VI} \cap \text{V} = (1/3; 1/2)$$

Таким чином, після розв'язання систем маємо сукупність

$$\begin{cases} x \in [1, \infty), & A \\ x \in (1/3; 1/2), & B \end{cases}$$

Нарешті, об'єднуємо множини $A = [1, \infty)$ і $B = (1/3; 1/2)$:



$$A \cup B = (1/3; 1/2) \cup [1, \infty)$$

Відповідь: $x \in (1/3; 1/2) \cup [1, \infty)$.

Теорема про логарифми зі змінною основою

Спочатку перетинаємо множини $\text{III} = (0; 1/2)$ і $\text{IV} = (-\infty, 1]$:



$$\text{III} \cap \text{IV} = (0; 1/2) = \text{VI}$$

а потім отриману множину $\text{VI} = (0; 1/2)$ перетинаємо з множиною $\text{V} = (1/3, \infty)$:

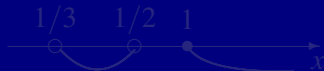


$$\text{VI} \cap \text{V} = (1/3; 1/2)$$

Таким чином, після розв'язання систем маємо сукупність

$$\begin{cases} x \in [1, \infty), & A \\ x \in (1/3; 1/2), & B \end{cases}$$

Нарешті, об'єднуємо множини $A = [1, \infty)$ і $B = (1/3; 1/2)$:

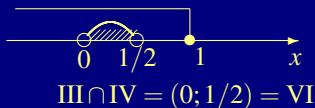


$$A \cup B = (1/3; 1/2) \cup [1, \infty)$$

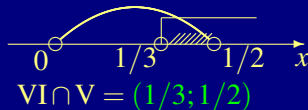
Відповідь: $x \in (1/3; 1/2) \cup [1, \infty)$.

Теорема про логарифми зі змінною основою

Спочатку перетинаємо множини $\text{III} = (0; 1/2)$ і $\text{IV} = (-\infty, 1]$:



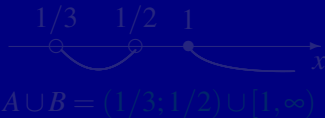
а потім отриману множину $\text{VI} = (0; 1/2)$ перетинаємо з множиною $\text{V} = (1/3, \infty)$:



Таким чином, після розв'язання систем маємо сукупність

$$\begin{cases} x \in [1, \infty), & A \\ x \in (1/3; 1/2). & B \end{cases}$$

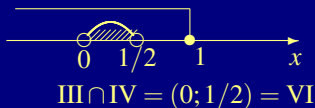
Нарешті, об'єднуємо множини $A = [1, \infty)$ і $B = (1/3; 1/2)$:



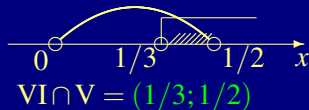
Відповідь: $x \in (1/3; 1/2) \cup [1, \infty)$.

Теореми про логарифми зі змінною основою

Спочатку перетинаємо множини $\text{III} = (0; 1/2)$ і $\text{IV} = (-\infty, 1]$:



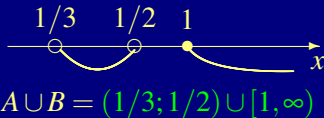
а потім отриману множину $\text{VI} = (0; 1/2)$ перетинаємо з множиною $\text{V} = (1/3, \infty)$:



Таким чином, після розв'язання систем маємо сукупність

$$\begin{cases} x \in [1, \infty), & A \\ x \in (1/3; 1/2). & B \end{cases}$$

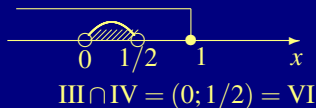
Нарешті, об'єднуємо множини $A = [1, \infty)$ і $B = (1/3; 1/2)$:



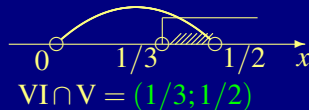
Відповідь: $x \in (1/3; 1/2) \cup [1, \infty)$.

Теорема про логарифми зі змінною основою

Спочатку перетинаємо множини $\text{III} = (0; 1/2)$ і $\text{IV} = (-\infty, 1]$:



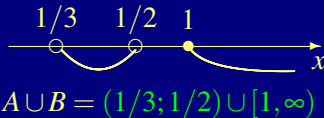
а потім отриману множину $\text{VI} = (0; 1/2)$ перетинаємо з множиною $\text{V} = (1/3, \infty)$:



Таким чином, після розв'язання систем маємо сукупність

$$\begin{cases} x \in [1, \infty), & A \\ x \in (1/3; 1/2). & B \end{cases}$$

Нарешті, об'єднуємо множини $A = [1, \infty)$ і $B = (1/3; 1/2)$:



Відповідь: $x \in (1/3; 1/2) \cup [1, \infty)$.

Теореми про логарифми зі змінною основою

Випадок двох логарифмів з однаковою **змінною основою** розглядається в наступних теоремах 6–8.

Теорема 6.

$$\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x) \iff \begin{cases} \varphi(x) > 0, \\ \varphi(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \quad (\text{або} \quad g(x) > 0). \end{cases}$$

Природньо, що з нерівностей $f(x) > 0$ або $g(x) > 0$ доцільно включити до системи більш просту нерівність.

Теорема про логарифми зі змінною основою

Випадок двох логарифмів з однаковою **змінною основою** розглядається в наступних теоремах 6–8.

Теорема 6.

$$\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x) \iff \begin{cases} \varphi(x) > 0, \\ \varphi(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \quad (\text{або} \quad g(x) > 0). \end{cases}$$

Природньо, що з нерівностей $f(x) > 0$ або $g(x) > 0$ доцільно включити до системи більш просту нерівність.

Теорема про логарифми зі змінною основою

Теорема 7.

$$\log_{\varphi(x)} f(x) < \log_{\varphi(x)} g(x) \iff \left[\begin{cases} \varphi(x) > 1, \\ f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ 0 < \varphi(x) < 1, \\ f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases} \right.$$

Теорема 8.

$$\log_{\varphi(x)} f(x) \leq \log_{\varphi(x)} g(x) \iff \left[\begin{cases} \varphi(x) > 1, \\ f(x) \leq g(x), \\ f(x) > 0, \\ 0 < \varphi(x) < 1, \\ f(x) \geq g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases} \right.$$

В кожній з теорем 7, 8 враховується той факт, що логарифм з основою $a > 1$ є зростаючою функцією, а з основою $0 < a < 1$ – спадною функцією.

Теорема про логарифми зі змінною основою

Теорема 7.

$$\log_{\varphi(x)} f(x) < \log_{\varphi(x)} g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) > 1, \\ f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < \varphi(x) < 1, \\ f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Теорема 8.

$$\log_{\varphi(x)} f(x) \leq \log_{\varphi(x)} g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) > 1, \\ f(x) \leq g(x), \\ f(x) > 0, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < \varphi(x) < 1, \\ f(x) \geq g(x), \\ g(x) > 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

В кожній з теорем 7, 8 враховується той факт, що логарифм з основою $a > 1$ є зростаючою функцією, а з основою $0 < a < 1$ – є спадною функцією.

Теорема про логарифми зі змінною основою

Теорема 7.

$$\log_{\varphi(x)} f(x) < \log_{\varphi(x)} g(x) \iff \left[\begin{cases} \varphi(x) > 1, \\ f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ 0 < \varphi(x) < 1, \\ f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases} \right.$$

Теорема 8.

$$\log_{\varphi(x)} f(x) \leq \log_{\varphi(x)} g(x) \iff \left[\begin{cases} \varphi(x) > 1, \\ f(x) \leq g(x), \\ f(x) > 0, \\ 0 < \varphi(x) < 1, \\ f(x) \geq g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases} \right.$$

В кожній з теорем 7, 8 враховується той факт, що логарифм з основою $a > 1$ є зростаючою функцією, а з основою $0 < a < 1$ – є спадною функцією.

Теореми про показникові вирази

Оскільки показникова функція $y = a^x$ є строго монотонною, тобто кожне своє значення приймає не більше одного разу, то справедлива наступна теорема.

Теорема 1. Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x).$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння $25^{2x+1} = 5\sqrt{5}$.

Розв'язання. Подамо обидві частини рівняння у вигляді степенів числа 5: $25^{2x+1} = 5^{2(2x+1)} = 5^{4x+2}$;

$$5\sqrt{5} = 5^1 \cdot 5^{1/2} = 5^{1+\frac{1}{2}} = 5^{3/2}.$$

Тоді у відповідності з теоремою 1 отримуємо

$$\begin{aligned} 5^{4x+2} = 5^{3/2} &\iff 4x+2 = \frac{3}{2} \iff 4x = -\frac{1}{2} \iff \\ &\iff x = -\frac{1}{8} = -0,125. \end{aligned}$$

Відповідь: $x = -0,125$.

Теореми про показникові вирази

Оскільки показникова функція $y = a^x$ є строго монотонною, тобто кожне своє значення приймає не більше одного разу, то справедлива наступна теорема.

Теорема 1. Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x).$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння $25^{2x+1} = 5\sqrt{5}$.

Розв'язання. Подано обидві частини рівняння у вигляді степенів числа 5: $25^{2x+1} = 5^{2(2x+1)} = 5^{4x+2}$;

$$5\sqrt{5} = 5^1 \cdot 5^{1/2} = 5^{1+\frac{1}{2}} = 5^{3/2}.$$

Тоді у відповідності з теоремою 1 отримуємо

$$\begin{aligned} 5^{4x+2} = 5^{3/2} &\iff 4x+2 = \frac{3}{2} \iff 4x = -\frac{1}{2} \iff \\ &\iff x = -\frac{1}{8} = -0,125. \end{aligned}$$

Відповідь: $x = -0,125$.

Теореми про показникові вирази

Оскільки показникова функція $y = a^x$ є строго монотонною, тобто кожне своє значення приймає не більше одного разу, то справедлива наступна теорема.

Теорема 1. Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x).$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння $25^{2x+1} = 5\sqrt{5}$.

Розв'язання. Подамо обидві частини рівняння у вигляді степенів числа 5: $25^{2x+1} = 5^{2(2x+1)} = 5^{4x+2}$;

$$5\sqrt{5} = 5^1 \cdot 5^{1/2} = 5^{1+1/2} = 5^{3/2}.$$

Тоді у відповідності з теоремою 1 отримуємо

$$\begin{aligned} 5^{4x+2} = 5^{3/2} &\iff 4x+2 = \frac{3}{2} \iff 4x = -\frac{1}{2} \iff \\ &\iff x = -\frac{1}{8} = -0,125. \end{aligned}$$

Відповідь: $x = -0,125$.

Теореми про показникові вирази

Оскільки показникова функція $y = a^x$ є строго монотонною, тобто кожне своє значення приймає не більше одного разу, то справедлива наступна теорема.

Теорема 1. Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x).$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння $25^{2x+1} = 5\sqrt{5}$.

Розв'язання. Подамо обидві частини рівняння у вигляді степенів числа 5: $25^{2x+1} = 5^{2(2x+1)} = 5^{4x+2}$;

$$5\sqrt{5} = 5^1 \cdot 5^{1/2} = 5^{1+\frac{1}{2}} = 5^{3/2}.$$

Тоді у відповідності з теоремою 1 отримуємо

$$\begin{aligned} 5^{4x+2} &= 5^{3/2} \iff 4x+2 = \frac{3}{2} \iff 4x = -\frac{1}{2} \iff \\ \iff x &= -\frac{1}{8} = -0,125. \end{aligned}$$

Відповідь: $x = -0,125$.

Теореми про показникові вирази

Оскільки показникова функція $y = a^x$ є строго монотонною, тобто кожне своє значення приймає не більше одного разу, то справедлива наступна теорема.

Теорема 1. Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x).$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння $25^{2x+1} = 5\sqrt{5}$.

Розв'язання. Подамо обидві частини рівняння у вигляді степенів числа 5: $25^{2x+1} = 5^{2(2x+1)} = 5^{4x+2}$;
 $5\sqrt{5} = 5^1 \cdot 5^{1/2} = 5^{1+\frac{1}{2}} = 5^{3/2}$.

Тоді у відповідності з теоремою 1 отримуємо

$$\begin{aligned} 5^{4x+2} &= 5^{3/2} \iff 4x+2 = \frac{3}{2} \iff 4x = -\frac{1}{2} \iff \\ \iff x &= -\frac{1}{8} = -0,125. \end{aligned}$$

Відповідь: $x = -0,125$.

Теореми про показникові вирази

Оскільки показникова функція $y = a^x$ є строго монотонною, тобто кожне своє значення приймає не більше одного разу, то справедлива наступна теорема.

Теорема 1. Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x).$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння $25^{2x+1} = 5\sqrt{5}$.

Розв'язання. Подамо обидві частини рівняння у вигляді степенів числа 5: $25^{2x+1} = 5^{2(2x+1)} = 5^{4x+2}$;
 $5\sqrt{5} = 5^1 \cdot 5^{1/2} = 5^{1+\frac{1}{2}} = 5^{3/2}$.

Тоді у відповідності з теоремою 1 отримуємо

$$\begin{aligned} 5^{4x+2} = 5^{3/2} &\iff 4x+2 = \frac{3}{2} \iff 4x = -\frac{1}{2} \iff \\ &\iff x = -\frac{1}{8} = -0,125. \end{aligned}$$

Відповідь: $x = -0,125$.

Теореми про показникові вирази

Оскільки показникова функція $y = a^x$ є строго монотонною, тобто кожне своє значення приймає не більше одного разу, то справедлива наступна теорема.

Теорема 1. Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x).$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння $25^{2x+1} = 5\sqrt{5}$.

Розв'язання. Подамо обидві частини рівняння у вигляді степенів числа 5: $25^{2x+1} = 5^{2(2x+1)} = 5^{4x+2}$;
 $5\sqrt{5} = 5^1 \cdot 5^{1/2} = 5^{1+\frac{1}{2}} = 5^{3/2}$.

Тоді у відповідності з теоремою 1 отримуємо

$$\begin{aligned} 5^{4x+2} = 5^{3/2} &\iff 4x+2 = \frac{3}{2} \iff 4x = -\frac{1}{2} \iff \\ &\iff x = -\frac{1}{8} = -0,125. \end{aligned}$$

Відповідь: $x = -0,125$.

Теореми про показникові вирази

Оскільки показникова функція $y = a^x$ є строго монотонною, тобто кожне своє значення приймає не більше одного разу, то справедлива наступна теорема.

Теорема 1. Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x).$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння $25^{2x+1} = 5\sqrt{5}$.

Розв'язання. Подамо обидві частини рівняння у вигляді степенів числа 5: $25^{2x+1} = 5^{2(2x+1)} = 5^{4x+2}$;
 $5\sqrt{5} = 5^1 \cdot 5^{1/2} = 5^{1+\frac{1}{2}} = 5^{3/2}$.

Тоді у відповідності з теоремою 1 отримуємо

$$\begin{aligned} 5^{4x+2} = 5^{3/2} &\iff 4x+2 = \frac{3}{2} \iff 4x = -\frac{1}{2} \iff \\ &\iff x = -\frac{1}{8} = -0,125. \end{aligned}$$

Відповідь: $x = -0,125$.

Теорема про показникові вирази

Справедливі також наступні теореми.

Теорема 2. Якщо $a > 1$, то

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \iff f(x) < g(x);$$

$$a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \iff f(x) \leq g(x).$$

Теорема 3. Якщо $0 < a < 1$, то

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \iff f(x) > g(x);$$

$$a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \iff f(x) \geq g(x).$$

В теоремі 2 враховується той факт, що показникова функція з основою $a > 1$ є зростаючою функцією, а в теоремі 3 — той факт, що показникова функція з основою $0 < a < 1$ є спадною функцією.

Теорема про показникові вирази

Справедливі також наступні теореми.

Теорема 2. Якщо $a > 1$, то

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \iff f(x) < g(x);$$

$$a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \iff f(x) \leq g(x).$$

Теорема 3. Якщо $0 < a < 1$, то

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \iff f(x) > g(x);$$

$$a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \iff f(x) \geq g(x).$$

В теоремі 2 враховується той факт, що показникова функція з основою $a > 1$ є зростаючою функцією, а в теоремі 3 — той факт, що показникова функція з основою $0 < a < 1$ є спадною функцією.

Теорема про показникові вирази

Справедливі також наступні теореми.

Теорема 2. Якщо $a > 1$, то

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \iff f(x) < g(x);$$

$$a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \iff f(x) \leq g(x).$$

Теорема 3. Якщо $0 < a < 1$, то

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \iff f(x) > g(x);$$

$$a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \iff f(x) \geq g(x).$$

В теоремі 2 враховується той факт, що показникова функція з основою $a > 1$ є зростаючою функцією, а в теоремі 3 — той факт, що показникова функція з основою $0 < a < 1$ є спадною функцією.

Теорема про показникові вирази

Справедливі також наступні теореми.

Теорема 2. Якщо $a > 1$, то

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \iff f(x) < g(x);$$

$$a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \iff f(x) \leq g(x).$$

Теорема 3. Якщо $0 < a < 1$, то

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \iff f(x) > g(x);$$

$$a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \iff f(x) \geq g(x).$$

В теоремі 2 враховується той факт, що показникова функція з основою $a > 1$ є зростаючою функцією, а в теоремі 3 — той факт, що показникова функція з основою $0 < a < 1$ є спадною функцією.

Теорема про показникові вирази

Справедливі також наступні теореми.

Теорема 2. Якщо $a > 1$, то

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \iff f(x) < g(x);$$

$$a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \iff f(x) \leq g(x).$$

Теорема 3. Якщо $0 < a < 1$, то

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \iff f(x) > g(x);$$

$$a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \iff f(x) \geq g(x).$$

В теоремі 2 враховується той факт, що показникова функція з основою $a > 1$ є зростаючою функцією, а в теоремі 3 — той факт, що показникова функція з основою $0 < a < 1$ є спадною функцією.

Теореми про показникові вирази

Справедливі також наступні теореми.

Теорема 2. Якщо $a > 1$, то

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \iff f(x) < g(x);$$

$$a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \iff f(x) \leq g(x).$$

Теорема 3. Якщо $0 < a < 1$, то

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \iff f(x) > g(x);$$

$$a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \iff f(x) \geq g(x).$$

В теоремі 2 враховується той факт, що показникова функція з основою $a > 1$ є зростаючою функцією, а в теоремі 3 — той факт, що показникова функція з основою $0 < a < 1$ є спадною функцією.

Теореми про показникові вирази

Приклад 5. Розв'язати нерівність

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-1} < \left(\frac{1}{125}\right)^x.$$

Розв'язання. Записавши праву частину нерівності у вигляді степеня числа $1/5$, перепишемо нерівність у вигляді:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-1} < \left(\frac{1}{5}\right)^{3x}.$$

У відповідності з теоремою 3 при $a = 1/5$ маємо

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{f(x)} < \left(\frac{1}{5}\right)^{g(x)} \iff f(x) > g(x).$$

Отже,

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-1} < \left(\frac{1}{5}\right)^{3x} \iff 4x-1 > 3x \iff x > 1.$$

Відповідь: $x \in (1, \infty)$.

Теореми про показникові вирази

Приклад 5. Розв'язати нерівність

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-1} < \left(\frac{1}{125}\right)^x.$$

Розв'язання. Записавши праву частину нерівності у вигляді степеня числа $1/5$, перепишемо нерівність у вигляді:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-1} < \left(\frac{1}{5}\right)^{3x}.$$

У відповідності з теоремою 3 при $a = 1/5$ маємо

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{f(x)} < \left(\frac{1}{5}\right)^{g(x)} \iff f(x) > g(x).$$

Отже,

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-1} < \left(\frac{1}{5}\right)^{3x} \iff 4x-1 > 3x \iff x > 1.$$

Відповідь: $x \in (1, \infty)$.

Теореми про показникові вирази

Приклад 5. Розв'язати нерівність

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-1} < \left(\frac{1}{125}\right)^x.$$

Розв'язання. Записавши праву частину нерівності у вигляді степеня числа $1/5$, перепишемо нерівність у вигляді:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-1} < \left(\frac{1}{5}\right)^{3x}.$$

У відповідності з теоремою 3 при $a = 1/5$ маємо

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{f(x)} < \left(\frac{1}{5}\right)^{g(x)} \iff f(x) > g(x).$$

Отже,

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-1} < \left(\frac{1}{5}\right)^{3x} \iff 4x-1 > 3x \iff x > 1.$$

Відповідь: $x \in (1, \infty)$.

Теореми про показникові вирази

Приклад 5. Розв'язати нерівність

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-1} < \left(\frac{1}{125}\right)^x.$$

Розв'язання. Записавши праву частину нерівності у вигляді степеня числа $1/5$, перепишемо нерівність у вигляді:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-1} < \left(\frac{1}{5}\right)^{3x}.$$

У відповідності з теоремою 3 при $a = 1/5$ маємо

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{f(x)} < \left(\frac{1}{5}\right)^{g(x)} \iff f(x) > g(x).$$

Отже,

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-1} < \left(\frac{1}{5}\right)^{3x} \iff 4x-1 > 3x \iff x > 1.$$

Відповідь: $x \in (1, \infty)$.

Теорема про показникові вирази

Приклад 5. Розв'язати нерівність

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-1} < \left(\frac{1}{125}\right)^x.$$

Розв'язання. Записавши праву частину нерівності у вигляді степеня числа $1/5$, перепишемо нерівність у вигляді:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-1} < \left(\frac{1}{5}\right)^{3x}.$$

У відповідності з теоремою 3 при $a = 1/5$ маємо

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{f(x)} < \left(\frac{1}{5}\right)^{g(x)} \iff f(x) > g(x).$$

Отже,

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-1} < \left(\frac{1}{5}\right)^{3x} \iff 4x-1 > 3x \iff x > 1.$$

Відповідь: $x \in (1, \infty)$.

Теореми про показникові вирази

Приклад 5. Розв'язати нерівність

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-1} < \left(\frac{1}{125}\right)^x.$$

Розв'язання. Записавши праву частину нерівності у вигляді степеня числа $1/5$, перепишемо нерівність у вигляді:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-1} < \left(\frac{1}{5}\right)^{3x}.$$

У відповідності з теоремою 3 при $a = 1/5$ маємо

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{f(x)} < \left(\frac{1}{5}\right)^{g(x)} \iff f(x) > g(x).$$

Отже,

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-1} < \left(\frac{1}{5}\right)^{3x} \iff 4x-1 > 3x \iff x > 1.$$

Відповідь: $x \in (1, \infty)$.

Степенево-показникові вирази

Відзначимо, що значення виразу $\varphi(x)^{f(x)}$ є дійсним числом, якщо:

- $\varphi(x) > 0$ і $x \in D(f)$;
- $\varphi(x) = 0$ і $f(x) > 0$;
- $\varphi(x) < 0$ і або $f(x) = 0$,

або $f(x)$ – нескоротний дріб з непарним знаменником, а саме: $f(x) = \frac{m}{2n-1}$, де $m \in \mathbb{Z} : m \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ і найбільший спільний дільник чисел $|m|$ і $2n-1$ дорівнює 1.

Наприклад, рівняння $x^{-3x^2+5} = x^{2-8x}$ має п'ять коренів: $-1; 0; 1; -\frac{1}{3}; 3$.

- Проте, в шкільному курсі математики вирази $\varphi(x)^{f(x)}$ розглядаються, як правило, тільки при $\varphi(x) > 0$.

Степенево-показникові вирази

Відзначимо, що значення виразу $\varphi(x)^{f(x)}$ є дійсним числом, якщо:

- $\varphi(x) > 0$ і $x \in D(f)$;
- $\varphi(x) = 0$ і $f(x) > 0$;
- $\varphi(x) < 0$ і або $f(x) = 0$,

або $f(x)$ – нескоротний дріб з непарним знаменником, а саме: $f(x) = \frac{m}{2n-1}$, де $m \in \mathbb{Z} : m \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ і найбільший спільний дільник чисел $|m|$ і $2n-1$ дорівнює 1.

Наприклад, рівняння $x^{-3x^2+5} = x^{2-8x}$ має п'ять коренів: $-1; 0; 1; -\frac{1}{3}; 3$.

- Проте, в шкільному курсі математики вирази $\varphi(x)^{f(x)}$ розглядаються, як правило, тільки при $\varphi(x) > 0$.

Степенево-показникові вирази

Відзначимо, що значення виразу $\varphi(x)^{f(x)}$ є дійсним числом, якщо:

- $\varphi(x) > 0$ і $x \in D(f)$;
- $\varphi(x) = 0$ і $f(x) > 0$;
- $\varphi(x) < 0$ і або $f(x) = 0$,

або $f(x)$ – нескоротний дріб з непарним знаменником, а саме: $f(x) = \frac{m}{2n-1}$, де $m \in \mathbf{Z} : m \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$ і найбільший спільний дільник чисел $|m|$ і $2n-1$ дорівнює 1.

Наприклад, рівняння $x^{-3x^2+5} = x^{2-8x}$ має п'ять коренів: $-1; 0; 1; -\frac{1}{3}; 3$.

- Проте, в шкільному курсі математики вирази $\varphi(x)^{f(x)}$ розглядаються, як правило, тільки при $\varphi(x) > 0$.

Степенево-показникові вирази

Відзначимо, що значення виразу $\varphi(x)^{f(x)}$ є дійсним числом, якщо:

- $\varphi(x) > 0$ і $x \in D(f)$;
- $\varphi(x) = 0$ і $f(x) > 0$;
- $\varphi(x) < 0$ і або $f(x) = 0$,

або $f(x)$ – нескоротний дріб з непарним знаменником, а саме: $f(x) = \frac{m}{2n-1}$, де $m \in \mathbf{Z} : m \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$ і найбільший спільний дільник чисел $|m|$ і $2n-1$ дорівнює 1.

Наприклад, рівняння $x^{-3x^2+5} = x^{2-8x}$ має п'ять коренів: $-1; 0; 1; -\frac{1}{3}; 3$.

- Проте, в шкільному курсі математики вирази $\varphi(x)^{f(x)}$ розглядаються, як правило, тільки при $\varphi(x) > 0$.

Степенево-показникові вирази

Відзначимо, що значення виразу $\varphi(x)^{f(x)}$ є дійсним числом, якщо:

- $\varphi(x) > 0$ і $x \in D(f)$;
- $\varphi(x) = 0$ і $f(x) > 0$;
- $\varphi(x) < 0$ і або $f(x) = 0$,

або $f(x)$ – нескоротний дріб з непарним знаменником, а саме: $f(x) = \frac{m}{2n-1}$, де $m \in \mathbf{Z} : m \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$ і найбільший спільний дільник чисел $|m|$ і $2n-1$ дорівнює 1.

Наприклад, рівняння $x^{-3x^2+5} = x^{2-8x}$ має п'ять коренів: $-1; 0; 1; -\frac{1}{3}; 3$.

- Проте, в шкільному курсі математики вирази $\varphi(x)^{f(x)}$ розглядаються, як правило, тільки при $\varphi(x) > 0$.

Теорема про степеневі-показникові вирази

Іноколи вирази вигляду $\varphi(x)^{f(x)}$ необхідно розглянути при $\varphi(x) \geq 0$ (як правило, це додатково оговорюється в умові завдань).

Сформулюємо наступні теореми про степеневі-показникові вирази $\varphi(x)^{f(x)}$ при $\varphi(x) \geq 0$.

Теорема 1. Якщо $\varphi(x) \geq 0$, то

$$\varphi(x)^{f(x)} = \varphi(x)^{g(x)} \iff \begin{cases} \varphi(x) = 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ \varphi(x) = 1, \\ x \in D(f) \cap D(g), \\ \varphi(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Твердження теореми 1 випливає з того, що $0^{f(x)} = 0$ при $f(x) > 0$, $1^{f(x)} = 1$ при усіх $x \in D(f)$ і функція $y = a^t$ при $a > 0$, $a \neq 1$, приймає кожне своє значення рівно один раз.

Теорема про степеневі-показникові вирази

Іноколи вирази вигляду $\varphi(x)^{f(x)}$ необхідно розглянути при $\varphi(x) \geq 0$ (як правило, це додатково оговорюється в умові завдань).

Сформулюємо наступні **теорема про степеневі-показникові вирази** $\varphi(x)^{f(x)}$ при $\varphi(x) \geq 0$.

Теорема 1. Якщо $\varphi(x) \geq 0$, то

$$\varphi(x)^{f(x)} = \varphi(x)^{g(x)} \iff \begin{cases} \varphi(x) = 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ \varphi(x) = 1, \\ x \in D(f) \cap D(g), \\ \varphi(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Твердження теореми 1 випливає з того, що $0^{f(x)} = 0$ при $f(x) > 0$, $1^{f(x)} = 1$ при усіх $x \in D(f)$ і функція $y = a^t$ при $a > 0$, $a \neq 1$, приймає кожне своє значення рівно один раз.

Теореми про степеневі-показникові вирази

Іноколи вирази вигляду $\varphi(x)^{f(x)}$ необхідно розглянути при $\varphi(x) \geq 0$ (як правило, це додатково оговорюється в умові завдань).

Сформулюємо наступні **теореми про степеневі-показникові вирази** $\varphi(x)^{f(x)}$ при $\varphi(x) \geq 0$.

Теорема 1. Якщо $\varphi(x) \geq 0$, то

$$\varphi(x)^{f(x)} = \varphi(x)^{g(x)} \iff \begin{cases} \varphi(x) = 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ \varphi(x) = 1, \\ x \in D(f) \cap D(g), \\ \varphi(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Твердження теореми 1 випливає з того, що $0^{f(x)} = 0$ при $f(x) > 0$, $1^{f(x)} = 1$ при усіх $x \in D(f)$ і функція $y = a^t$ при $a > 0$, $a \neq 1$, приймає кожне своє значення рівно один раз.

Теореми про степеневі-показникові вирази

Іноколи вирази вигляду $\varphi(x)^{f(x)}$ необхідно розглянути при $\varphi(x) \geq 0$ (як правило, це додатково оговорюється в умові завдань).

Сформулюємо наступні **теореми про степеневі-показникові вирази** $\varphi(x)^{f(x)}$ при $\varphi(x) \geq 0$.

Теорема 1. Якщо $\varphi(x) \geq 0$, то

$$\varphi(x)^{f(x)} = \varphi(x)^{g(x)} \iff \begin{cases} \varphi(x) = 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ \varphi(x) = 1, \\ x \in D(f) \cap D(g), \\ \varphi(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Твердження теореми 1 випливає з того, що $0^{f(x)} = 0$ при $f(x) > 0$, $1^{f(x)} = 1$ при усіх $x \in D(f)$ і функція $y = a^t$ при $a > 0$, $a \neq 1$, приймає кожне своє значення рівно один раз.

Теореми про степенєво-показникові вирази

Приклад 6. Знайти усі дійсні корені рівняння

$$|x-2|^{x^2+2x} = |x-2|^x.$$

Розв'язання. У відповідності з наведеною теоремою 1:

$$|x-2|^{x^2+2x} = |x-2|^x \iff \begin{cases} |x-2| = 0, \\ x^2+2x > 0, \\ x > 0, \\ |x-2| = 1, \\ |x-2| > 0, \\ x^2+2x = x, \end{cases}$$

Розв'язуємо рівняння: $|x-2| = 0 \iff x = 2,$

$$|x-2| = 1 \iff x \in \{3; 1\}, \quad x^2+2x = x \iff$$

$$\iff x(x+1) = 0 \iff x \in \{0; -1\}. \quad \text{Перевіряючи їх}$$

корені безпосередньою підстановкою в нерівності відповідних систем, переконуємося в тому, що всі вони є розв'язками заданого рівняння.

Відповідь: $x \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}.$

Теореми про степенєво-показникові вирази

Приклад 6. Знайти усі дійсні корені рівняння

$$|x-2|^{x^2+2x} = |x-2|^x.$$

Розв'язання. У відповідності з наведеною теоремою 1:

$$|x-2|^{x^2+2x} = |x-2|^x \iff \begin{cases} |x-2| = 0, \\ x^2 + 2x > 0, \\ x > 0, \\ |x-2| = 1, \\ \begin{cases} |x-2| > 0, \\ x^2 + 2x = x, \end{cases} \end{cases}$$

Розв'язуємо рівняння: $|x-2| = 0 \iff x = 2,$

$$|x-2| = 1 \iff x \in \{3; 1\} \quad x^2 + 2x = x \iff$$

$$\iff x(x+1) = 0 \iff x \in \{0; -1\}. \quad \text{Перевіряючи їх}$$

корені безпосередньою підстановкою в нерівності відповідних систем, переконуємося в тому, що всі вони є розв'язками заданого рівняння.

Відповідь: $x \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}.$

Теореми про степенєво-показникові вирази

Приклад 6. Знайти усі дійсні корені рівняння

$$|x-2|^{x^2+2x} = |x-2|^x.$$

Розв'язання. У відповідності з наведеною теоремою 1:

$$|x-2|^{x^2+2x} = |x-2|^x \iff \begin{cases} |x-2| = 0, \\ x^2 + 2x > 0, \\ x > 0, \\ |x-2| = 1, \\ \begin{cases} |x-2| > 0, \\ x^2 + 2x = x, \end{cases} \end{cases}$$

Розв'язуємо рівняння: $|x-2| = 0 \iff x = 2,$

$$|x-2| = 1 \iff x \in \{3; 1\} \quad x^2 + 2x = x \iff$$

$$\iff x(x+1) = 0 \iff x \in \{0; -1\}. \quad \text{Перевіряючи їх}$$

корені безпосередньою підстановкою в нерівності відповідних систем, переконуємося в тому, що всі вони є розв'язками заданого рівняння.

Відповідь: $x \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}.$

Теореми про степенєво-показникові вирази

Приклад 6. Знайти усі дійсні корені рівняння

$$|x-2|^{x^2+2x} = |x-2|^x.$$

Розв'язання. У відповідності з наведеною теоремою 1:

$$|x-2|^{x^2+2x} = |x-2|^x \iff \begin{cases} |x-2| = 0, \\ x^2 + 2x > 0, \\ x > 0, \\ |x-2| = 1, \\ \begin{cases} |x-2| > 0, \\ x^2 + 2x = x, \end{cases} \end{cases}$$

Розв'язуємо рівняння: $|x-2| = 0 \iff x = 2,$

$$|x-2| = 1 \iff x \in \{3; 1\}, \quad x^2 + 2x = x \iff$$

$$\iff x(x+1) = 0 \iff x \in \{0; -1\}. \quad \text{Перевіряючи їх}$$

корені безпосередньою підстановкою в нерівності відповідних систем, переконуємося в тому, що всі вони є розв'язками заданого рівняння.

Відповідь: $x \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}.$

Теореми про степенєво-показникові вирази

Приклад 6. Знайти усі дійсні корені рівняння

$$|x-2|^{x^2+2x} = |x-2|^x.$$

Розв'язання. У відповідності з наведеною теоремою 1:

$$|x-2|^{x^2+2x} = |x-2|^x \iff \begin{cases} |x-2| = 0, \\ x^2 + 2x > 0, \\ x > 0, \\ |x-2| = 1, \\ \begin{cases} |x-2| > 0, \\ x^2 + 2x = x, \end{cases} \end{cases}$$

Розв'язуємо рівняння: $|x-2| = 0 \iff x = 2,$

$$|x-2| = 1 \iff x \in \{3; 1\}, \quad x^2 + 2x = x \iff$$

$$\iff x(x+1) = 0 \iff x \in \{0; -1\}. \quad \text{Перевіряючи їх}$$

корені безпосередньою підстановкою в нерівності відповідних систем, переконуємося в тому, що всі вони є розв'язками заданого рівняння.

Відповідь: $x \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}.$

Теореми про степенєво-показникові вирази

Приклад 6. Знайти усі дійсні корені рівняння

$$|x-2|^{x^2+2x} = |x-2|^x.$$

Розв'язання. У відповідності з наведеною теоремою 1:

$$|x-2|^{x^2+2x} = |x-2|^x \iff \begin{cases} |x-2| = 0, \\ x^2 + 2x > 0, \\ x > 0, \\ |x-2| = 1, \\ \begin{cases} |x-2| > 0, \\ x^2 + 2x = x, \end{cases} \end{cases}$$

Розв'язуємо рівняння: $|x-2| = 0 \iff x = 2,$

$$|x-2| = 1 \iff x \in \{3; 1\}, \quad x^2 + 2x = x \iff$$

$$\iff x(x+1) = 0 \iff x \in \{0; -1\}. \quad \text{Перевіряючи їх}$$

корені безпосередньою підстановкою в нерівності відповідних систем, переконуємося в тому, що всі вони є розв'язками заданого рівняння.

Відповідь: $x \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}.$

Теореми про степенєво-показникові вирази

Приклад 6. Знайти усі дійсні корені рівняння

$$|x-2|^{x^2+2x} = |x-2|^x.$$

Розв'язання. У відповідності з наведеною теоремою 1:

$$|x-2|^{x^2+2x} = |x-2|^x \iff \begin{cases} |x-2| = 0, \\ x^2 + 2x > 0, \\ x > 0, \\ |x-2| = 1, \\ |x-2| > 0, \\ x^2 + 2x = x, \end{cases}$$

Розв'язуємо рівняння: $|x-2| = 0 \iff x = 2,$

$$|x-2| = 1 \iff x \in \{3; 1\}, \quad x^2 + 2x = x \iff$$

$$\iff x(x+1) = 0 \iff x \in \{0; -1\}. \quad \text{Перевіряючи їх}$$

корені безпосередньою підстановкою в нерівності відповідних систем, переконуємося в тому, що всі вони є розв'язками заданого рівняння.

Відповідь: $x \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}.$

Теорема про степенєво-показникові вирази

Теорема 2. Якщо $\varphi(x) \geq 0$, то

$$\varphi(x)^{f(x)} < \varphi(x)^{g(x)} \iff \begin{cases} \varphi(x) > 1, \\ f(x) < g(x), \\ 0 < \varphi(x) < 1, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

В теоремі 2 враховується той факт, що показникова функція $y = a^t$ з основою $a > 1$ є зростаючою функцією, а з основою $0 < a < 1$ — є спадною функцією.

Теорема про степенєво-показникові вирази

Теорема 2. Якщо $\varphi(x) \geq 0$, то

$$\varphi(x)^{f(x)} < \varphi(x)^{g(x)} \iff \begin{cases} \varphi(x) > 1, \\ f(x) < g(x), \\ 0 < \varphi(x) < 1, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

В теоремі 2 враховується той факт, що показникова функція $y = a^t$ з основою $a > 1$ є зростаючою функцією, а з основою $0 < a < 1$ — є спадною функцією.

Теорема про степенєво-показникові вирази

Теорема 3. Якщо $\varphi(x) \geq 0$, то

$$\varphi(x)^{f(x)} \leq \varphi(x)^{g(x)} \iff \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) = 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) = 1, \\ x \in D(f) \cap D(g), \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) > 1, \\ f(x) \leq g(x), \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < \varphi(x) < 1, \\ f(x) \geq g(x). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

В теоремі 3, як і в розглянутій теоремі 2, враховуються випадки зростання і спадання показникової функції, а також, як і в теоремі 1, особливі випадки $\varphi(x) = 0$ і $\varphi(x) = 1$.

Теорема про степенєво-показникові вирази

Теорема 3. Якщо $\varphi(x) \geq 0$, то

$$\varphi(x)^{f(x)} \leq \varphi(x)^{g(x)} \iff \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) = 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) = 1, \\ x \in D(f) \cap D(g), \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) > 1, \\ f(x) \leq g(x), \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < \varphi(x) < 1, \\ f(x) \geq g(x). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

В теоремі 3, як і в розглянутій теоремі 2, враховуються випадки зростання і спадання показникової функції, а також, як і в теоремі 1, особливі випадки $\varphi(x) = 0$ і $\varphi(x) = 1$.

Приклади із ЗНО

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2014 р.).

Розв'яжіть рівняння: $\log_{0,4}(5x^2 - 8) = \log_{0,4}(-3x)$.

Якщо рівняння має єдиний корінь, запишіть його у відповіді. Якщо рівняння має кілька коренів, запишіть у відповіді їхню суму.

Розв'язання. Використовуючи відповідну теорему про логарифми, отримуємо

$$\begin{aligned} \log_{0,4}(5x^2 - 8) = \log_{0,4}(-3x) &\iff \begin{cases} 5x^2 - 8 = -3x, \\ -3x > 0, \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} 5x^2 + 3x - 8 = 0, \\ x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Обчислюємо дискримінант квадратного рівняння:

$D = 3^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-8) = 9 + 160 = 169$ і знаходимо його корені: $x_1 = \frac{-3-13}{10} = -1,6$ і $x_2 = \frac{-3+13}{10} = 1$. Розв'язком системи є тільки від'ємний корінь, тобто $x = -1,6$.

Відповідь: $-1,6$.

Приклади із ЗНО

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2014 р.).

Розв'яжіть рівняння: $\log_{0,4}(5x^2 - 8) = \log_{0,4}(-3x)$.

Якщо рівняння має єдиний корінь, запишіть його у відповіді. Якщо рівняння має кілька коренів, запишіть у відповіді їхню суму.

Розв'язання. Використовуючи відповідну теорему про логарифми, отримуємо

$$\begin{aligned} \log_{0,4}(5x^2 - 8) = \log_{0,4}(-3x) &\iff \begin{cases} 5x^2 - 8 = -3x, \\ -3x > 0, \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} 5x^2 + 3x - 8 = 0, \\ x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Обчислюємо дискримінант квадратного рівняння:

$D = 3^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-8) = 9 + 160 = 169$ і знаходимо його корені: $x_1 = \frac{-3-13}{10} = -1,6$ і $x_2 = \frac{-3+13}{10} = 1$. Розв'язком системи є тільки від'ємний корінь, тобто $x = -1,6$.

Відповідь: $-1,6$.

Приклади із ЗНО

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2014 р.).

Розв'яжіть рівняння: $\log_{0,4}(5x^2 - 8) = \log_{0,4}(-3x)$.

Якщо рівняння має єдиний корінь, запишіть його у відповіді. Якщо рівняння має кілька коренів, запишіть у відповіді їхню суму.

Розв'язання. Використовуючи відповідну теорему про логарифми, отримуємо

$$\begin{aligned}\log_{0,4}(5x^2 - 8) = \log_{0,4}(-3x) &\iff \begin{cases} 5x^2 - 8 = -3x, \\ -3x > 0, \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} 5x^2 + 3x - 8 = 0, \\ x < 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Обчислюємо дискримінант квадратного рівняння:

$D = 3^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-8) = 9 + 160 = 169$ і знаходимо його корені: $x_1 = \frac{-3-13}{10} = -1,6$ і $x_2 = \frac{-3+13}{10} = 1$. Розв'язком системи є тільки від'ємний корінь, тобто $x = -1,6$.

Відповідь: $-1,6$.

Приклади із ЗНО

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2014 р.).

Розв'яжіть рівняння: $\log_{0,4}(5x^2 - 8) = \log_{0,4}(-3x)$.

Якщо рівняння має єдиний корінь, запишіть його у відповіді. Якщо рівняння має кілька коренів, запишіть у відповіді їхню суму.

Розв'язання. Використовуючи відповідну теорему про логарифми, отримуємо

$$\begin{aligned} \log_{0,4}(5x^2 - 8) = \log_{0,4}(-3x) &\iff \begin{cases} 5x^2 - 8 = -3x, \\ -3x > 0, \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} 5x^2 + 3x - 8 = 0, \\ x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Обчислюємо дискримінант квадратного рівняння:

$D = 3^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-8) = 9 + 160 = 169$ і знаходимо його корені: $x_1 = \frac{-3-13}{10} = -1,6$ і $x_2 = \frac{-3+13}{10} = 1$. Розв'язком системи є тільки від'ємний корінь, тобто $x = -1,6$.

Відповідь: $-1,6$.

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2011 р.).

Якому з наведених проміжків належить корінь

рівняння: $5^{x+2} = \left(\frac{1}{125}\right)^x$:

А) $(-3; -2]$, Б) $(-2; -1]$, В) $(-1; 0]$, Г) $(0; 1]$,
Д) $(1; 3]$?

Розв'язання. Подавши праву частину рівняння у вигляді степеня числа 5, перепишемо рівняння у вигляді:

$$5^{x+2} = 5^{-3x}.$$

Оскільки функція $y = 5^t$ приймає кожне своє значення рівно один раз, то

$$5^{x+2} = 5^{-3x} \iff x+2 = -3x \iff 4x = -2 \iff x = -0,5.$$

Отже, корінь рівняння належить проміжку $(-1; 0]$.

Відповідь: В) $(-1; 0]$.

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2011 р.).

Якому з наведених проміжків належить корінь

рівняння: $5^{x+2} = \left(\frac{1}{125}\right)^x$:

А) $(-3; -2]$, Б) $(-2; -1]$, В) $(-1; 0]$, Г) $(0; 1]$,
Д) $(1; 3]$?

Розв'язання. Подавши праву частину рівняння у вигляді степеня числа 5, перепишемо рівняння у вигляді:

$$5^{x+2} = 5^{-3x}.$$

Оскільки функція $y = 5^t$ приймає кожне своє значення рівно один раз, то

$$5^{x+2} = 5^{-3x} \iff x+2 = -3x \iff 4x = -2 \iff x = -0,5.$$

Отже, корінь рівняння належить проміжку $(-1; 0]$.

Відповідь: В) $(-1; 0]$.

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2011 р.).

Якому з наведених проміжків належить корінь

рівняння: $5^{x+2} = \left(\frac{1}{125}\right)^x$:

А) $(-3; -2]$, Б) $(-2; -1]$, В) $(-1; 0]$, Г) $(0; 1]$,
Д) $(1; 3]$?

Розв'язання. Подавши праву частину рівняння у вигляді степеня числа 5, перепишемо рівняння у вигляді:

$$5^{x+2} = 5^{-3x}.$$

Оскільки функція $y = 5^t$ приймає кожне своє значення рівно один раз, то

$$5^{x+2} = 5^{-3x} \iff x+2 = -3x \iff 4x = -2 \iff x = -0,5.$$

Отже, корінь рівняння належить проміжку $(-1; 0]$.

Відповідь: В) $(-1; 0]$.

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2011 р.).

Якому з наведених проміжків належить корінь

рівняння: $5^{x+2} = \left(\frac{1}{125}\right)^x$:

А) $(-3; -2]$, Б) $(-2; -1]$, В) $(-1; 0]$, Г) $(0; 1]$,
Д) $(1; 3]$?

Розв'язання. Подавши праву частину рівняння у вигляді степеня числа 5, перепишемо рівняння у вигляді:

$$5^{x+2} = 5^{-3x}.$$

Оскільки функція $y = 5^t$ приймає кожне своє значення рівно один раз, то

$$5^{x+2} = 5^{-3x} \iff x+2 = -3x \iff 4x = -2 \iff x = -0,5.$$

Отже, корінь рівняння належить проміжку $(-1; 0]$.

Відповідь: В) $(-1; 0]$.

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2011 р.).

Якому з наведених проміжків належить корінь

рівняння: $5^{x+2} = \left(\frac{1}{125}\right)^x$:

А) $(-3; -2]$, Б) $(-2; -1]$, В) $(-1; 0]$, Г) $(0; 1]$,
Д) $(1; 3]$?

Розв'язання. Подавши праву частину рівняння у вигляді степеня числа 5, перепишемо рівняння у вигляді:

$$5^{x+2} = 5^{-3x}.$$

Оскільки функція $y = 5^t$ приймає кожне своє значення рівно один раз, то

$$5^{x+2} = 5^{-3x} \iff x+2 = -3x \iff 4x = -2 \iff x = -0,5.$$

Отже, корінь рівняння належить проміжку $(-1; 0]$.

Відповідь: В) $(-1; 0]$.

Приклади із ЗНО

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.).

Розв'яжіть нерівність: $\log_{0,4} x \geq \log_{0,4} 2$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою

$$\log_{0,4} f(x) \leq \log_{0,4} g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

отримуємо

$$\log_{0,4} x \geq \log_{0,4} 2 \iff \log_{0,4} 2 \leq \log_{0,4} x \iff \begin{cases} 2 \geq x, \\ x > 0, \end{cases} \iff$$

$$\iff 0 < x \leq 2 \iff x \in (0; 2].$$

Відповідь: $x \in (0; 2]$.

Приклади із ЗНО

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.).

Розв'яжіть нерівність: $\log_{0,4} x \geq \log_{0,4} 2$.

Розв'язання. У відповідності з **теоремою**

$$\log_{0,4} f(x) \leq \log_{0,4} g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

отримуємо

$$\log_{0,4} x \geq \log_{0,4} 2 \iff \log_{0,4} 2 \leq \log_{0,4} x \iff \begin{cases} 2 \geq x, \\ x > 0, \end{cases} \iff$$

$$\iff 0 < x \leq 2 \iff x \in (0; 2].$$

Відповідь: $x \in (0; 2]$.

Приклади із ЗНО

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.).

Розв'яжіть нерівність: $\log_{0,4} x \geq \log_{0,4} 2$.

Розв'язання. У відповідності з **теоремою**

$$\log_{0,4} f(x) \leq \log_{0,4} g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

отримуємо

$$\log_{0,4} x \geq \log_{0,4} 2 \iff \log_{0,4} 2 \leq \log_{0,4} x \iff \begin{cases} 2 \geq x, \\ x > 0, \end{cases} \iff$$

$$\iff 0 < x \leq 2 \iff x \in (0; 2].$$

Відповідь: $x \in (0; 2]$.

Приклади із ЗНО

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.).

Розв'яжіть нерівність: $\log_{0,4} x \geq \log_{0,4} 2$.

Розв'язання. У відповідності з **теоремою**

$$\log_{0,4} f(x) \leq \log_{0,4} g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

отримуємо

$$\log_{0,4} x \geq \log_{0,4} 2 \iff \log_{0,4} 2 \leq \log_{0,4} x \iff \begin{cases} 2 \geq x, \\ x > 0, \end{cases} \iff$$

$$\iff 0 < x \leq 2 \iff x \in (0; 2].$$

Відповідь: $x \in (0; 2]$.

Приклади із ЗНО

Приклад 10 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.).

Розв'яжіть нерівність: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} > 8^{x-5}$. У відповідь

запишіть суму всіх цілих розв'язків цієї нерівності.

Якщо нерівність має безліч цілих розв'язків, то у відповідь запишіть число 100.

Розв'язання. Подавши обидві частини нерівності у вигляді степенів числа 2, перепишемо нерівність у вигляді:

$$2^{-(x^2-x)} > 2^{3(x-5)}.$$

У відповідності з теоремою

$$2^{f(x)} < 2^{g(x)} \iff f(x) < g(x).$$

$$\text{маємо } 2^{-(x^2-x)} > 2^{3(x-5)} \iff$$

$$\iff 2^{3(x-5)} < 2^{-(x^2-x)} \iff 3(x-5) < -(x^2-x) \iff$$

$$\iff 3x - 15 + x^2 - x < 0 \iff x^2 + 2x - 15 < 0.$$

Приклади із ЗНО

Приклад 10 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.).

Розв'яжіть нерівність: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} > 8^{x-5}$. У відповідь

запишіть суму всіх цілих розв'язків цієї нерівності.

Якщо нерівність має безліч цілих розв'язків, то у відповідь запишіть число 100.

Розв'язання. Подавши обидві частини нерівності у вигляді степенів числа 2, перепишемо нерівність у вигляді:

$$2^{-(x^2-x)} > 2^{3(x-5)}.$$

У відповідності з теоремою

$$2^{f(x)} < 2^{g(x)} \iff f(x) < g(x).$$

$$\text{маємо } 2^{-(x^2-x)} > 2^{3(x-5)} \iff$$

$$\iff 2^{3(x-5)} < 2^{-(x^2-x)} \iff 3(x-5) < -(x^2-x) \iff$$

$$\iff 3x - 15 + x^2 - x < 0 \iff x^2 + 2x - 15 < 0.$$

Приклади із ЗНО

Приклад 10 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.).

Розв'яжіть нерівність: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} > 8^{x-5}$. У відповідь

запишіть суму всіх цілих розв'язків цієї нерівності.

Якщо нерівність має безліч цілих розв'язків, то у відповідь запишіть число 100.

Розв'язання. Подавши обидві частини нерівності у вигляді степенів числа 2, перепишемо нерівність у вигляді:

$$2^{-(x^2-x)} > 2^{3(x-5)}.$$

У відповідності з **теоремою**

$$2^{f(x)} < 2^{g(x)} \iff f(x) < g(x).$$

$$\text{маємо } 2^{-(x^2-x)} > 2^{3(x-5)} \iff$$

$$\iff 2^{3(x-5)} < 2^{-(x^2-x)} \iff 3(x-5) < -(x^2-x) \iff$$

$$\iff 3x - 15 + x^2 - x < 0 \iff x^2 + 2x - 15 < 0.$$

Приклади із ЗНО

Приклад 10 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.).

Розв'яжіть нерівність: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} > 8^{x-5}$. У відповідь

запишіть суму всіх цілих розв'язків цієї нерівності.

Якщо нерівність має безліч цілих розв'язків, то у відповідь запишіть число 100.

Розв'язання. Подавши обидві частини нерівності у вигляді степенів числа 2, перепишемо нерівність у вигляді:

$$2^{-(x^2-x)} > 2^{3(x-5)}.$$

У відповідності з **теоремою**

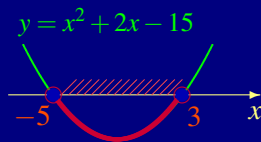
$$2^{f(x)} < 2^{g(x)} \iff f(x) < g(x).$$

$$\text{маємо } 2^{-(x^2-x)} > 2^{3(x-5)} \iff$$

$$\iff 2^{3(x-5)} < 2^{-(x^2-x)} \iff 3(x-5) < -(x^2-x) \iff$$

$$\iff 3x - 15 + x^2 - x < 0 \iff x^2 + 2x - 15 < 0.$$

Приклади із ЗНО



Розв'язуючи нерівність
 $x^2 + 2x - 15 < 0$ графічним
методом (див. мал.), знаходимо
її розв'язки: $x \in (-5; 3)$.

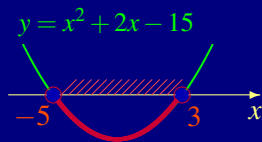
Отже, нерівність має 7 цілих розв'язків:

$-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2$, а їх сума

$$(-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 = -7.$$

Відповідь: -7 .

Приклади із ЗНО



Розв'язуючи нерівність
 $x^2 + 2x - 15 < 0$ графічним
методом (див. мал.), знаходимо
її розв'язки: $x \in (-5; 3)$.

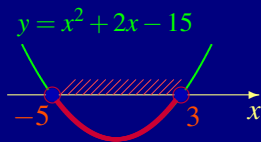
Отже, нерівність має 7 цілих розв'язків:

$-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2$, а їх сума

$$(-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 = -7.$$

Відповідь: -7 .

Приклади із ЗНО



Розв'язуючи нерівність
 $x^2 + 2x - 15 < 0$ графічним
методом (див. мал.), знаходимо
її розв'язки: $x \in (-5; 3)$.

Отже, нерівність має 7 цілих розв'язків:

$-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2$, а їх сума

$$(-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 = -7.$$

Відповідь: -7 .