

Показникові і логарифмічні нерівності

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 34 (частина перша)



Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

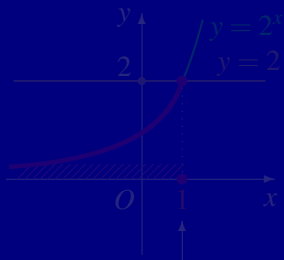
Рене Декарт, "Міркування про метод"

Найпростіші показникові і логарифмічні нерівності

Найпростіші нерівності $a^x > b$, $\log_a x < b$ і т.п., де $a > 0$, $a \neq 1$, допускають наочне розв'язання **графічним методом**.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $2^x \leq 2$.

Розв'язання. Розв'язуючи нерівність **графічним методом**, виділяємо частину кривої $y = 2^x$, розміщену



корінь рівняння $2^x = 2$

нижче прямої $y = 2$ (тобто під нею), включаючи точку перетину графіків, і проектуємо її на вісь Ox , відмічаючи штриховкою відповідний проміжок.

Множина розв'язків має вигляд $(-\infty, 1]$, де 1 – корінь рівняння $2^x = 2$ (див. мал.).

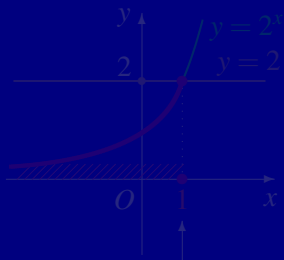
Відповідь: $x \in (-\infty, 1]$.

Найпростіші показникові і логарифмічні нерівності

Найпростіші нерівності $a^x > b$, $\log_a x < b$ і т.п., де $a > 0$, $a \neq 1$, допускають наочне розв'язання **графічним методом**.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $2^x \leq 2$.

Розв'язання. Розв'язуючи нерівність **графічним методом**, виділяємо частину кривої $y = 2^x$, розміщену



корінь рівняння $2^x = 2$

нижче прямої $y = 2$ (тобто під нею), включаючи точку перетину графіків, і проектуємо її на вісь Ox , відмічаючи штриховкою відповідний проміжок.

Множина розв'язків має вигляд $(-\infty, 1]$, де 1 – корінь рівняння $2^x = 2$ (див. мал.).

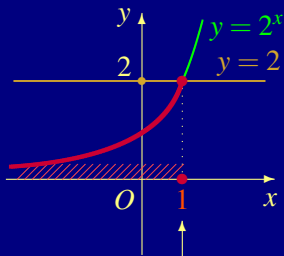
Відповідь: $x \in (-\infty, 1]$.

Найпростіші показникові і логарифмічні нерівності

Найпростіші нерівності $a^x > b$, $\log_a x < b$ і т.п., де $a > 0$, $a \neq 1$, допускають наочне розв'язання **графічним методом**.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $2^x \leq 2$.

Розв'язання. Розв'язуючи нерівність **графічним методом**, виділяємо частину кривої $y = 2^x$, розміщену



корінь рівняння $2^x = 2$

нижче прямої $y = 2$ (тобто **під** нею), включаючи точку перетину графіків, і проектуємо її на вісь Ox , відмічаючи штриховкою відповідний проміжок.

Множина розв'язків має вигляд $(-\infty, 1]$, де 1 – корінь рівняння $2^x = 2$ (див. мал.).

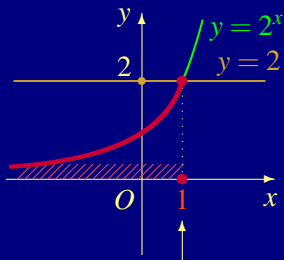
Відповідь: $x \in (-\infty, 1]$.

Найпростіші показникові і логарифмічні нерівності

Найпростіші нерівності $a^x > b$, $\log_a x < b$ і т.п., де $a > 0$, $a \neq 1$, допускають наочне розв'язання **графічним методом**.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $2^x \leq 2$.

Розв'язання. Розв'язуючи нерівність **графічним методом**, виділяємо частину кривої $y = 2^x$, розміщену



корінь рівняння $2^x = 2$

нижче прямої $y = 2$ (тобто **під** нею), включаючи точку перетину графіків, і проектуємо її на вісь Ox , відмічаючи штриховкою відповідний проміжок.

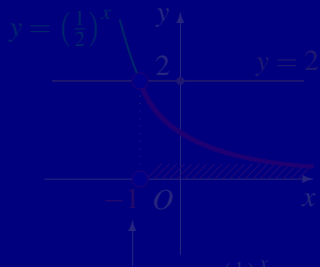
Множина розв'язків має вигляд $(-\infty, 1]$, де 1 – корінь рівняння $2^x = 2$ (див. мал.).

Відповідь: $x \in (-\infty, 1]$.

Найпростіші показникові і логарифмічні нерівності

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 2$.

Розв'язання. Розв'язуючи нерівність графічним методом, виділяємо частину кривої $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, розміщену



корінь рівняння $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2$

нижче прямої $y = 2$ (тобто під нею), і проектуємо її на вісь Ox , відмічаючи штриховкою відповідний проміжок.

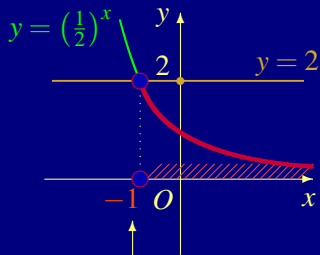
Множина розв'язків має вигляд $(-1, \infty)$, де -1 – корінь рівняння $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2$ (див. мал.).

Відповідь: $x \in (-1, \infty)$.

Найпростіші показникові і логарифмічні нерівності

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 2$.

Розв'язання. Розв'язуючи нерівність **графічним методом**, виділяємо частину кривої $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, розміщену



корінь рівняння $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2$

нижче прямої $y = 2$ (тобто **під** нею), і проектуємо її на вісь Ox , відмічаючи штриховкою відповідний проміжок.

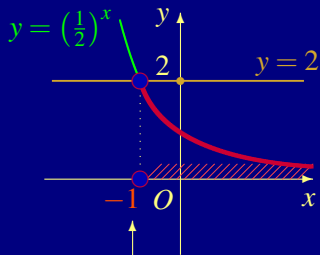
Множина розв'язків має вигляд $(-1, \infty)$, де -1 – корінь рівняння $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2$ (див. мал.).

Відповідь: $x \in (-1, \infty)$.

Найпростіші показникові і логарифмічні нерівності

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 2$.

Розв'язання. Розв'язуючи нерівність **графічним методом**, виділяємо частину кривої $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, розміщену



корінь рівняння $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2$

нижче прямої $y = 2$ (тобто **під** нею), і проектуємо її на вісь Ox , відмічаючи штриховкою відповідний проміжок.

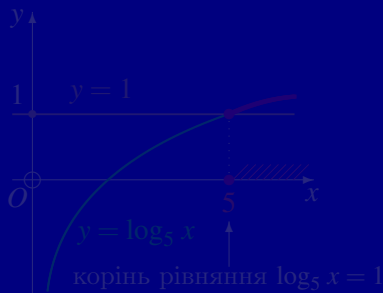
Множина розв'язків має вигляд $(-1, \infty)$, де -1 – корінь рівняння $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2$ (див. мал.).

Відповідь: $x \in (-1, \infty)$.

Найпростіші показникові і логарифмічні нерівності

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\log_5 x \geq 1$.

Розв'язання. Розв'язуючи нерівність графічним методом, виділяємо частину кривої $y = \log_5 x$, розміщену вище прямої $y = 1$ (тобто над нею), включаючи точку перетину графіків, і проектуємо її на вісь Ox , відмічаючи штриховкою відповідний проміжок.



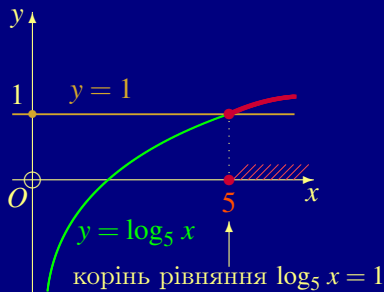
Множина розв'язків має вигляд $[5, \infty)$, де 5 – корінь рівняння $\log_5 x = 1$ (див. мал.).

Відповідь: $x \in [5, \infty)$.

Найпростіші показникові і логарифмічні нерівності

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\log_5 x \geq 1$.

Розв'язання. Розв'язуючи нерівність **графічним методом**, виділяємо частину кривої $y = \log_5 x$, розміщену **вище** прямої $y = 1$ (тобто **над** нею), включаючи точку перетину графіків, і проектуємо її на вісь Ox , відмічаючи штриховкою відповідний проміжок.



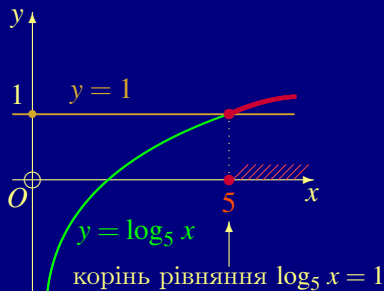
Множина розв'язків має вигляд $[5, \infty)$, де 5 – корінь рівняння $\log_5 x = 1$ (див. мал.).

Відповідь: $x \in [5, \infty)$.

Найпростіші показникові і логарифмічні нерівності

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\log_5 x \geq 1$.

Розв'язання. Розв'язуючи нерівність **графічним методом**, виділяємо частину кривої $y = \log_5 x$, розміщену **вище** прямої $y = 1$ (тобто **над** нею), включаючи точку перетину графіків, і проектуємо її на вісь Ox , відмічаючи штриховкою відповідний проміжок.

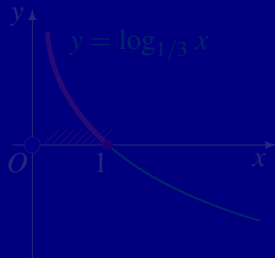


Множина розв'язків має вигляд $[5, \infty)$, де 5 – корінь рівняння $\log_5 x = 1$ (див. мал.).

Відповідь: $x \in [5, \infty)$.

Найпростіші показникові і логарифмічні нерівності

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\log_{1/3} x \geq 0$.

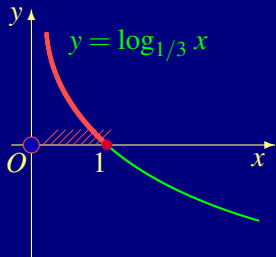


Розв'язання. Розв'язуючи нерівність графічним методом (див. мал.), отримуємо $x \in (0; 1]$.

Відповідь: $x \in (0; 1]$.

Найпростіші показникові і логарифмічні нерівності

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\log_{1/3} x \geq 0$.

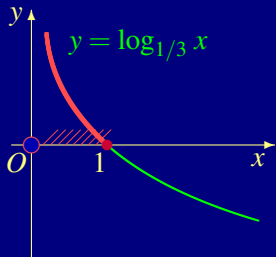


Розв'язання. Розв'язуючи нерівність **графічним методом** (див. мал.), отримуємо $x \in (0; 1]$.

Відповідь: $x \in (0; 1]$.

Найпростіші показникові і логарифмічні нерівності

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\log_{1/3} x \geq 0$.



Розв'язання. Розв'язуючи нерівність **графічним методом** (див. мал.), отримуємо $x \in (0; 1]$.

Відповідь: $x \in (0; 1]$.

Розв'язання показникових і логарифмічних нерівностей методом заміни змінних

Нерівності виду $a^{f(x)} > b$, $\log_a f(x) < b$ і т.п., де $a > 0$, $a \neq 1$, **заміною змінних** $t = f(x)$ зводяться до найпростіших.

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\log_{1/3} \frac{4-x}{x+3} \geq 0$.

Розв'язання. Виконуючи **заміну змінних** $t = \frac{4-x}{x+3}$, отримуємо нерівність $\log_{1/3} t \geq 0$, яку розглянуто в попередньому прикладі. Отже,

$$\log_{1/3} t \geq 0 \iff t \in (0; 1] \iff 0 < \frac{4-x}{x+3} \leq 1 \iff$$

$$\iff \begin{cases} \frac{4-x}{x+3} > 0, \\ \frac{4-x}{x+3} \leq 1. \end{cases}$$

Після очевидних перетворень розв'язуємо кожну нерівність системи методом інтервалів.

Розв'язання показникових і логарифмічних нерівностей методом заміни змінних

Нерівності виду $a^{f(x)} > b$, $\log_a f(x) < b$ і т.п., де $a > 0$, $a \neq 1$, **заміною змінних** $t = f(x)$ зводяться до найпростіших.

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\log_{1/3} \frac{4-x}{x+3} \geq 0$.

Розв'язання. Виконуючи **заміну змінних** $t = \frac{4-x}{x+3}$, отримуємо нерівність $\log_{1/3} t \geq 0$, яку розглянуто в попередньому прикладі. Отже,

$$\log_{1/3} t \geq 0 \iff t \in (0; 1] \iff 0 < \frac{4-x}{x+3} \leq 1 \iff$$

$$\iff \begin{cases} \frac{4-x}{x+3} > 0, \\ \frac{4-x}{x+3} \leq 1. \end{cases}$$

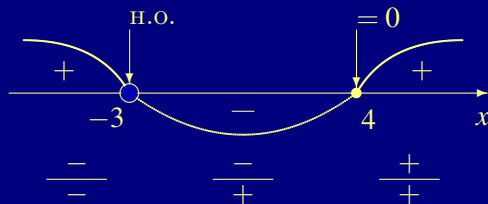
Після очевидних перетворень розв'язуємо кожну нерівність системи **методом інтервалів**.

Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

$$\frac{4-x}{x+3} > 0 \iff \frac{x-4}{x+3} < 0.$$

Крива знаків функції $y = \frac{x-4}{x+3}$ зображена на мал.:

$$y = \frac{x-4}{x+3}$$



Отже, $\frac{x-4}{x+3} < 0 \iff x \in (-3; 4).$

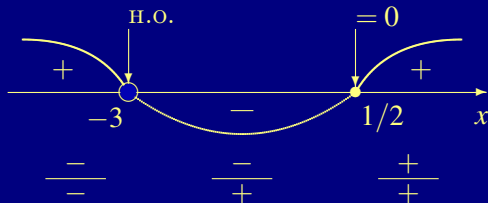
Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

Аналогічно розв'язуємо другу нерівність системи:

$$\frac{4-x}{x+3} \leq 1 \iff \frac{4-x}{x+3} - 1 \leq 0 \iff \frac{1-2x}{x+3} \leq 0 \iff \frac{2x-1}{x+3} \geq 0.$$

Крива знаків функції $y = \frac{2x-1}{x+3}$ зображена на мал.:

$$y = \frac{2x-1}{x+3}$$



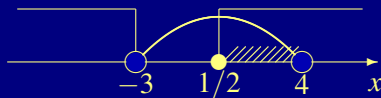
Отже, $\frac{2x-1}{x+3} \geq 0 \iff x \in (-\infty; -3) \cup [1/2; \infty)$.

Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

Отже, маємо

$$\begin{cases} \frac{4-x}{x+3} > 0, \\ \frac{4-x}{x+3} \leq 1, \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-3; 4), \\ x \in (-\infty; -3) \cup [1/2; \infty), \end{cases}$$

Нарешті, перетинаючи множини розв'язків нерівностей системи (див. мал.),



знаходимо множину розв'язків початкової логарифмічної нерівності: $x \in [1/2; 4)$.

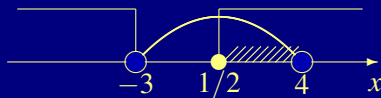
Відповідь: $x \in [1/2; 4)$.

Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

Отже, маємо

$$\begin{cases} \frac{4-x}{x+3} > 0, \\ \frac{4-x}{x+3} \leq 1, \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-3; 4), \\ x \in (-\infty; -3) \cup [1/2; \infty), \end{cases}$$

Нарешті, перетинаючи множини розв'язків нерівностей системи (див. мал.),



знаходимо множину розв'язків початкової логарифмічної нерівності: $x \in [1/2; 4)$.

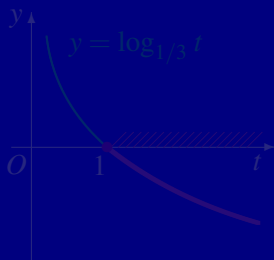
Відповідь: $x \in [1/2; 4)$.

Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

Приклад 6. Розв'язати нерівність

$$\log_{1/3} \log_5(x^2 - 4x) \leq 0.$$

Розв'язання. Виконуючи заміну змінних $t = \log_5(x^2 - 4x)$, отримуємо найпростішу логарифмічну нерівність $\log_{1/3} t \leq 0$, яку розв'язуємо графічним методом (див. мал.).



У такий спосіб отримуємо $t \in [1, \infty) \iff \log_5(x^2 - 4x) \geq 1$.
За допомогою ще однієї заміни змінних $z = x^2 - 4x$ отримуємо найпростішу нерівність $\log_5 z \geq 1$, яку розв'язано в прикладі 3.

$$\text{Тому } z \in [5, \infty) \iff x^2 - 4x \geq 5 \iff x^2 - 4x - 5 \geq 0.$$

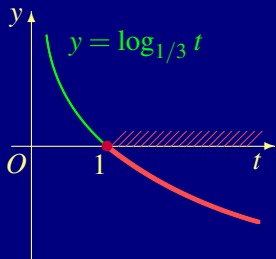
Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

Приклад 6. Розв'язати нерівність

$$\log_{1/3} \log_5(x^2 - 4x) \leq 0.$$

Розв'язання. Виконуючи **заміну змінних**

$t = \log_5(x^2 - 4x)$, отримуємо найпростішу логарифмічну нерівність $\log_{1/3} t \leq 0$, яку розв'язуємо **графічним методом** (див. мал.).



У такий спосіб отримуємо

$$t \in [1, \infty) \iff \log_5(x^2 - 4x) \geq 1.$$

За допомогою ще однієї заміни змінних $z = x^2 - 4x$ отримуємо

найпростішу нерівність

$$\log_5 z \geq 1, \text{ яку розв'язано в прикладі 3.}$$

$$\text{Тому } z \in [5, \infty) \iff x^2 - 4x \geq 5 \iff x^2 - 4x - 5 \geq 0.$$

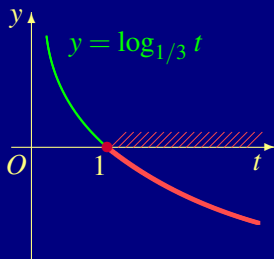
Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

Приклад 6. Розв'язати нерівність

$$\log_{1/3} \log_5(x^2 - 4x) \leq 0.$$

Розв'язання. Виконуючи **заміну змінних**

$t = \log_5(x^2 - 4x)$, отримуємо найпростішу логарифмічну нерівність $\log_{1/3} t \leq 0$, яку розв'язуємо **графічним методом** (див. мал.).



У такий спосіб отримуємо

$$t \in [1, \infty) \iff \log_5(x^2 - 4x) \geq 1.$$

За допомогою ще однієї **заміни змінних** $z = x^2 - 4x$ отримуємо

найпростішу нерівність

$$\log_5 z \geq 1, \text{ яку розв'язано в прикладі 3.}$$

$$\text{Тому } z \in [5, \infty) \iff x^2 - 4x \geq 5 \iff x^2 - 4x - 5 \geq 0.$$

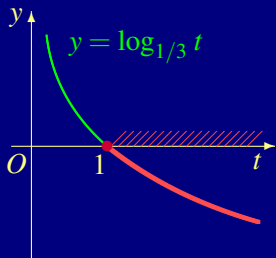
Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

Приклад 6. Розв'язати нерівність

$$\log_{1/3} \log_5(x^2 - 4x) \leq 0.$$

Розв'язання. Виконуючи **заміну змінних**

$t = \log_5(x^2 - 4x)$, отримуємо найпростішу логарифмічну нерівність $\log_{1/3} t \leq 0$, яку розв'язуємо **графічним методом** (див. мал.).



У такий спосіб отримуємо

$$t \in [1, \infty) \iff \log_5(x^2 - 4x) \geq 1.$$

За допомогою ще однієї **заміни змінних** $z = x^2 - 4x$ отримуємо

найпростішу нерівність

$$\log_5 z \geq 1, \text{ яку розв'язано в прикладі 3.}$$

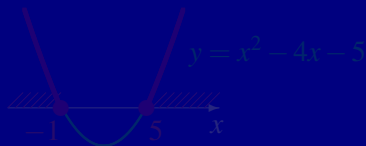
$$\text{Тому } z \in [5, \infty) \iff x^2 - 4x \geq 5 \iff x^2 - 4x - 5 \geq 0.$$

Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

Отриману квадратну нерівність $x^2 - 4x - 5 \geq 0$

розв'яжемо **графічним методом**.

Відмітимо частини параболи $y = x^2 - 4x - 5$, які лежать вище осі Ox (включаючи точки $x = -1$ і $x = 5$), і спроектуємо їх на вісь Ox :



$$x \in (-\infty, -1] \cup [5, \infty).$$

Відповідь: $x \in (-\infty, -1] \cup [5, \infty)$.

Приклад 7. Розв'язати нерівність $5^{2t} - 4 \cdot 5^t - 5 \geq 0$.

Розв'язання. Виконуючи **заміну змінних** $x = 5^t$, отримуємо квадратну нерівність $x^2 - 4x - 5 \geq 0$, розв'язану вище в попередньому прикладі. Тому маємо

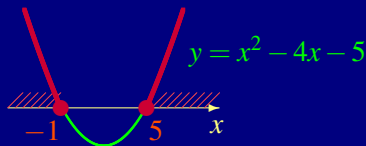
$$x^2 - 4x - 5 \geq 0 \iff x \in (-\infty, -1] \cup [5, \infty) \iff \begin{cases} 5^t \leq -1, \\ 5^t \geq 5. \end{cases}$$

Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

Отриману квадратну нерівність $x^2 - 4x - 5 \geq 0$

розв'яжемо **графічним методом**.

Відмітимо частини параболи $y = x^2 - 4x - 5$, які лежать **вище** осі Ox (включаючи точки $x = -1$ і $x = 5$), і спроекуємо їх на вісь Ox :



$$x \in (-\infty, -1] \cup [5, \infty).$$

Відповідь: $x \in (-\infty, -1] \cup [5, \infty)$.

Приклад 7. Розв'язати нерівність $5^{2t} - 4 \cdot 5^t - 5 \geq 0$.

Розв'язання. Виконуючи **заміну змінних** $x = 5^t$, отримуємо квадратну нерівність $x^2 - 4x - 5 \geq 0$, розв'язану вище в попередньому прикладі. Тому маємо

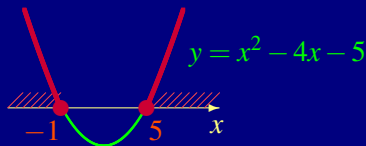
$$x^2 - 4x - 5 \geq 0 \iff x \in (-\infty, -1] \cup [5, \infty) \iff \begin{cases} 5^t \leq -1, \\ 5^t \geq 5. \end{cases}$$

Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

Отриману квадратну нерівність $x^2 - 4x - 5 \geq 0$

розв'яжемо **графічним методом**.

Відмітимо частини параболи $y = x^2 - 4x - 5$, які лежать **вище** осі Ox (включаючи точки $x = -1$ і $x = 5$), і спроекуємо їх на вісь Ox :



$$x \in (-\infty, -1] \cup [5, \infty).$$

Відповідь: $x \in (-\infty, -1] \cup [5, \infty)$.

Приклад 7. Розв'язати нерівність $5^{2t} - 4 \cdot 5^t - 5 \geq 0$.

Розв'язання. Виконуючи **заміну змінних** $x = 5^t$, отримуємо квадратну нерівність $x^2 - 4x - 5 \geq 0$, розв'язану вище в попередньому прикладі. Тому маємо

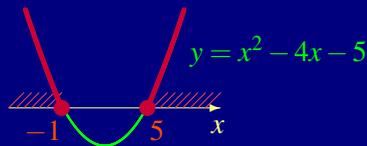
$$x^2 - 4x - 5 \geq 0 \iff x \in (-\infty, -1] \cup [5, \infty) \iff \begin{cases} 5^t \leq -1, \\ 5^t \geq 5. \end{cases}$$

Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

Отриману квадратну нерівність $x^2 - 4x - 5 \geq 0$

розв'яжемо **графічним методом**.

Відмітимо частини параболи $y = x^2 - 4x - 5$, які лежать



вище осі Ox (включаючи точки $x = -1$ і $x = 5$), і спроектуємо їх на вісь Ox :

$$x \in (-\infty, -1] \cup [5, \infty).$$

Відповідь: $x \in (-\infty, -1] \cup [5, \infty)$.

Приклад 7. Розв'язати нерівність $5^{2t} - 4 \cdot 5^t - 5 \geq 0$.

Розв'язання. Виконуючи **заміну змінних** $x = 5^t$,

отримуємо квадратну нерівність $x^2 - 4x - 5 \geq 0$,

розв'язану вище в попередньому прикладі. Тому маємо

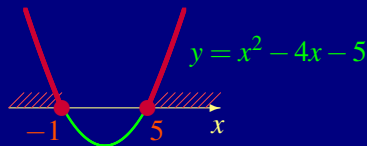
$$x^2 - 4x - 5 \geq 0 \iff x \in (-\infty, -1] \cup [5, \infty) \iff \begin{cases} 5^t \leq -1, \\ 5^t \geq 5. \end{cases}$$

Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

Отриману квадратну нерівність $x^2 - 4x - 5 \geq 0$

розв'яжемо **графічним методом**.

Відмітимо частини параболи $y = x^2 - 4x - 5$, які лежать



вище осі Ox (включаючи точки $x = -1$ і $x = 5$), і спроектуємо їх на вісь Ox :

$$x \in (-\infty, -1] \cup [5, \infty).$$

Відповідь: $x \in (-\infty, -1] \cup [5, \infty)$.

Приклад 7. Розв'язати нерівність $5^{2t} - 4 \cdot 5^t - 5 \geq 0$.

Розв'язання. Виконуючи **заміну змінних** $x = 5^t$,

отримуємо квадратну нерівність $x^2 - 4x - 5 \geq 0$,

розв'язану вище в попередньому прикладі. Тому маємо

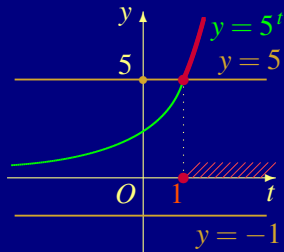
$$x^2 - 4x - 5 \geq 0 \iff x \in (-\infty, -1] \cup [5, \infty) \iff \begin{cases} 5^t \leq -1, \\ 5^t \geq 5. \end{cases}$$

Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

Розв'язуючи сукупність нерівностей

$$\begin{cases} 5^t \leq -1, \\ 5^t \geq 5 \end{cases}$$

графічним методом, знаходимо ті частини кривої $y = 5^t$, які розміщені **поза смугою**, обмеженою прямими $y = -1$ і $y = 5$. При цьому є лише частина кривої



$y = 5^t$, розміщена **над** прямою $y = 5$ (включаючи точку перетину графіків), і відсутні частини цієї кривої, розміщені **під** прямою $y = -1$, тобто нерівність $5^t \leq -1$ розв'язків не має.

Множина розв'язків має вигляд $[1, \infty)$, де 1 – корінь рівняння $5^t = 5$ (див. мал.).

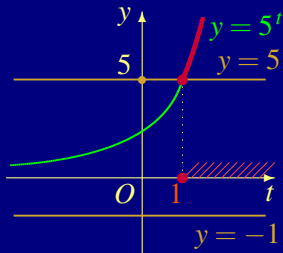
Відповідь: $t \in [1, \infty)$.

Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

Розв'язуючи сукупність нерівностей

$$\begin{cases} 5^t \leq -1, \\ 5^t \geq 5 \end{cases}$$

графічним методом, знаходимо ті частини кривої $y = 5^t$, які розміщені **поза смугою**, обмеженою прямими $y = -1$ і $y = 5$. При цьому є лише частина кривої



$y = 5^t$, розміщена **над** прямою $y = 5$ (включаючи точку перетину графіків), і відсутні частини цієї кривої, розміщені **під** прямою $y = -1$, тобто нерівність $5^t \leq -1$ розв'язків не має.

Множина розв'язків має вигляд $[1, \infty)$, де 1 – корінь рівняння $5^t = 5$ (див. мал.).

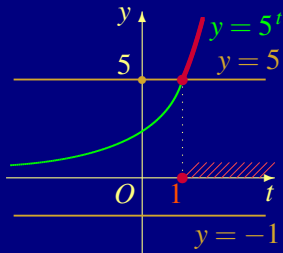
Відповідь: $t \in [1, \infty)$.

Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

Розв'язуючи сукупність нерівностей

$$\begin{cases} 5^t \leq -1, \\ 5^t \geq 5 \end{cases}$$

графічним методом, знаходимо ті частини кривої $y = 5^t$, які розміщені **поза смугою**, обмеженою прямими $y = -1$ і $y = 5$. При цьому є лише частина кривої



$y = 5^t$, розміщена **над** прямою $y = 5$ (включаючи точку перетину графіків), і відсутні частини цієї кривої, розміщені **під** прямою $y = -1$, тобто нерівність $5^t \leq -1$ розв'язків не має.

Множина розв'язків має вигляд $[1, \infty)$, де 1 – корінь рівняння $5^t = 5$ (див. мал.).

Відповідь: $t \in [1, \infty)$.

Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

Приклад 8. Розв'язати нерівність

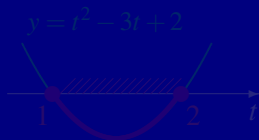
$$2 \cdot 4^x - 3 \cdot 10^x + 25^x \leq 0.$$

Розв'язання. Оскільки $4^x > 0$ при усіх $x \in \mathbf{R}$, то обидві частини нерівності можна (!) розділити на 4^x .

Отримаємо

$$\left(\frac{25}{4}\right)^x - 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x + 2 \leq 0.$$

Заміною змінних $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x$ ця нерівність зводиться до квадратної нерівності $t^2 - 3t + 2 \leq 0$, розв'язуючи яку графічним методом (див. мал.), знаходимо її розв'язки: $t \in [1; 2]$.



Після зворотної заміни $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x$ маємо подвійну нерівність

$$1 \leq \left(\frac{5}{2}\right)^x \leq 2.$$

Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

Приклад 8. Розв'язати нерівність

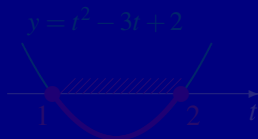
$$2 \cdot 4^x - 3 \cdot 10^x + 25^x \leq 0.$$

Розв'язання. Оскільки $4^x > 0$ при усіх $x \in \mathbf{R}$, то обидві частини нерівності можна (!) розділити на 4^x .

Отримаємо

$$\left(\frac{25}{4}\right)^x - 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x + 2 \leq 0.$$

Заміною змінних $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x$ ця нерівність зводиться до квадратної нерівності $t^2 - 3t + 2 \leq 0$, розв'язуючи яку



графічним методом (див. мал.), знаходимо її розв'язки: $t \in [1; 2]$.

Після зворотної заміни $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x$ маємо подвійну нерівність

$$1 \leq \left(\frac{5}{2}\right)^x \leq 2.$$

Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

Приклад 8. Розв'язати нерівність

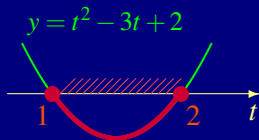
$$2 \cdot 4^x - 3 \cdot 10^x + 25^x \leq 0.$$

Розв'язання. Оскільки $4^x > 0$ при усіх $x \in \mathbf{R}$, то обидві частини нерівності можна (!) розділити на 4^x .

Отримаємо

$$\left(\frac{25}{4}\right)^x - 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x + 2 \leq 0.$$

Заміною змінних $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x$ ця нерівність зводиться до квадратної нерівності $t^2 - 3t + 2 \leq 0$, розв'язуючи яку



графічним методом (див. мал.), знаходимо її розв'язки: $t \in [1; 2]$.

Після зворотної заміни $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x$ маємо подвійну нерівність

$$1 \leq \left(\frac{5}{2}\right)^x \leq 2.$$

Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

Приклад 8. Розв'язати нерівність

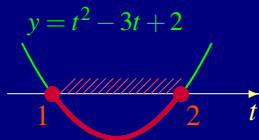
$$2 \cdot 4^x - 3 \cdot 10^x + 25^x \leq 0.$$

Розв'язання. Оскільки $4^x > 0$ при усіх $x \in \mathbf{R}$, то обидві частини нерівності можна (!) розділити на 4^x .

Отримаємо

$$\left(\frac{25}{4}\right)^x - 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x + 2 \leq 0.$$

Заміною змінних $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x$ ця нерівність зводиться до квадратної нерівності $t^2 - 3t + 2 \leq 0$, розв'язуючи яку



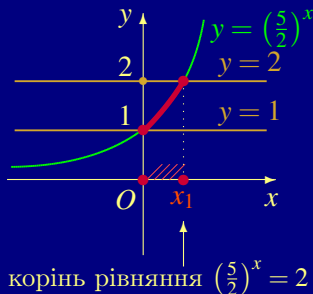
графічним методом (див. мал.), знаходимо її розв'язки: $t \in [1; 2]$.

Після зворотної заміни $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x$ маємо подвійну нерівність

$$1 \leq \left(\frac{5}{2}\right)^x \leq 2.$$

Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

Тепер, розв'язуючи подвійну нерівність $1 \leq \left(\frac{5}{2}\right)^x \leq 2$



графічним методом (див. мал.), знаходимо множину розв'язків початкової нерівності:

$x \in [0, x_1]$, де x_1 – корінь рівняння $\left(\frac{5}{2}\right)^x = 2$, тобто $x_1 = \log_{2,5} 2$. Отже, $x \in [0, \log_{2,5} 2]$.

Відповідь: $x \in [0, \log_{2,5} 2]$.

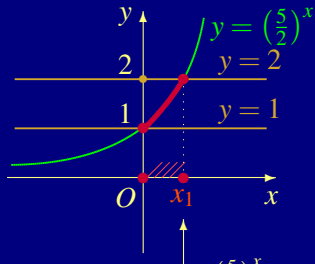
Приклад 9. Розв'язати нерівність $\log_3^2 x - 4|\log_3 x| + 3 \geq 0$.

Розв'язання. Заміною змінних $t = |\log_3 x|$ нерівність зводиться до квадратної нерівності

$$t^2 - 4t + 3 \geq 0.$$

Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

Тепер, розв'язуючи подвійну нерівність $1 \leq \left(\frac{5}{2}\right)^x \leq 2$



корінь рівняння $\left(\frac{5}{2}\right)^x = 2$

графічним методом (див. мал.), знаходимо множину розв'язків початкової нерівності:

$x \in [0, x_1]$, де x_1 – корінь рівняння $\left(\frac{5}{2}\right)^x = 2$, тобто $x_1 = \log_{2,5} 2$. Отже, $x \in [0, \log_{2,5} 2]$.

Відповідь: $x \in [0, \log_{2,5} 2]$.

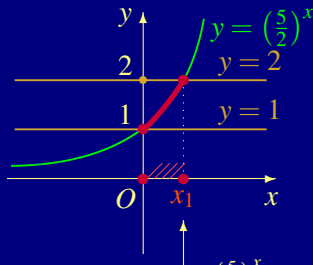
Приклад 9. Розв'язати нерівність $\log_3^2 x - 4|\log_3 x| + 3 \geq 0$.

Розв'язання. Заміною змінних $t = |\log_3 x|$ нерівність зводиться до квадратної нерівності

$$t^2 - 4t + 3 \geq 0.$$

Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

Тепер, розв'язуючи подвійну нерівність $1 \leq \left(\frac{5}{2}\right)^x \leq 2$



корінь рівняння $\left(\frac{5}{2}\right)^x = 2$

графічним методом (див. мал.), знаходимо множину розв'язків початкової нерівності:

$x \in [0, x_1]$, де x_1 – корінь рівняння $\left(\frac{5}{2}\right)^x = 2$, тобто $x_1 = \log_{2,5} 2$. Отже, $x \in [0, \log_{2,5} 2]$.

Відповідь: $x \in [0, \log_{2,5} 2]$.

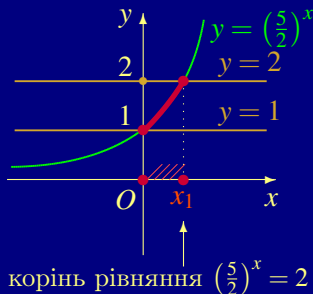
Приклад 9. Розв'язати нерівність $\log_3^2 x - 4|\log_3 x| + 3 \geq 0$.

Розв'язання. Заміною змінних $t = |\log_3 x|$ нерівність зводиться до квадратної нерівності

$$t^2 - 4t + 3 \geq 0.$$

Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

Тепер, розв'язуючи подвійну нерівність $1 \leq \left(\frac{5}{2}\right)^x \leq 2$



графічним методом (див. мал.), знаходимо множину розв'язків початкової нерівності:

$x \in [0, x_1]$, де x_1 – корінь рівняння $\left(\frac{5}{2}\right)^x = 2$, тобто $x_1 = \log_{2,5} 2$. Отже, $x \in [0, \log_{2,5} 2]$.

Відповідь: $x \in [0, \log_{2,5} 2]$.

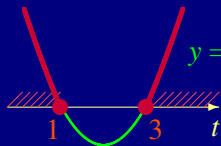
Приклад 9. Розв'язати нерівність $\log_3^2 x - 4|\log_3 x| + 3 \geq 0$.

Розв'язання. Заміною змінних $t = |\log_3 x|$ нерівність зводиться до квадратної нерівності

$$t^2 - 4t + 3 \geq 0.$$

Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

Отриману квадратну нерівність $t^2 - 4t + 3 \geq 0$ розв'я-



$$y = t^2 - 4t + 3$$

жемо графічним методом:

$t \in (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$ і після зворотної заміни $t = |\log_3 x|$

матимемо сукупність

$$\begin{cases} t = |\log_3 x| \leq 1, \\ t = |\log_3 x| \geq 3. \end{cases}$$

Далі, враховуючи відповідні теореми про модулі

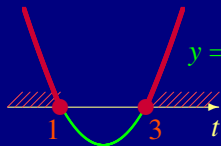
$$|f(x)| \leq g(x) \iff \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x), \end{cases} \quad |f(x)| \geq g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x), \end{cases}$$

отримуємо

$$\begin{cases} |\log_3 x| \leq 1, \\ |\log_3 x| \geq 3. \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \leq \log_3 x \leq 1, \\ \log_3 x \geq 3, \\ \log_3 x \leq -3. \end{cases}$$

Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

Отриману квадратну нерівність $t^2 - 4t + 3 \geq 0$ розв'я-



$$y = t^2 - 4t + 3$$

жемо графічним методом:

$t \in (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$ і після зворотної заміни $t = |\log_3 x|$

матимемо сукупність

$$\begin{cases} t = |\log_3 x| \leq 1, \\ t = |\log_3 x| \geq 3. \end{cases}$$

Далі, враховуючи відповідні теореми про модулі

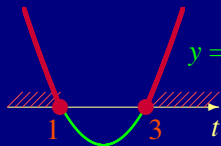
$$|f(x)| \leq g(x) \iff \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x), \end{cases} \quad |f(x)| \geq g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x), \end{cases}$$

отримуємо

$$\begin{cases} |\log_3 x| \leq 1, \\ |\log_3 x| \geq 3. \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \leq \log_3 x \leq 1, \\ \log_3 x \geq 3, \\ \log_3 x \leq -3. \end{cases}$$

Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

Отриману квадратну нерівність $t^2 - 4t + 3 \geq 0$ розв'я-



$$y = t^2 - 4t + 3$$

жемо графічним методом:

$t \in (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$ і після зворотної заміни $t = |\log_3 x|$

матимемо сукупність

$$\begin{cases} t = |\log_3 x| \leq 1, \\ t = |\log_3 x| \geq 3. \end{cases}$$

Далі, враховуючи відповідні теореми про модулі

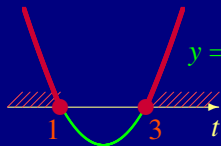
$$|f(x)| \leq g(x) \iff \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x), \end{cases} \quad |f(x)| \geq g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x), \end{cases}$$

отримуємо

$$\begin{cases} |\log_3 x| \leq 1, \\ |\log_3 x| \geq 3. \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \leq \log_3 x \leq 1, \\ \log_3 x \geq 3, \\ \log_3 x \leq -3. \end{cases}$$

Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

Отриману квадратну нерівність $t^2 - 4t + 3 \geq 0$ розв'я-



жемо графічним методом:
 $t \in (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$ і після
 зворотної заміни $t = |\log_3 x|$

матимемо сукупність

$$\begin{cases} t = |\log_3 x| \leq 1, \\ t = |\log_3 x| \geq 3. \end{cases}$$

Далі, враховуючи відповідні теореми про модулі

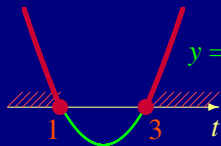
$$|f(x)| \leq g(x) \iff \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x), \end{cases} \quad |f(x)| \geq g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x), \end{cases}$$

отримуємо

$$\begin{cases} |\log_3 x| \leq 1, \\ |\log_3 x| \geq 3. \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \leq \log_3 x \leq 1, \\ \log_3 x \geq 3, \\ \log_3 x \leq -3. \end{cases}$$

Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

Отриману квадратну нерівність $t^2 - 4t + 3 \geq 0$ розв'я-



жемо графічним методом:
 $t \in (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$ і після
 зворотної заміни $t = |\log_3 x|$

матимемо сукупність

$$\begin{cases} t = |\log_3 x| \leq 1, \\ t = |\log_3 x| \geq 3. \end{cases}$$

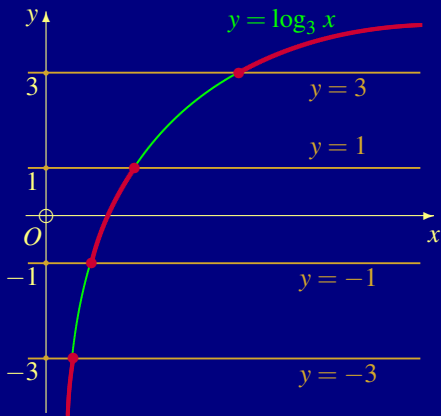
Далі, враховуючи відповідні теореми про модулі

$$|f(x)| \leq g(x) \iff \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x), \end{cases} \quad |f(x)| \geq g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x), \end{cases}$$

отримуємо

$$\begin{cases} |\log_3 x| \leq 1, \\ |\log_3 x| \geq 3. \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \leq \log_3 x \leq 1, \\ \log_3 x \geq 3, \\ \log_3 x \leq -3. \end{cases}$$

Розв'язання нерівностей методом заміни змінних



Отриману сукупність

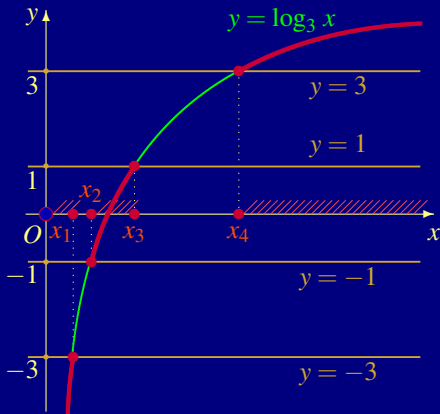
$$\begin{cases} -1 \leq \log_3 x \leq 1, \\ \log_3 x \geq 3, \\ \log_3 x \leq -3 \end{cases}$$

розв'яжемо **графічним**
методом (див. мал.).

Виділимо частини кривої $y = \log_3 x$, які розміщені або **в смузї** між прямими $y = -1$ і $y = 1$, або **над** прямою $y = 3$, або **під** прямою $y = -3$ (включаючи точки перетину кривої з усіма вказаними прямими).

Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

Спроектуємо виділені частини кривої $y = \log_3 x$ на вісь Ox (див. мал.).



Множина розв'язків

має вигляд

$(0, x_1] \cup [x_2, x_3] \cup [x_4, \infty)$, де

$x_1 = 3^{-3} = 1/27$ – корінь
рівняння $\log_3 x = -3$,

$x_2 = 3^{-1} = 1/3$ – корінь
рівняння $\log_3 x = -1$,

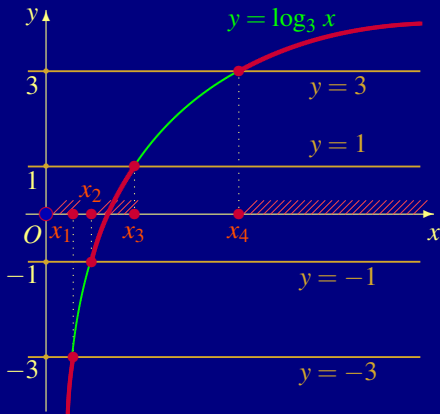
$x_3 = 3^1 = 3$ – корінь
рівняння $\log_3 x = 1$,

$x_4 = 3^3 = 27$ – корінь
рівняння $\log_3 x = 3$.

Відповідь: $x \in (0; 1/27] \cup [1/3; 3] \cup [27; \infty)$.

Розв'язання нерівностей методом заміни змінних

Спроектуємо виділені частини кривої $y = \log_3 x$ на вісь Ox (див. мал.).



Множина розв'язків

має вигляд

$(0, x_1] \cup [x_2, x_3] \cup [x_4, \infty)$, де

$x_1 = 3^{-3} = 1/27$ – корінь
рівняння $\log_3 x = -3$,

$x_2 = 3^{-1} = 1/3$ – корінь
рівняння $\log_3 x = -1$,

$x_3 = 3^1 = 3$ – корінь
рівняння $\log_3 x = 1$,

$x_4 = 3^3 = 27$ – корінь
рівняння $\log_3 x = 3$.

Відповідь: $x \in (0; 1/27] \cup [1/3; 3] \cup [27, \infty)$.

Метод інтервалів

Приклад 10. Розв'язати нерівність $\frac{4^x - 5 \cdot 2^x + 6}{x^2 + 4x - 5} \leq 0$.

Розв'язання. За допомогою заміни змінних $t = 2^x$ розкладаємо на множники чисельник дробу:

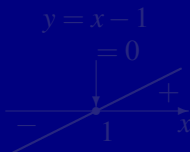
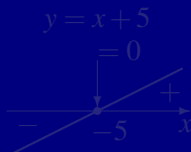
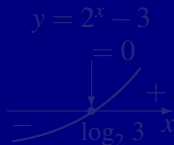
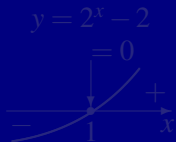
$$4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = t^2 - 5t + 6 = (t - 2)(t - 3) = (2^x - 2)(2^x - 3).$$

В результаті отримуємо

$$\frac{4^x - 5 \cdot 2^x + 6}{x^2 + 4x - 5} \leq 0 \iff \frac{(2^x - 2)(2^x - 3)}{(x + 5)(x - 1)} \leq 0.$$

Отриману нерівність розв'яжемо методом інтервалів.

Криві знаків функцій $y = 2^x - 2$, $y = 2^x - 3$, $y = x + 5$ і $y = x - 1$ зображені на мал.:



Метод інтервалів

Приклад 10. Розв'язати нерівність $\frac{4^x - 5 \cdot 2^x + 6}{x^2 + 4x - 5} \leq 0$.

Розв'язання. За допомогою заміни змінних $t = 2^x$ розкладаємо на множники чисельник дробу:

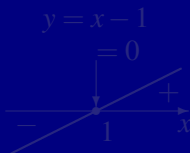
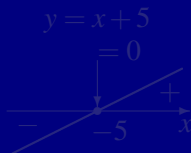
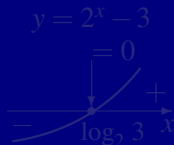
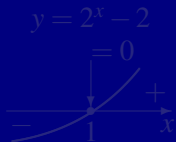
$$4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = t^2 - 5t + 6 = (t - 2)(t - 3) = (2^x - 2)(2^x - 3).$$

В результаті отримуємо

$$\frac{4^x - 5 \cdot 2^x + 6}{x^2 + 4x - 5} \leq 0 \iff \frac{(2^x - 2)(2^x - 3)}{(x + 5)(x - 1)} \leq 0.$$

Отриману нерівність розв'яжемо методом інтервалів.

Криві знаків функцій $y = 2^x - 2$, $y = 2^x - 3$, $y = x + 5$ і $y = x - 1$ зображені на мал.:



Метод інтервалів

Приклад 10. Розв'язати нерівність $\frac{4^x - 5 \cdot 2^x + 6}{x^2 + 4x - 5} \leq 0$.

Розв'язання. За допомогою заміни змінних $t = 2^x$ розкладаємо на множники чисельник дробу:

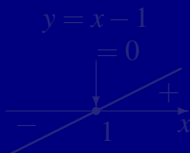
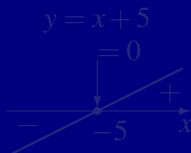
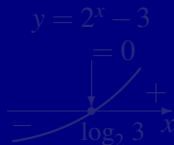
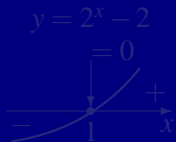
$$4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = t^2 - 5t + 6 = (t - 2)(t - 3) = (2^x - 2)(2^x - 3).$$

В результаті отримуємо

$$\frac{4^x - 5 \cdot 2^x + 6}{x^2 + 4x - 5} \leq 0 \iff \frac{(2^x - 2)(2^x - 3)}{(x + 5)(x - 1)} \leq 0.$$

Отриману нерівність розв'яжемо методом інтервалів.

Криві знаків функцій $y = 2^x - 2$, $y = 2^x - 3$, $y = x + 5$ і $y = x - 1$ зображені на мал.:



Метод інтервалів

Приклад 10. Розв'язати нерівність $\frac{4^x - 5 \cdot 2^x + 6}{x^2 + 4x - 5} \leq 0$.

Розв'язання. За допомогою **заміни змінних** $t = 2^x$ розкладаємо на множники чисельник дробу:

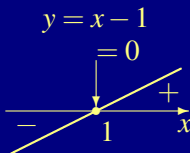
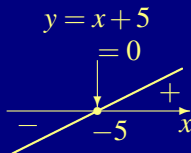
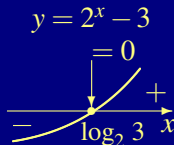
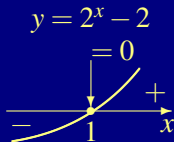
$$4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = t^2 - 5t + 6 = (t - 2)(t - 3) = (2^x - 2)(2^x - 3).$$

В результаті отримуємо

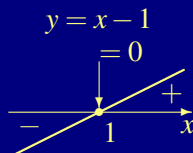
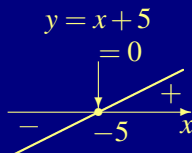
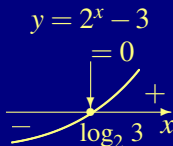
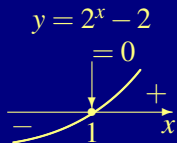
$$\frac{4^x - 5 \cdot 2^x + 6}{x^2 + 4x - 5} \leq 0 \iff \frac{(2^x - 2)(2^x - 3)}{(x + 5)(x - 1)} \leq 0.$$

Отриману нерівність розв'яжемо **методом інтервалів**.

Криві знаків функцій $y = 2^x - 2$, $y = 2^x - 3$, $y = x + 5$ і $y = x - 1$ зображені на мал.:

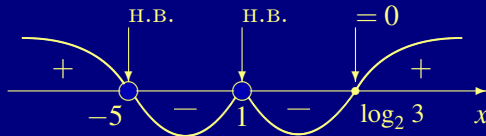


Метод інтервалів



Враховуючи їх вигляд, зобразимо криву знаків функції

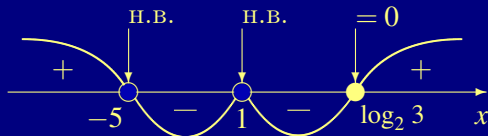
$$y = \frac{(2^x - 2)(2^x - 3)}{(x + 5)(x - 1)} :$$



$2^x - 2$	-	-	+	+
$2^x - 3$	-	-	-	+
$x + 5$	-	+	+	+
$x - 1$	-	-	+	+

Метод інтервалів

$$y = \frac{(2^x - 2)(2^x - 3)}{(x + 5)(x - 1)}$$



$2^x - 2$	-	-	+	+
$2^x - 3$	-	-	-	+
$x + 5$	-	+	+	+
$x - 1$	-	-	+	+

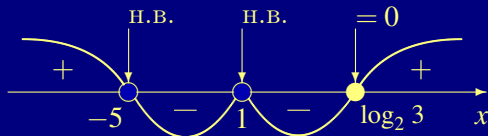
Отже,

$$\frac{(2^x - 2)(2^x - 3)}{(x + 5)(x - 1)} \leq 0 \iff x \in (-5; 1) \cup (1, \log_2 3] .$$

Відповідь: $x \in (-5; 1) \cup (1, \log_2 3] .$

Метод інтервалів

$$y = \frac{(2^x - 2)(2^x - 3)}{(x + 5)(x - 1)}$$



$2^x - 2$	-	-	+	+
$2^x - 3$	-	-	-	+
$x + 5$	-	+	+	+
$x - 1$	-	-	+	+

Отже,

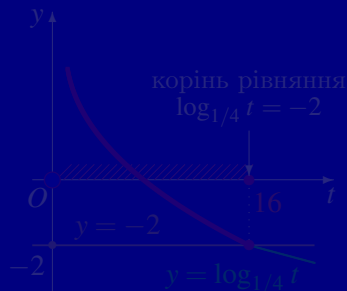
$$\frac{(2^x - 2)(2^x - 3)}{(x + 5)(x - 1)} \leq 0 \iff x \in (-5; 1) \cup (1, \log_2 3] .$$

Відповідь: $x \in (-5; 1) \cup (1, \log_2 3] .$

Приклади із ЗНО

Приклад 11 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.).
Знайдіть КІЛЬКІСТЬ усіх цілих розв'язків нерівності $\log_{1/4}(x^2 + 6x) \geq -2$. Якщо нерівність має безліч цілих розв'язків, то у відповідь запишіть число 100.

Розв'язання. Виконуючи заміну змінних $t = (x^2 + 6x)$, отримуємо найпростішу логарифмічну нерівність $\log_{1/4} t \geq -2$, яку розв'язуємо графічним методом (див. мал.).

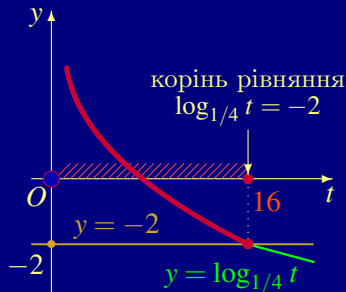


Її розв'язками є $t \in (0; 16]$, де $16 = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ – корінь рівняння $\log_{1/4} t = -2$ (див. мал.). Далі необхідно розв'язати подвійну нерівність $0 < x^2 + 6x \leq 16$.

Приклади із ЗНО

Приклад 11 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.).
Знайдіть КІЛЬКІСТЬ усіх цілих розв'язків нерівності $\log_{1/4}(x^2 + 6x) \geq -2$. Якщо нерівність має безліч цілих розв'язків, то у відповідь запишіть число 100.

Розв'язання. Виконуючи **заміну змінних** $t = (x^2 + 6x)$, отримуємо найпростішу логарифмічну нерівність $\log_{1/4} t \geq -2$, яку розв'язуємо **графічним методом** (див. мал.).



Її розв'язками є $t \in (0; 16]$, де $16 = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ – корінь рівняння $\log_{1/4} t = -2$ (див. мал.).

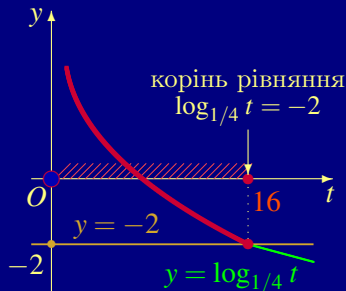
Далі необхідно розв'язати подвійну нерівність

$$0 < x^2 + 6x \leq 16.$$

Приклади із ЗНО

Приклад 11 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.).
Знайдіть КІЛЬКІСТЬ усіх цілих розв'язків нерівності $\log_{1/4}(x^2 + 6x) \geq -2$. Якщо нерівність має безліч цілих розв'язків, то у відповідь запишіть число 100.

Розв'язання. Виконуючи **заміну змінних** $t = (x^2 + 6x)$, отримуємо найпростішу логарифмічну нерівність $\log_{1/4} t \geq -2$, яку розв'язуємо **графічним методом** (див. мал.).



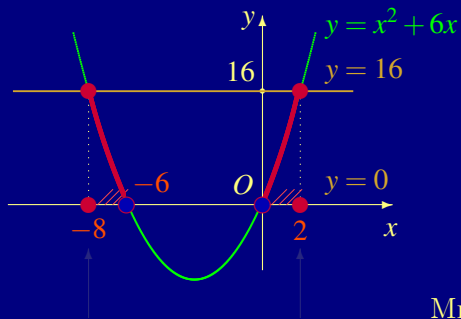
Її розв'язками є $t \in (0; 16]$, де $16 = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ – корінь рівняння $\log_{1/4} t = -2$ (див. мал.).

Далі необхідно розв'язати подвійну нерівність

$$0 < x^2 + 6x \leq 16.$$

Приклади із ЗНО

Розв'язуючи подвійну нерівність $0 < x^2 + 6x \leq 16$ графічним



корені рівняння $x^2 + 6x = 16$

методом, знаходимо ті частини параболи $y = x^2 + 6x$, які розміщені в смужі між прямими $y = 0$ і $y = 16$ (включаючи точки перетину параболи з прямою $y = 16$), а потім проектуємо їх на вісь Ox .

Множина розв'язків має вигляд

$$x \in [-8; -6) \cup (0; 2], \quad \text{де}$$

$-6; 0$ – корені рівняння $x^2 + 6x = 0$,

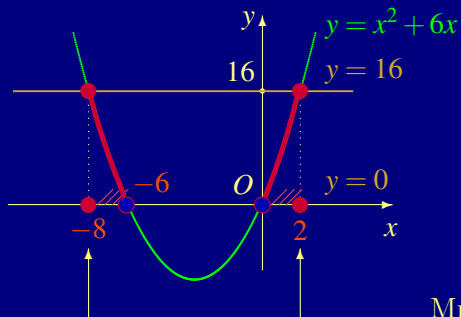
$-8; 2$ – корені рівняння $x^2 + 6x = 16$.

Отже, нерівність має 4 цілих розв'язки: $-8; -7; 1; 2$.

Відповідь: 4.

Приклади із ЗНО

Розв'язуючи подвійну нерівність $0 < x^2 + 6x \leq 16$ графічним



корені рівняння $x^2 + 6x = 16$

методом, знаходимо ті частини параболы $y = x^2 + 6x$, які розміщені в смужі між прямими $y = 0$ і $y = 16$ (включаючи точки перетину параболы з прямою $y = 16$), а потім проектуємо їх на вісь Ox .

Множина розв'язків має вигляд

$$x \in [-8; -6) \cup (0; 2], \quad \text{де}$$

$-6; 0$ – корені рівняння $x^2 + 6x = 0$,

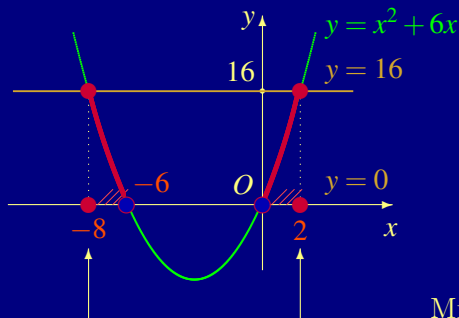
$-8; 2$ – корені рівняння $x^2 + 6x = 16$.

Отже, нерівність має 4 цілих розв'язки: $-8; -7; 1; 2$.

Відповідь: 4.

Приклади із ЗНО

Розв'язуючи подвійну нерівність $0 < x^2 + 6x \leq 16$ графічним



корені рівняння $x^2 + 6x = 16$

методом, знаходимо ті частини параболи $y = x^2 + 6x$, які розміщені в смужі між прямими $y = 0$ і $y = 16$ (включаючи точки перетину параболи з прямою $y = 16$), а потім проектуємо їх на вісь Ox .

Множина розв'язків має вигляд

$$x \in [-8; -6) \cup (0; 2], \quad \text{де}$$

$-6; 0$ – корені рівняння $x^2 + 6x = 0$,

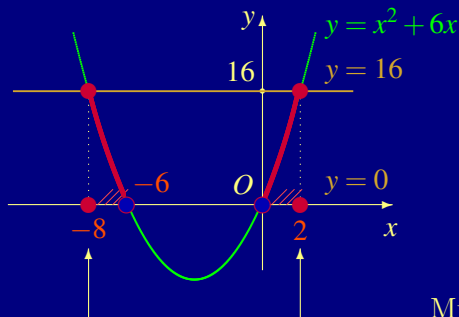
$-8; 2$ – корені рівняння $x^2 + 6x = 16$.

Отже, нерівність має 4 цілих розв'язки: $-8; -7; 1; 2$.

Відповідь: 4.

Приклади із ЗНО

Розв'язуючи подвійну нерівність $0 < x^2 + 6x \leq 16$ графічним



корені рівняння $x^2 + 6x = 16$

методом, знаходимо ті частини параболи $y = x^2 + 6x$, які розміщені в смужі між прямими $y = 0$ і $y = 16$ (включаючи точки перетину параболи з прямою $y = 16$), а потім проектуємо їх на вісь Ox .

Множина розв'язків має вигляд

$$x \in [-8; -6) \cup (0; 2], \quad \text{де}$$

$-6; 0$ – корені рівняння $x^2 + 6x = 0$,

$-8; 2$ – корені рівняння $x^2 + 6x = 16$.

Отже, нерівність має 4 цілих розв'язки: $-8; -7; 1; 2$.

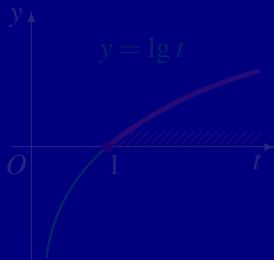
Відповідь: 4.

Приклади із ЗНО

Приклад 12 (Пробне тестування ЗНО, 2015 р.).

Розв'яжіть нерівність $\lg \frac{4}{2x-3} \geq 0$. У відповіді запишіть найбільший розв'язок цієї нерівності. Якщо найбільший розв'язок нерівності не існує, то у відповіді запишіть число 100.

Розв'язання. Виконуючи заміну змінних $t = \frac{4}{2x-3}$, отримуємо найпростішу логарифмічну нерівність $\lg t \geq 0$, яку розв'язуємо графічним методом (див. мал.).



В результаті отримуємо

$$t \in [1, \infty) \iff \frac{4}{2x-3} \geq 1 \iff$$

$$\iff \frac{4}{2x-3} - 1 \geq 0 \iff$$

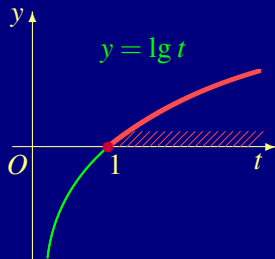
$$\iff \frac{4-(2x-3)}{2x-3} \geq 0 \iff \frac{7-2x}{2x-3} \geq 0.$$

Приклади із ЗНО

Приклад 12 (Пробне тестування ЗНО, 2015 р.).

Розв'яжіть нерівність $\lg \frac{4}{2x-3} \geq 0$. У відповіді запишіть найбільший розв'язок цієї нерівності. Якщо найбільший розв'язок нерівності не існує, то у відповіді запишіть число 100.

Розв'язання. Виконуючи заміну змінних $t = \frac{4}{2x-3}$, отримуємо найпростішу логарифмічну нерівність $\lg t \geq 0$, яку розв'язуємо графічним методом (див. мал.).



В результаті отримуємо

$$t \in [1, \infty) \iff \frac{4}{2x-3} \geq 1 \iff$$

$$\iff \frac{4}{2x-3} - 1 \geq 0 \iff$$

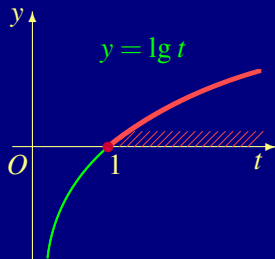
$$\iff \frac{4-(2x-3)}{2x-3} \geq 0 \iff \frac{7-2x}{2x-3} \geq 0.$$

Приклади із ЗНО

Приклад 12 (Пробне тестування ЗНО, 2015 р.).

Розв'яжіть нерівність $\lg \frac{4}{2x-3} \geq 0$. У відповіді запишіть найбільший розв'язок цієї нерівності. Якщо найбільший розв'язок нерівності не існує, то у відповіді запишіть число 100.

Розв'язання. Виконуючи заміну змінних $t = \frac{4}{2x-3}$, отримуємо найпростішу логарифмічну нерівність $\lg t \geq 0$, яку розв'язуємо графічним методом (див. мал.).



В результаті отримуємо

$$t \in [1, \infty) \iff \frac{4}{2x-3} \geq 1 \iff$$

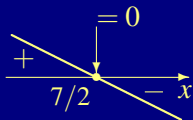
$$\iff \frac{4}{2x-3} - 1 \geq 0 \iff$$

$$\iff \frac{4-(2x-3)}{2x-3} \geq 0 \iff \frac{7-2x}{2x-3} \geq 0.$$

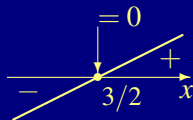
Приклади із ЗНО

Отриману нерівність $\frac{7-2x}{2x-3} \geq 0$ розв'язуємо **методом інтервалів**. Використовуючи криві знаків функцій

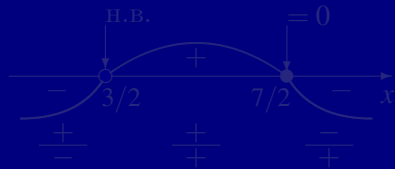
$$y = 7 - 2x$$



$$y = 2x - 3$$



зобразимо криву знаків функції $y = \frac{7-2x}{2x-3}$:



Маємо

$$\frac{7-2x}{2x-3} \geq 0 \iff x \in (3/2; 7/2].$$

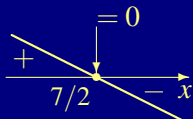
Отже, найбільший розв'язок нерівності – число $7/2 = 3,5$.

Відповідь: 3,5.

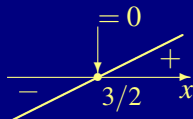
Приклади із ЗНО

Отриману нерівність $\frac{7-2x}{2x-3} \geq 0$ розв'язуємо **методом інтервалів**. Використовуючи криві знаків функцій

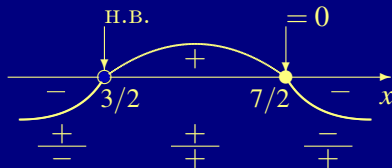
$$y = 7 - 2x$$



$$y = 2x - 3$$



зобразимо криву знаків функції $y = \frac{7-2x}{2x-3}$:



Маємо

$$\frac{7-2x}{2x-3} \geq 0 \iff x \in (3/2; 7/2].$$

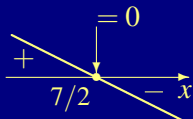
Отже, найбільший розв'язок нерівності – число $7/2 = 3,5$.

Відповідь: 3,5.

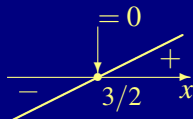
Приклади із ЗНО

Отриману нерівність $\frac{7-2x}{2x-3} \geq 0$ розв'язуємо **методом інтервалів**. Використовуючи криві знаків функцій

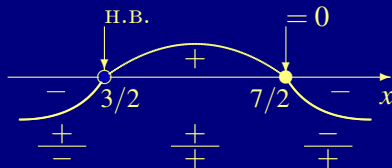
$$y = 7 - 2x$$



$$y = 2x - 3$$



зобразимо криву знаків функції $y = \frac{7-2x}{2x-3}$:



Маємо

$$\frac{7-2x}{2x-3} \geq 0 \iff x \in (3/2; 7/2].$$

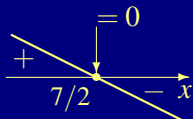
Отже, найбільший розв'язок нерівності – число $7/2 = 3,5$.

Відповідь: $3,5$.

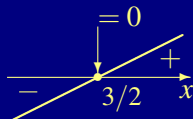
Приклади із ЗНО

Отриману нерівність $\frac{7-2x}{2x-3} \geq 0$ розв'язуємо **методом інтервалів**. Використовуючи криві знаків функцій

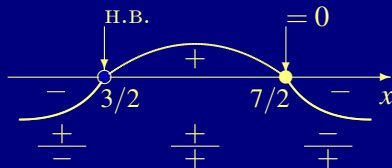
$$y = 7 - 2x$$



$$y = 2x - 3$$



зобразимо криву знаків функції $y = \frac{7-2x}{2x-3}$:



Маємо

$$\frac{7-2x}{2x-3} \geq 0 \iff x \in (3/2; 7/2].$$

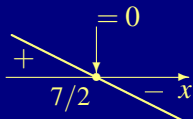
Отже, найбільший розв'язок нерівності – число $7/2 = 3,5$.

Відповідь: 3,5.

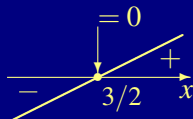
Приклади із ЗНО

Отриману нерівність $\frac{7-2x}{2x-3} \geq 0$ розв'язуємо **методом інтервалів**. Використовуючи криві знаків функцій

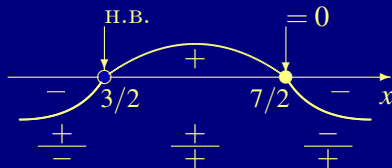
$$y = 7 - 2x$$



$$y = 2x - 3$$



зобразимо криву знаків функції $y = \frac{7-2x}{2x-3}$:



Маємо

$$\frac{7-2x}{2x-3} \geq 0 \iff x \in (3/2; 7/2].$$

Отже, найбільший розв'язок нерівності – число $7/2 = 3,5$.

Відповідь: 3,5.

Приклади із ЗНО

Приклад 13 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.).

Розв'яжіть нерівність $3 \cdot 9^x - 2 \cdot 15^x - 5^{2x+1} > 0$.

Якщо нерівність має цілі розв'язки, то вкажіть **НАЙБІЛЬШИЙ** з них. Якщо нерівність має розв'язки, але вказати найбільший цілий розв'язок неможливо, то у відповідь запишіть число 50. Якщо нерівність не має розв'язків, то у відповідь запишіть число 100.

Розв'язання. Маємо $3 \cdot 9^x - 2 \cdot 15^x - 5^{2x+1} > 0 \iff$
 $\iff 3 \cdot 9^x - 2 \cdot 15^x - 5 \cdot 25^x > 0 \iff 5 \cdot 25^x + 2 \cdot 15^x - 3 \cdot 9^x < 0$.

Оскільки $9^x > 0$ при усіх $x \in \mathbf{R}$, то після ділення обох частин нерівності на 9^x матимемо

$$5 \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x - 3 < 0.$$

Заміною змінних $t = \left(\frac{5}{3}\right)^x$ ця нерівність зводиться до квадратної нерівності $5t^2 + 2t - 3 < 0$.

Приклади із ЗНО

Приклад 13 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.).

Розв'яжіть нерівність $3 \cdot 9^x - 2 \cdot 15^x - 5^{2x+1} > 0$.

Якщо нерівність має цілі розв'язки, то вкажіть **НАЙБІЛЬШИЙ** з них. Якщо нерівність має розв'язки, але вказати найбільший цілий розв'язок неможливо, то у відповідь запишіть число 50. Якщо нерівність не має розв'язків, то у відповідь запишіть число 100.

Розв'язання. Маємо $3 \cdot 9^x - 2 \cdot 15^x - 5^{2x+1} > 0 \iff$

$$\iff 3 \cdot 9^x - 2 \cdot 15^x - 5 \cdot 25^x > 0 \iff 5 \cdot 25^x + 2 \cdot 15^x - 3 \cdot 9^x < 0.$$

Оскільки $9^x > 0$ при усіх $x \in \mathbf{R}$, то після ділення обох частин нерівності на 9^x матимемо

$$5 \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x - 3 < 0.$$

Заміною змінних $t = \left(\frac{5}{3}\right)^x$ ця нерівність зводиться до квадратної нерівності $5t^2 + 2t - 3 < 0$.

Приклади із ЗНО

Приклад 13 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.).

Розв'яжіть нерівність $3 \cdot 9^x - 2 \cdot 15^x - 5^{2x+1} > 0$.

Якщо нерівність має цілі розв'язки, то вкажіть **НАЙБІЛЬШИЙ** з них. Якщо нерівність має розв'язки, але вказати найбільший цілий розв'язок неможливо, то у відповідь запишіть число 50. Якщо нерівність не має розв'язків, то у відповідь запишіть число 100.

Розв'язання. Маємо $3 \cdot 9^x - 2 \cdot 15^x - 5^{2x+1} > 0 \iff$
 $\iff 3 \cdot 9^x - 2 \cdot 15^x - 5 \cdot 25^x > 0 \iff 5 \cdot 25^x + 2 \cdot 15^x - 3 \cdot 9^x < 0$.

Оскільки $9^x > 0$ при усіх $x \in \mathbf{R}$, то після ділення обох частин нерівності на 9^x матимемо

$$5 \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x - 3 < 0.$$

Заміною змінних $t = \left(\frac{5}{3}\right)^x$ ця нерівність зводиться до квадратної нерівності $5t^2 + 2t - 3 < 0$.

Приклади із ЗНО

Приклад 13 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.).

Розв'яжіть нерівність $3 \cdot 9^x - 2 \cdot 15^x - 5^{2x+1} > 0$.

Якщо нерівність має цілі розв'язки, то вкажіть **НАЙБІЛЬШИЙ** з них. Якщо нерівність має розв'язки, але вказати найбільший цілий розв'язок неможливо, то у відповідь запишіть число 50. Якщо нерівність не має розв'язків, то у відповідь запишіть число 100.

Розв'язання. Маємо $3 \cdot 9^x - 2 \cdot 15^x - 5^{2x+1} > 0 \iff$
 $\iff 3 \cdot 9^x - 2 \cdot 15^x - 5 \cdot 25^x > 0 \iff 5 \cdot 25^x + 2 \cdot 15^x - 3 \cdot 9^x < 0$.

Оскільки $9^x > 0$ при усіх $x \in \mathbf{R}$, то після ділення обох частин нерівності на 9^x матимемо

$$5 \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x - 3 < 0.$$

Заміною змінних $t = \left(\frac{5}{3}\right)^x$ ця нерівність зводиться до квадратної нерівності $5t^2 + 2t - 3 < 0$.

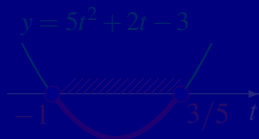
Приклади із ЗНО

Для розв'язання нерівності $5t^2 + 2t - 3 < 0$ знайдемо точки перетину параболи $y = 5t^2 + 2t - 3$ з віссю Ot , розв'язуючи квадратне рівняння $5t^2 + 2t - 3 = 0$ за формулою

$$t = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}, \quad \text{де} \quad \frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac, \quad a = 5, b = 2, c = -3$$

(оскільки $b = 2$ – парне число). Таким чином,

$$\frac{D}{4} = 1 - 5 \cdot (-3) = 16 \quad \text{і} \quad t = \frac{-1 \pm 4}{5}, \quad \text{тобто} \quad t_1 = -1, t_2 = 3/5.$$



Розв'язуючи нерівність

$5t^2 + 2t - 3 < 0$ графічним методом (див. мал.), знаходимо її розв'язки: $t \in (-1; 3/5)$.

Після зворотної заміни $t = \left(\frac{5}{3}\right)^x$ маємо подвійну нерівність

$$-1 < \left(\frac{5}{3}\right)^x < \frac{3}{5}.$$

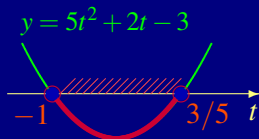
Приклади із ЗНО

Для розв'язання нерівності $5t^2 + 2t - 3 < 0$ знайдемо точки перетину параболи $y = 5t^2 + 2t - 3$ з віссю Ot , розв'язуючи квадратне рівняння $5t^2 + 2t - 3 = 0$ за формулою

$$t = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}, \quad \text{де} \quad \frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac, \quad a = 5, b = 2, c = -3$$

(оскільки $b = 2$ – парне число). Таким чином,

$$\frac{D}{4} = 1 - 5 \cdot (-3) = 16 \quad \text{і} \quad t = \frac{-1 \pm 4}{5}, \quad \text{тобто} \quad t_1 = -1, t_2 = 3/5.$$



Розв'язуючи нерівність

$5t^2 + 2t - 3 < 0$ графічним методом (див. мал.), знаходимо її розв'язки: $t \in (-1; 3/5)$.

Після зворотної заміни $t = \left(\frac{5}{3}\right)^x$ маємо подвійну нерівність

$$-1 < \left(\frac{5}{3}\right)^x < \frac{3}{5}.$$

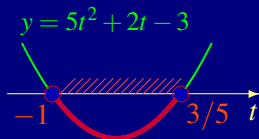
Приклади із ЗНО

Для розв'язання нерівності $5t^2 + 2t - 3 < 0$ знайдемо точки перетину параболи $y = 5t^2 + 2t - 3$ з віссю Ot , розв'язуючи квадратне рівняння $5t^2 + 2t - 3 = 0$ за формулою

$$t = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}, \quad \text{де} \quad \frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac, \quad a = 5, b = 2, c = -3$$

(оскільки $b = 2$ – парне число). Таким чином,

$$\frac{D}{4} = 1 - 5 \cdot (-3) = 16 \quad \text{і} \quad t = \frac{-1 \pm 4}{5}, \quad \text{тобто} \quad t_1 = -1, \quad t_2 = 3/5.$$



Розв'язуючи нерівність

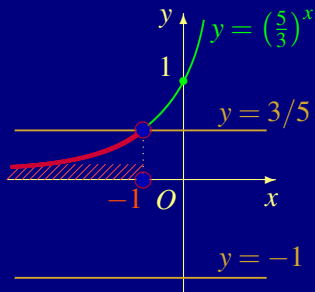
$5t^2 + 2t - 3 < 0$ графічним методом (див. мал.), знаходимо її розв'язки: $t \in (-1; 3/5)$.

Після зворотної заміни $t = \left(\frac{5}{3}\right)^x$ маємо подвійну нерівність

$$-1 < \left(\frac{5}{3}\right)^x < \frac{3}{5}.$$

Приклади із ЗНО

Тепер, розв'язуючи подвійну нерівність $-1 < \left(\frac{5}{3}\right)^x < \frac{3}{5}$ графічним методом, шукаємо частину кривої $y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$, розміщену в смужі між прямими $y = -1$ і $y = 3/5$, а потім проектуємо її на вісь Ox (див. мал.).



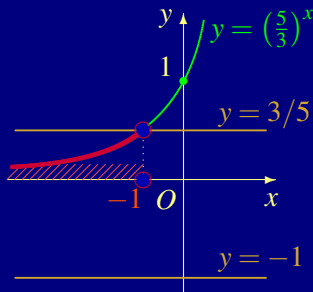
В результаті знаходимо множину розв'язків початкової нерівності:
 $x \in (-\infty, -1)$, де -1 – корінь рівняння $\left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{3}{5}$.

Отже, найбільший цілий розв'язок нерівності – це число -2 .

Відповідь: -2 .

Приклади із ЗНО

Тепер, розв'язуючи подвійну нерівність $-1 < \left(\frac{5}{3}\right)^x < \frac{3}{5}$ графічним методом, шукаємо частину кривої $y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$, розміщену в смужі між прямими $y = -1$ і $y = 3/5$, а потім проектуємо її на вісь Ox (див. мал.).



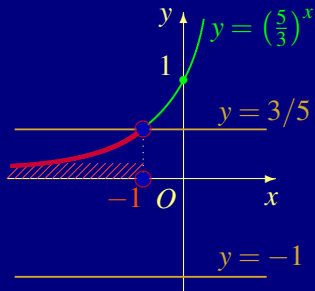
В результаті знаходимо множину розв'язків початкової нерівності:
 $x \in (-\infty, -1)$, де -1 – корінь рівняння $\left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{3}{5}$.

Отже, найбільший цілий розв'язок нерівності – це число -2 .

Відповідь: -2 .

Приклади із ЗНО

Тепер, розв'язуючи подвійну нерівність $-1 < \left(\frac{5}{3}\right)^x < \frac{3}{5}$ графічним методом, шукаємо частину кривої $y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$, розміщену в смужі між прямими $y = -1$ і $y = 3/5$, а потім проектуємо її на вісь Ox (див. мал.).



В результаті знаходимо множину розв'язків початкової нерівності:

$x \in (-\infty, -1)$, де -1 – корінь рівняння $\left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{3}{5}$.

Отже, найбільший цілий розв'язок нерівності – це число -2 .

Відповідь: -2 .

Приклади із ЗНО

Приклад 14 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2014 р.).

Розв'яжіть нерівність: $\frac{10^x - 16 \cdot 5^x}{x+2} \geq 0$. У відповіді запишіть суму всіх цілих розв'язків нерівності на проміжку $[-3; 7]$.

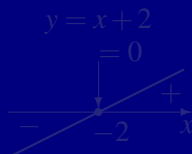
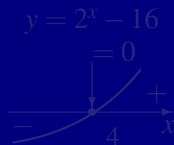
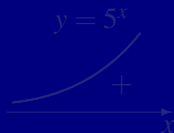
Розв'язання. У відповідності з властивостями степеня справедливі рівності $10^x = (2 \cdot 5)^x = 2^x \cdot 5^x$.

Тому після винесення спільного множника 5^x за дужки в чисельнику дробу отримаємо нерівність

$$\frac{5^x(2^x - 16)}{x+2} \geq 0,$$

яку розв'яжемо методом інтервалів.

Криві знаків функцій $y = 5^x$, $y = 2^x - 16$ і $y = x + 2$ див. на мал.:



Приклади із ЗНО

Приклад 14 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2014 р.).

Розв'яжіть нерівність: $\frac{10^x - 16 \cdot 5^x}{x+2} \geq 0$. У відповіді запишіть суму всіх цілих розв'язків нерівності на проміжку $[-3; 7]$.

Розв'язання. У відповідності з властивостями степеня справедливі рівності $10^x = (2 \cdot 5)^x = 2^x \cdot 5^x$.

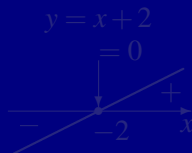
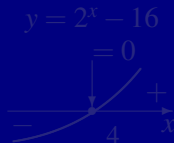
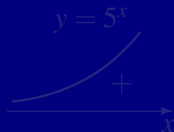
Тому після винесення спільного множника 5^x за дужки в чисельнику дробу отримаємо нерівність

$$\frac{5^x(2^x - 16)}{x+2} \geq 0,$$

яку розв'яжемо **методом інтервалів**.

Криві знаків

функцій $y = 5^x$, $y = 2^x - 16$ і $y = x + 2$ див. на мал.:



Приклади із ЗНО

Приклад 14 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2014 р.).

Розв'яжіть нерівність: $\frac{10^x - 16 \cdot 5^x}{x+2} \geq 0$. У відповіді запишіть суму всіх цілих розв'язків нерівності на проміжку $[-3; 7]$.

Розв'язання. У відповідності з властивостями степеня справедливі рівності $10^x = (2 \cdot 5)^x = 2^x \cdot 5^x$.

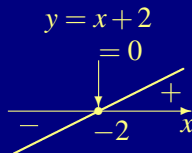
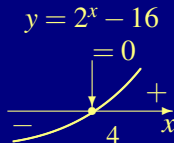
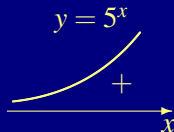
Тому після винесення спільного множника 5^x за дужки в чисельнику дробу отримаємо нерівність

$$\frac{5^x(2^x - 16)}{x+2} \geq 0,$$

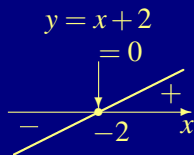
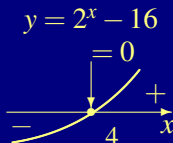
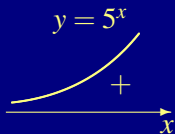
яку розв'яжемо **методом інтервалів**.

Криві знаків

функцій $y = 5^x$, $y = 2^x - 16$ і $y = x + 2$ див. на мал.:



Приклади із ЗНО



Враховуючи їх вигляд, зобразимо криву знаків функції

$$y = \frac{5^x(2^x - 16)}{x + 2} :$$



5^x	+	+	+
$2^x - 16$	-	-	+
$x + 2$	-	+	+

Приклади із ЗНО

$$y = \frac{5^x(2^x - 16)}{x + 2}$$



5^x	+	+	+
$2^x - 16$	-	-	+
$x + 2$	-	+	+

Отже,

$$\frac{5^x(2^x - 16)}{x + 2} \geq 0 \iff x \in (-\infty; -2) \cup [4, \infty).$$

Тому нерівність має 5 цілих розв'язків на відрізку $[-3; 7]$: $-3; 4; 5; 6; 7$, а їх сума $-3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 19$.

Відповідь: 19.

Приклади із ЗНО

$$y = \frac{5^x(2^x - 16)}{x + 2}$$



5^x	+	+	+
$2^x - 16$	-	-	+
$x + 2$	-	+	+

Отже,

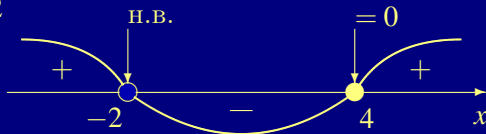
$$\frac{5^x(2^x - 16)}{x + 2} \geq 0 \iff x \in (-\infty; -2) \cup [4, \infty).$$

Тому нерівність має 5 цілих розв'язків на відрізку $[-3; 7]$: $-3; 4; 5; 6; 7$, а їх сума $-3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 19$.

Відповідь: 19.

Приклади із ЗНО

$$y = \frac{5^x(2^x - 16)}{x + 2}$$



5^x	+	+	+
$2^x - 16$	-	-	+
$x + 2$	-	+	+

Отже,

$$\frac{5^x(2^x - 16)}{x + 2} \geq 0 \iff x \in (-\infty; -2) \cup [4, \infty).$$

Тому нерівність має 5 цілих розв'язків на відрізку $[-3; 7]$: $-3; 4; 5; 6; 7$, а їх сума $-3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 19$.

Відповідь: 19.