# Показникові і логарифмічні рівняння

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 33 (частина друга)

Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

# Найпростіші показникове і логарифмічне рівняння

Рівняння $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$.

Рівняння $a^x = b$ має розв'язки тільки при $b > 0$, а саме:

1) при $b > 0$ $\quad x = \log_a b$;

2) при $b \leq 0$ рівняння розв'язків не має.

- Наприклад, $3^x = 5 \iff x = \log_3 5$;
  $3^x = 81 \iff x = \log_3 81 = 4$;
  $3^x = 0 \iff x \in \varnothing$; $\quad 3^x = -3 \iff x \in \varnothing$.

Рівняння $\log_a x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$.

Хоча логарифмічна функція $y = \log_a x$ визначена не при усіх значеннях $x$, найпростіше логарифмічне рівняння при будь-якому $b \in \mathbf{R}$ має єдиний розв'язок:
$\log_a x = b \iff x = a^b$.

- Наприклад, $\log_3 x = -4 \iff x = 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$.

# Найпростіші показникове і логарифмічне рівняння

Рівняння $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$.

Рівняння $a^x = b$ має розв'язки тільки при $b > 0$, а саме:

1) при $b > 0$ $\quad x = \log_a b$;
2) при $b \leq 0$ рівняння розв'язків не має.

- Наприклад, $3^x = 5 \iff x = \log_3 5$;
  $3^x = 81 \iff x = \log_3 81 = 4$;
  $3^x = 0 \iff x \in \varnothing$; $3^x = -3 \iff x \in \varnothing$.

Рівняння $\log_a x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$.

Хоча логарифмічна функція $y = \log_a x$ визначена не при усіх значеннях $x$, найпростіше логарифмічне рівняння при будь-якому $b \in \mathbf{R}$ має єдиний розв'язок:
$\log_a x = b \iff x = a^b$.

- Наприклад, $\log_3 x = -4 \iff x = 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$.

# Найпростіші показникове і логарифмічне рівняння

Рівняння $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$.

Рівняння $a^x = b$ має розв'язки тільки при $b > 0$, а саме:

1) при $b > 0$ $x = \log_a b$;
2) при $b \leq 0$ рівняння розв'язків не має.

- Наприклад, $3^x = 5 \iff x = \log_3 5$;
  $3^x = 81 \iff x = \log_3 81 = 4$;
  $3^x = 0 \iff x \in \varnothing$; $3^x = -3 \iff x \in \varnothing$.

Рівняння $\log_a x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$.

Хоча логарифмічна функція $y = \log_a x$ визначена не при усіх значеннях $x$, найпростіше логарифмічне рівняння при будь-якому $b \in \mathbf{R}$ має єдиний розв'язок:
$\log_a x = b \iff x = a^b$.

- Наприклад, $\log_3 x = -4 \iff x = 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$.

# Найпростіші показникове і логарифмічне рівняння

Рівняння $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$.

Рівняння $a^x = b$ має розв'язки тільки при $b > 0$, а саме:

1) при $b > 0$ $x = \log_a b$;
2) при $b \le 0$ рівняння розв'язків не має.

- Наприклад, $3^x = 5 \iff x = \log_3 5$;
  $3^x = 81 \iff x = \log_3 81 = 4$;
  $3^x = 0 \iff x \in \varnothing$; $3^x = -3 \iff x \in \varnothing$.

Рівняння $\log_a x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$.

Хоча логарифмічна функція $y = \log_a x$ визначена не при усіх значеннях $x$, найпростіше логарифмічне рівняння при будь-якому $b \in \mathbf{R}$ має єдиний розв'язок:
$\log_a x = b \iff x = a^b$.

- Наприклад, $\log_3 x = -4 \iff x = 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$.

# Найпростіші показникове і логарифмічне рівняння

Рівняння $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$.

Рівняння $a^x = b$ має розв'язки тільки при $b > 0$, а саме:

1) при $b > 0$ $x = \log_a b$;
2) при $b \le 0$ рівняння розв'язків не має.

- Наприклад, $3^x = 5 \iff x = \log_3 5$;
  $3^x = 81 \iff x = \log_3 81 = 4$;
  $3^x = 0 \iff x \in \varnothing$; $3^x = -3 \iff x \in \varnothing$.

Рівняння $\log_a x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$.

Хоча логарифмічна функція $y = \log_a x$ визначена не при усіх значеннях $x$, найпростіше логарифмічне рівняння при будь-якому $b \in \mathbf{R}$ має єдиний розв'язок:

$\log_a x = b \iff x = a^b$.

- Наприклад, $\log_3 x = -4 \iff x = 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$.

# Найпростіші показникове і логарифмічне рівняння

Рівняння $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$.

Рівняння $a^x = b$ має розв'язки тільки при $b > 0$, а саме:

1) при $b > 0$ $x = \log_a b$;
2) при $b \leq 0$ рівняння розв'язків не має.

- Наприклад, $3^x = 5 \iff x = \log_3 5$;
  $3^x = 81 \iff x = \log_3 81 = 4$;
  $3^x = 0 \iff x \in \varnothing$; $3^x = -3 \iff x \in \varnothing$.

Рівняння $\log_a x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$.

Хоча логарифмічна функція $y = \log_a x$ визначена не при усіх значеннях $x$, найпростіше логарифмічне рівняння при будь-якому $b \in \mathbf{R}$ має єдиний розв'язок:

$\log_a x = b \iff x = a^b$.

- Наприклад, $\log_3 x = -4 \iff x = 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$.

# Показникові рівняння

Розглянемо приклади розв'язання показникових рівнянь.

Приклад 1. Розв'язати рівняння
$2^{4\sqrt{x-2}+4}+4\cdot 16^{\sqrt{x-2}+1}-4^{2\sqrt{x-2}}=79$.

Розв'язання. Використовуючи властивості степеня, отримуємо

$2^4\cdot 2^{4\sqrt{x-2}}+4\cdot 16\cdot 16^{\sqrt{x-2}}-4^{2\sqrt{x-2}}=79 \iff$

$\iff 16\cdot 16^{\sqrt{x-2}}+64\cdot 16^{\sqrt{x-2}}-16^{\sqrt{x-2}}=79$.

Після заміни змінних $t=16^{\sqrt{x-2}}$ маємо

$16t+64t-t=79 \iff 79t=79 \iff t=1 \iff 16^{\sqrt{x-2}}=1$.

Тепер за допомогою заміни змінних $z=\sqrt{x-2}$ отримуємо найпростіше показникове рівняння

$16^z=1 \iff z=\log_{16}1=0 \iff \sqrt{x-2}=0 \iff x=2$.

Відповідь: $x=2$.

# Показникові рівняння

Розглянемо приклади розв'язання показникових рівнянь.

Приклад 1. Розв'язати рівняння
$2^{4\sqrt{x-2}+4}+4\cdot 16^{\sqrt{x-2}+1}-4^{2\sqrt{x-2}}=79$.

Розв'язання. Використовуючи властивості степеня, отримуємо

$2^4\cdot 2^{4\sqrt{x-2}}+4\cdot 16\cdot 16^{\sqrt{x-2}}-4^{2\sqrt{x-2}}=79 \iff$

$\iff 16\cdot 16^{\sqrt{x-2}}+64\cdot 16^{\sqrt{x-2}}-16^{\sqrt{x-2}}=79$.

Після заміни змінних $t=16^{\sqrt{x-2}}$ маємо

$16t+64t-t=79 \iff 79t=79 \iff t=1 \iff 16^{\sqrt{x-2}}=1$.

Тепер за допомогою заміни змінних $z=\sqrt{x-2}$ отримуємо найпростіше показникове рівняння

$16^z=1 \iff z=\log_{16}1=0 \iff \sqrt{x-2}=0 \iff x=2$.

Відповідь: $x=2$.

# Показникові рівняння

Розглянемо приклади розв'язання показникових рівнянь.

П р и к л а д 1. Розв'язати рівняння
$2^{4\sqrt{x-2}+4}+4\cdot 16^{\sqrt{x-2}+1}-4^{2\sqrt{x-2}}=79\,.$

Р о з в' я з а н н я. Використовуючи властивості степеня, отримуємо

$$2^4\cdot 2^{4\sqrt{x-2}}+4\cdot 16\cdot 16^{\sqrt{x-2}}-4^{2\sqrt{x-2}}=79 \iff$$

$$\iff 16\cdot 16^{\sqrt{x-2}}+64\cdot 16^{\sqrt{x-2}}-16^{\sqrt{x-2}}=79\,.$$

Після заміни змінних $t=16^{\sqrt{x-2}}$ маємо

$$16t+64t-t=79 \iff 79t=79 \iff t=1 \iff 16^{\sqrt{x-2}}=1\,.$$

Тепер за допомогою заміни змінних $z=\sqrt{x-2}$ отримуємо найпростіше показникове рівняння

$$16^z=1 \iff z=\log_{16}1=0 \iff \sqrt{x-2}=0 \iff x=2\,.$$

В і д п о в і д ь: $x=2\,.$

# Показникові рівняння

Розглянемо приклади розв'язання показникових рівнянь.

Приклад 1. Розв'язати рівняння
$2^{4\sqrt{x-2}+4}+4\cdot 16^{\sqrt{x-2}+1}-4^{2\sqrt{x-2}}=79\,.$

Розв'язання. Використовуючи властивості степеня, отримуємо

$$2^4\cdot 2^{4\sqrt{x-2}}+4\cdot 16\cdot 16^{\sqrt{x-2}}-4^{2\sqrt{x-2}}=79 \iff$$

$$\iff 16\cdot 16^{\sqrt{x-2}}+64\cdot 16^{\sqrt{x-2}}-16^{\sqrt{x-2}}=79\,.$$

Після заміни змінних $t=16^{\sqrt{x-2}}$ маємо

$$16t+64t-t=79 \iff 79t=79 \iff t=1 \iff 16^{\sqrt{x-2}}=1\,.$$

Тепер за допомогою заміни змінних $z=\sqrt{x-2}$ отримуємо найпростіше показникове рівняння

$$16^z=1 \iff z=\log_{16}1=0 \iff \sqrt{x-2}=0 \iff x=2\,.$$

Відповідь: $x=2$.

# Показникові рівняння

Розглянемо приклади розв'язання показникових рівнянь.

Приклад 1. Розв'язати рівняння
$2^{4\sqrt{x-2}+4}+4\cdot 16^{\sqrt{x-2}+1}-4^{2\sqrt{x-2}}=79$.

Розв'язання. Використовуючи властивості степеня, отримуємо

$$2^4\cdot 2^{4\sqrt{x-2}}+4\cdot 16\cdot 16^{\sqrt{x-2}}-4^{2\sqrt{x-2}}=79 \iff$$

$$\iff 16\cdot 16^{\sqrt{x-2}}+64\cdot 16^{\sqrt{x-2}}-16^{\sqrt{x-2}}=79\,.$$

Після заміни змінних $t=16^{\sqrt{x-2}}$ маємо

$$16t+64t-t=79 \iff 79t=79 \iff t=1 \iff 16^{\sqrt{x-2}}=1\,.$$

Тепер за допомогою заміни змінних $z=\sqrt{x-2}$ отримуємо найпростіше показникове рівняння

$$16^z=1 \iff z=\log_{16}1=0 \iff \sqrt{x-2}=0 \iff x=2\,.$$

Відповідь: $x=2$.

# Показникові рівняння

Приклад 2. Розв'язати рівняння $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$.

Розв'язання. Використовуючи заміну змінних $t = 3^x$ і враховуючи, що $9^x = (3^2)^x = 3^{2x} = (3^x)^2 = t^2$, отримуємо

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = 3, \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} 3^x = -1, \\ 3^x = 3, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ x = 1, \end{array}\right. \iff x = 1.$$

Відповідь: $x = 1$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $(2+\sqrt{3})^x - (2-\sqrt{3})^x = 1$.

Розв'язання. Оскільки $(2-\sqrt{3}) = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$, то після заміни змінних $t = (2+\sqrt{3})^x$ матимемо

$$t - \frac{1}{t} = 1 \iff \frac{t^2 - t - 1}{t} = 0.$$

# Показникові рівняння

Приклад 2. Розв'язати рівняння $9^x - 2\cdot 3^x - 3 = 0$.

Розв'язання. Використовуючи заміну змінних $t = 3^x$ і враховуючи, що $9^x = (3^2)^x = 3^{2x} = (3^x)^2 = t^2$, отримуємо

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = 3, \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} 3^x = -1, \\ 3^x = 3, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ x = 1, \end{array}\right. \iff x = 1.$$

Відповідь: $x = 1$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $(2+\sqrt{3})^x - (2-\sqrt{3})^x = 1$.

Розв'язання. Оскільки $(2-\sqrt{3}) = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$, то після заміни змінних $t = (2+\sqrt{3})^x$ матимемо

$$t - \frac{1}{t} = 1 \iff \frac{t^2 - t - 1}{t} = 0.$$

# Показникові рівняння

Приклад 2. Розв'язати рівняння $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$.

Розв'язання. Використовуючи заміну змінних $t = 3^x$ і враховуючи, що $9^x = (3^2)^x = 3^{2x} = (3^x)^2 = t^2$, отримуємо

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = 3, \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} 3^x = -1, \\ 3^x = 3, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ x = 1, \end{array}\right. \iff x = 1.$$

Відповідь: $x = 1$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $(2+\sqrt{3})^x - (2-\sqrt{3})^x = 1$.

Розв'язання. Оскільки $(2-\sqrt{3}) = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$, то після заміни змінних $t = (2+\sqrt{3})^x$ матимемо

$$t - \frac{1}{t} = 1 \iff \frac{t^2 - t - 1}{t} = 0.$$

# Показникові рівняння

Приклад 2. Розв'язати рівняння $9^x - 2\cdot 3^x - 3 = 0$.

Розв'язання. Використовуючи заміну змінних $t = 3^x$ і враховуючи, що $9^x = (3^2)^x = 3^{2x} = (3^x)^2 = t^2$, отримуємо

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = 3, \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} 3^x = -1, \\ 3^x = 3, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ x = 1, \end{array}\right. \iff x = 1.$$

Відповідь: $x = 1$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $(2+\sqrt{3})^x - (2-\sqrt{3})^x = 1$.

Розв'язання. Оскільки $(2-\sqrt{3}) = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$, то після заміни змінних $t = (2+\sqrt{3})^x$ матимемо

$$t - \frac{1}{t} = 1 \iff \frac{t^2 - t - 1}{t} = 0.$$

# Показникові рівняння

Приклад 2. Розв'язати рівняння $9^x - 2\cdot 3^x - 3 = 0$.

Розв'язання. Використовуючи заміну змінних $t = 3^x$ і враховуючи, що $9^x = (3^2)^x = 3^{2x} = (3^x)^2 = t^2$, отримуємо

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = 3, \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} 3^x = -1, \\ 3^x = 3, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ x = 1, \end{array}\right. \iff x = 1.$$

Відповідь: $x = 1$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $(2+\sqrt{3})^x - (2-\sqrt{3})^x = 1$.

Розв'язання. Оскільки $(2-\sqrt{3}) = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$, то після заміни змінних $t = (2+\sqrt{3})^x$ матимемо

$$t - \frac{1}{t} = 1 \iff \frac{t^2 - t - 1}{t} = 0.$$

# Показникові рівняння

Далі у відповідності з теоремою про рівність дробу нулю:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \iff \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

отримуємо

$$\frac{t^2 - t - 1}{t} = 0 \iff \begin{cases} t^2 - t - 1 = 0, \\ t \neq 0, \end{cases} \iff$$

$$\iff \left[ \begin{array}{l} t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \end{array} \right. \iff \left[ \begin{array}{l} (2+\sqrt{3})^x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ (2+\sqrt{3})^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \end{array} \right. \iff$$

$$\iff \left[ \begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ x = \log_{(2+\sqrt{3})} \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \end{array} \right. \iff x = \log_{(2+\sqrt{3})} \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Відповідь: $x = \log_{(2+\sqrt{3})} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.$

# Показникові рівняння

Далі у відповідності з теоремою про рівність дробу нулю:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \iff \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

отримуємо

$$\frac{t^2 - t - 1}{t} = 0 \iff \begin{cases} t^2 - t - 1 = 0, \\ t \neq 0, \end{cases} \iff$$

$$\iff \left[ \begin{array}{l} t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \end{array} \right. \iff \left[ \begin{array}{l} (2+\sqrt{3})^x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ (2+\sqrt{3})^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \end{array} \right. \iff$$

$$\iff \left[ \begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ x = \log_{(2+\sqrt{3})} \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \end{array} \right. \iff x = \log_{(2+\sqrt{3})} \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Відповідь: $x = \log_{(2+\sqrt{3})} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

# Показникові рівняння

Далі у відповідності з теоремою про рівність дробу нулю:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \iff \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

отримуємо

$$\frac{t^2 - t - 1}{t} = 0 \iff \begin{cases} t^2 - t - 1 = 0, \\ t \neq 0, \end{cases} \iff$$

$$\iff \left[ \begin{array}{l} t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \end{array} \right. \iff \left[ \begin{array}{l} (2+\sqrt{3})^x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ (2+\sqrt{3})^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \end{array} \right. \iff$$

$$\iff \left[ \begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ x = \log_{(2+\sqrt{3})} \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \end{array} \right. \iff x = \log_{(2+\sqrt{3})} \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Відповідь: $x = \log_{(2+\sqrt{3})} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

# Показникові рівняння

Далі у відповідності з теоремою про рівність дробу нулю:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \iff \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

отримуємо

$$\frac{t^2 - t - 1}{t} = 0 \iff \begin{cases} t^2 - t - 1 = 0, \\ t \neq 0, \end{cases} \iff$$

$$\iff \left[ \begin{array}{l} t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \end{array} \right. \iff \left[ \begin{array}{l} (2+\sqrt{3})^x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ (2+\sqrt{3})^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \end{array} \right. \iff$$

$$\iff \left[ \begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ x = \log_{(2+\sqrt{3})} \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \end{array} \right. \iff x = \log_{(2+\sqrt{3})} \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Відповідь: $x = \log_{(2+\sqrt{3})} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

# Показникові рівняння

Далі у відповідності з теоремою про рівність дробу нулю:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \iff \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

отримуємо

$$\frac{t^2 - t - 1}{t} = 0 \iff \begin{cases} t^2 - t - 1 = 0, \\ t \neq 0, \end{cases} \iff$$

$$\iff \left[ \begin{array}{l} t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \end{array} \right. \iff \left[ \begin{array}{l} (2+\sqrt{3})^x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ (2+\sqrt{3})^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \end{array} \right. \iff$$

$$\iff \left[ \begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ x = \log_{(2+\sqrt{3})} \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \end{array} \right. \iff x = \log_{(2+\sqrt{3})} \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Відповідь: $x = \log_{(2+\sqrt{3})} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

# Логарифмічні рівняння

Розглянемо приклади розв'язання логарифмічних рівнянь.

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$\log_3(x+2)+\log_9(x+2)=3$ .

Розв'язання. Зазначимо, що в рівнянні містяться логарифми від одного виразу $(x+2)$ . Відмінність основ при цьому є не істотною, оскільки переведення логарифмів до однієї основи легко виконати:

$$\log_3(x+2)+\log_9(x+2)=3 \iff \log_3(x+2)+\frac{\log_3(x+2)}{\log_3 9}=3 .$$

Після заміни змінних $t=\log_3(x+2)$ маємо

$$t+\frac{t}{2}=3 \iff \frac{3}{2}t=3 \iff t=2 \iff \log_3(x+2)=2 .$$

Тепер, виконуючи заміну змінних $z=x+2$ , отримуємо найпростіше логарифмічне рівняння

$$\log_3 z=2 \iff z=3^2 \iff x+2=9 \iff x=9-2=7 .$$

Відповідь: $x=7$ .

# Логарифмічні рівняння

Розглянемо приклади розв'язання логарифмічних рівнянь.

П р и к л а д 4. Розв'язати рівняння

$\log_3(x+2)+\log_9(x+2)=3$.

Р о з в' я з а н н я. Зазначимо, що в рівнянні містяться логарифми від одного виразу $(x+2)$. Відмінність основ при цьому є не істотною, оскільки переведення логарифмів до однієї основи легко виконати:

$$\log_3(x+2)+\log_9(x+2)=3 \iff \log_3(x+2)+\frac{\log_3(x+2)}{\log_3 9}=3\,.$$

Після заміни змінних $t=\log_3(x+2)$ маємо

$$t+\frac{t}{2}=3 \iff \frac{3}{2}t=3 \iff t=2 \iff \log_3(x+2)=2\,.$$

Тепер, виконуючи заміну змінних $z=x+2$, отримуємо найпростіше логарифмічне рівняння

$$\log_3 z=2 \iff z=3^2 \iff x+2=9 \iff x=9-2=7\,.$$

В і д п о в і д ь: $x=7$.

# Логарифмічні рівняння

Розглянемо приклади розв'язання логарифмічних рівнянь.

П р и к л а д 4. Розв'язати рівняння

$\log_3(x+2)+\log_9(x+2)=3$.

Р о з в' я з а н н я. Зазначимо, що в рівнянні містяться логарифми від одного виразу $(x+2)$. Відмінність основ при цьому є не істотною, оскільки переведення логарифмів до однієї основи легко виконати:

$$\log_3(x+2)+\log_9(x+2)=3 \iff \log_3(x+2)+\frac{\log_3(x+2)}{\log_3 9}=3.$$

Після заміни змінних $t=\log_3(x+2)$ маємо

$$t+\frac{t}{2}=3 \iff \frac{3}{2}t=3 \iff t=2 \iff \log_3(x+2)=2.$$

Тепер, виконуючи заміну змінних $z=x+2$, отримуємо найпростіше логарифмічне рівняння

$$\log_3 z=2 \iff z=3^2 \iff x+2=9 \iff x=9-2=7.$$

В і д п о в і д ь: $x=7$.

# Логарифмічні рівняння

Розглянемо приклади розв'язання логарифмічних рівнянь.

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$\log_3(x+2)+\log_9(x+2)=3$ .

Розв'язання. Зазначимо, що в рівнянні містяться логарифми від одного виразу $(x+2)$ . Відмінність основ при цьому є не істотною, оскільки переведення логарифмів до однієї основи легко виконати:

$$\log_3(x+2)+\log_9(x+2)=3 \iff \log_3(x+2)+\frac{\log_3(x+2)}{\log_3 9}=3 .$$

Після заміни змінних $t=\log_3(x+2)$ маємо

$$t+\frac{t}{2}=3 \iff \frac{3}{2}t=3 \iff t=2 \iff \log_3(x+2)=2 .$$

Тепер, виконуючи заміну змінних $z=x+2$ , отримуємо найпростіше логарифмічне рівняння

$$\log_3 z=2 \iff z=3^2 \iff x+2=9 \iff x=9-2=7 .$$

Відповідь: $x=7$ .

# Логарифмічні рівняння

Розглянемо приклади розв'язання логарифмічних рівнянь.

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$\log_3(x+2)+\log_9(x+2)=3$.

Розв'язання. Зазначимо, що в рівнянні містяться логарифми від одного виразу $(x+2)$. Відмінність основ при цьому є не істотною, оскільки переведення логарифмів до однієї основи легко виконати:

$$\log_3(x+2)+\log_9(x+2)=3 \iff \log_3(x+2)+\frac{\log_3(x+2)}{\log_3 9}=3.$$

Після заміни змінних $t=\log_3(x+2)$ маємо

$$t+\frac{t}{2}=3 \iff \frac{3}{2}t=3 \iff t=2 \iff \log_3(x+2)=2.$$

Тепер, виконуючи заміну змінних $z=x+2$, отримуємо найпростіше логарифмічне рівняння

$$\log_3 z=2 \iff z=3^2 \iff x+2=9 \iff x=9-2=7.$$

Відповідь: $x=7$.

# Логарифмічні рівняння

У випадку, коли рівняння містить логарифми від кількох виразів, доцільно зразу вказати умови, якими задається область визначення (ОДЗ) цього рівняння. В ході розв'язання необхідно ретельно контролювати виконання на ОДЗ умов, за яких справедливі властивості логарифмів, що використовуються. Підкреслимо, що формальне, без належного контролю, застосування властивостей логарифмів може призвести або до звуження, або до розширення ОДЗ і тому або до втрати коренів, або до появи сторонніх розв'язків.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$\lg(x-3)+\lg(x+6)=\lg 2+\lg 5$ .

Розв'язання. ОДЗ рівняння визначається умовами: $x-3>0$ і $x+6>0$ . На ОДЗ справедлива рівність $\lg(x-3)+\lg(x+6)=\lg\big((x-3)(x+6)\big)$ .

# Логарифмічні рівняння

У випадку, коли рівняння містить логарифми від кількох виразів, доцільно зразу вказати умови, якими задається область визначення (ОДЗ) цього рівняння. В ході розв'язання необхідно ретельно контролювати виконання на ОДЗ умов, за яких справедливі властивості логарифмів, що використовуються. Підкреслимо, що формальне, без належного контролю, застосування властивостей логарифмів може призвести або до звуження, або до розширення ОДЗ і тому або до втрати коренів, або до появи сторонніх розв'язків.

П р и к л а д 5. Розв'язати рівняння
$\lg(x-3)+\lg(x+6)=\lg 2+\lg 5$ .

Р о з в' я з а н н я. ОДЗ рівняння визначається умовами: $x-3>0$ і $x+6>0$ . На ОДЗ справедлива рівність $\lg(x-3)+\lg(x+6)=\lg\big((x-3)(x+6)\big)$ .

# Логарифмічні рівняння

У випадку, коли рівняння містить логарифми від кількох виразів, доцільно зразу вказати умови, якими задається область визначення (ОДЗ) цього рівняння. В ході розв'язання необхідно ретельно контролювати виконання на ОДЗ умов, за яких справедливі властивості логарифмів, що використовуються. Підкреслимо, що формальне, без належного контролю, застосування властивостей логарифмів може призвести або до звуження, або до розширення ОДЗ і тому або до втрати коренів, або до появи сторонніх розв'язків.

П р и к л а д 5. Розв'язати рівняння
$\lg(x-3)+\lg(x+6)=\lg 2+\lg 5$.

Р о з в' я з а н н я. ОДЗ рівняння визначається умовами: $x-3>0$ і $x+6>0$. На ОДЗ справедлива рівність
$\lg(x-3)+\lg(x+6)=\lg\big((x-3)(x+6)\big)$.

# Логарифмічні рівняння

Отже, на ОДЗ рівняння

$\lg(x-3)+\lg(x+6)=\lg 2+\lg 5$ перетворюється до

вигляду $\lg\big((x-3)(x+6)\big)=\lg 10$.

Звідси, враховуючи строгу монотонність логарифмічної функції $y=\lg t$ (це означає, що функція кожне своє значення приймає не більш, ніж в одній точці), на ОДЗ отримуємо рівність $(x-3)(x+6)=10$. В результаті маємо

$$\lg(x-3)+\lg(x+6)=\lg 2+\lg 5 \iff \begin{cases} x-3>0, \\ x+6>0, \\ (x-3)(x+6)=10 \end{cases}$$

(нерівності системи забезпечують належність $x$ ОДЗ логарифмічного рівняння).

$(x-3)(x+6)=10 \iff x_1=-7$ і $x_2=4$, при цьому $x_1=-7$ не задовольняє нерівності системи.

Відповідь: $x=4$.

# Логарифмічні рівняння

Отже, на ОДЗ рівняння

$\lg(x-3)+\lg(x+6)=\lg 2+\lg 5$ перетворюється до вигляду $\lg\big((x-3)(x+6)\big)=\lg 10$.

Звідси, враховуючи строгу монотонність логарифмічної функції $y=\lg t$ (це означає, що функція кожне своє значення приймає не більш, ніж в одній точці), на ОДЗ отримуємо рівність $(x-3)(x+6)=10$. В результаті маємо

$$\lg(x-3)+\lg(x+6)=\lg 2+\lg 5 \iff \begin{cases} x-3>0, \\ x+6>0, \\ (x-3)(x+6)=10 \end{cases}$$

(нерівності системи забезпечують належність $x$ ОДЗ логарифмічного рівняння).

$(x-3)(x+6)=10 \iff x_1=-7$ і $x_2=4$, при цьому $x_1=-7$ не задовольняє нерівності системи.

Відповідь: $x=4$.

# Логарифмічні рівняння

Отже, на ОДЗ рівняння

$\lg(x-3)+\lg(x+6)=\lg 2+\lg 5$ перетворюється до вигляду $\lg\big((x-3)(x+6)\big)=\lg 10$.

Звідси, враховуючи строгу монотонність логарифмічної функції $y=\lg t$ (це означає, що функція кожне своє значення приймає не більш, ніж в одній точці), на ОДЗ отримуємо рівність $(x-3)(x+6)=10$. В результаті маємо

$$\lg(x-3)+\lg(x+6)=\lg 2+\lg 5 \iff \begin{cases} x-3>0, \\ x+6>0, \\ (x-3)(x+6)=10 \end{cases}$$

(нерівності системи забезпечують належність $x$ ОДЗ логарифмічного рівняння).

$(x-3)(x+6)=10 \iff x_1=-7$ і $x_2=4$, при цьому $x_1=-7$ не задовольняє нерівності системи.

Відповідь: $x=4$.

# Логарифмічні рівняння

Отже, на ОДЗ рівняння

$\lg(x-3)+\lg(x+6)=\lg 2+\lg 5$ перетворюється до вигляду $\lg\big((x-3)(x+6)\big)=\lg 10$.

Звідси, враховуючи строгу монотонність логарифмічної функції $y=\lg t$ (це означає, що функція кожне своє значення приймає не більш, ніж в одній точці), на ОДЗ отримуємо рівність $(x-3)(x+6)=10$. В результаті маємо

$$\lg(x-3)+\lg(x+6)=\lg 2+\lg 5 \iff \begin{cases} x-3>0, \\ x+6>0, \\ (x-3)(x+6)=10 \end{cases}$$

(нерівності системи забезпечують належність $x$ ОДЗ логарифмічного рівняння).

$(x-3)(x+6)=10 \iff x_1=-7$ і $x_2=4$, при цьому $x_1=-7$ не задовольняє нерівності системи.

Відповідь: $x=4$.

# Логарифмічні рівняння

Приклад 6. Розв'язати рівняння
$1+x\log_2 6 = x+\log_2(9^x-3)$ .

Розв'язання. ОДЗ рівняння визначається умовою:
$9^x-3>0$ .
Подамо всі доданки у вигляді логарифмів
(при цьому $x = x\log_2 2 = \log_2 2^x$ ) і матимемо
$\log_2 2+\log_2 6^x = \log_2 2^x+\log_2(9^x-3) \iff$
$\iff \log_2(2\cdot 6^x) = \log_2\left(2^x(9^x-3)\right)$ ,
звідки на ОДЗ отримуємо рівняння
$2\cdot 6^x = 2^x(9^x-3) \iff 2^x(9^x-3)-2\cdot(2\cdot 3)^x = 0 \iff$
$\iff 2^x(9^x-2\cdot 3^x-3) = 0 \iff \left[\begin{array}{c} 2^x = 0, \\ 9^x-2\cdot 3^x-3=0. \end{array}\right.$
Перше рівняння сукупності не має розв'язків, а друге — розв'язано в прикладі 2. Його єдиний корінь $x=1$ належить ОДЗ, оскільки нерівність $9^1-3>0$ є істиною.
Відповідь: $x=1$ .

# Логарифмічні рівняння

Приклад 6. Розв'язати рівняння
$1 + x\log_2 6 = x + \log_2(9^x - 3)$.

Розв'язання. ОДЗ рівняння визначається умовою:
$9^x - 3 > 0$.

Подамо всі доданки у вигляді логарифмів
(при цьому $x = x\log_2 2 = \log_2 2^x$) і матимемо
$\log_2 2 + \log_2 6^x = \log_2 2^x + \log_2(9^x - 3) \iff$
$\iff \log_2(2 \cdot 6^x) = \log_2\left(2^x(9^x - 3)\right)$,
звідки на ОДЗ отримуємо рівняння
$2 \cdot 6^x = 2^x(9^x - 3) \iff 2^x(9^x - 3) - 2 \cdot (2 \cdot 3)^x = 0 \iff$

$$\iff 2^x(9^x - 2 \cdot 3^x - 3) = 0 \iff \left[\begin{array}{c} 2^x = 0, \\ 9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0. \end{array}\right.$$

Перше рівняння сукупності не має розв'язків, а друге — розв'язано в прикладі 2. Його єдиний корінь $x = 1$ належить ОДЗ, оскільки нерівність $9^1 - 3 > 0$ є істиною.

Відповідь: $x = 1$.

# Логарифмічні рівняння

Приклад 6. Розв'язати рівняння

$1+x\log_2 6 = x+\log_2(9^x-3)$ .

Розв'язання. ОДЗ рівняння визначається умовою: $9^x-3>0$ .

Подамо всі доданки у вигляді логарифмів (при цьому $x = x\log_2 2 = \log_2 2^x$ ) і матимемо

$\log_2 2+\log_2 6^x = \log_2 2^x+\log_2(9^x-3) \iff$

$\iff \log_2(2\cdot 6^x) = \log_2\left(2^x(9^x-3)\right)$ ,

звідки на ОДЗ отримуємо рівняння

$2\cdot 6^x = 2^x(9^x-3) \iff 2^x(9^x-3)-2\cdot(2\cdot 3)^x = 0 \iff$

$\iff 2^x(9^x-2\cdot 3^x-3) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} 2^x = 0, \\ 9^x-2\cdot 3^x-3 = 0. \end{array}\right.$

Перше рівняння сукупності не має розв'язків, а друге — розв'язано в прикладі 2. Його єдиний корінь $x=1$ належить ОДЗ, оскільки нерівність $9^1-3>0$ є істиною.

Відповідь: $x=1$ .

# Логарифмічні рівняння

Приклад 6. Розв'язати рівняння
$$1 + x\log_2 6 = x + \log_2(9^x - 3).$$

Розв'язання. ОДЗ рівняння визначається умовою:
$9^x - 3 > 0$.

Подамо всі доданки у вигляді логарифмів
(при цьому $x = x\log_2 2 = \log_2 2^x$ ) і матимемо
$$\log_2 2 + \log_2 6^x = \log_2 2^x + \log_2(9^x - 3) \iff$$
$$\iff \log_2(2 \cdot 6^x) = \log_2\left(2^x(9^x - 3)\right),$$
звідки на ОДЗ отримуємо рівняння
$$2 \cdot 6^x = 2^x(9^x - 3) \iff 2^x(9^x - 3) - 2 \cdot (2 \cdot 3)^x = 0 \iff$$
$$\iff 2^x(9^x - 2 \cdot 3^x - 3) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} 2^x = 0, \\ 9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0. \end{array}\right.$$
Перше рівняння сукупності не має розв'язків, а друге — розв'язано в прикладі 2. Його єдиний корінь $x = 1$ належить ОДЗ, оскільки нерівність $9^1 - 3 > 0$ є істиною.

Відповідь: $x = 1$.

# Логарифмічні рівняння

Приклад 6. Розв'язати рівняння
$1 + x\log_2 6 = x + \log_2(9^x - 3)$ .

Розв'язання. ОДЗ рівняння визначається умовою:
$9^x - 3 > 0$ .

Подамо всі доданки у вигляді логарифмів
(при цьому $x = x\log_2 2 = \log_2 2^x$ ) і матимемо
$\log_2 2 + \log_2 6^x = \log_2 2^x + \log_2(9^x - 3) \iff$
$\iff \log_2(2 \cdot 6^x) = \log_2\left(2^x(9^x - 3)\right)$ ,
звідки на ОДЗ отримуємо рівняння
$2 \cdot 6^x = 2^x(9^x - 3) \iff 2^x(9^x - 3) - 2 \cdot (2 \cdot 3)^x = 0 \iff$
$\iff 2^x(9^x - 2 \cdot 3^x - 3) = 0 \iff \left[\begin{array}{c} 2^x = 0, \\ 9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0. \end{array}\right.$

Перше рівняння сукупності не має розв'язків, а друге — розв'язано в прикладі 2. Його єдиний корінь $x = 1$ належить ОДЗ, оскільки нерівність $9^1 - 3 > 0$ є істиною.

Відповідь: $x = 1$ .

# Логарифмічні рівняння

Приклад 6. Розв'язати рівняння
$1+x\log_2 6=x+\log_2(9^x-3)$.

Розв'язання. ОДЗ рівняння визначається умовою:
$9^x-3>0$.

Подамо всі доданки у вигляді логарифмів
(при цьому $x=x\log_2 2=\log_2 2^x$ ) і матимемо
$\log_2 2+\log_2 6^x=\log_2 2^x+\log_2(9^x-3) \iff$
$\iff \log_2(2\cdot 6^x)=\log_2\left(2^x(9^x-3)\right)$,
звідки на ОДЗ отримуємо рівняння
$2\cdot 6^x=2^x(9^x-3) \iff 2^x(9^x-3)-2\cdot(2\cdot 3)^x=0 \iff$
$\iff 2^x(9^x-2\cdot 3^x-3)=0 \iff \left[\begin{array}{c} 2^x=0, \\ 9^x-2\cdot 3^x-3=0. \end{array}\right.$

Перше рівняння сукупності не має розв'язків, а друге — розв'язано в прикладі 2. Його єдиний корінь $x=1$ належить ОДЗ, оскільки нерівність $9^1-3>0$ є істиною.

Відповідь: $x=1$.

# Логарифмічні рівняння

Приклад 7. Розв'язати рівняння
$\log_2(x-1)^2 - 2\log_2(2+2x-x^2) = -2$.

Розв'язання. ОДЗ рівняння визначається системою нерівностей:

$$\begin{cases} (x-1)^2 > 0, \\ 2+2x-x^2 > 0. \end{cases}$$

Зазначимо, що на ОДЗ $\log_2(x-1)^2 \neq 2\log_2(x-1)$ (!), оскільки значення $(x-1)$ можуть бути від'ємними.
У відповідності з властивістю

$$\boxed{\log_a x^{2n} = 2n\log_a|x|}, \qquad n\in\mathbf{Z}, x\neq 0, a>0, a\neq 1$$

справедлива рівність $\log_2(x-1)^2 = 2\log_2|x-1|$.
Тому задане рівняння рівносильне рівнянню

$$2\log_2|x-1| - 2\log_2(2+2x-x^2) = -2 \iff$$

$$\iff \log_2|x-1| - \log_2(2+2x-x^2) = -1.$$

# Логарифмічні рівняння

Приклад 7. Розв'язати рівняння

$\log_2(x-1)^2 - 2\log_2(2+2x-x^2) = -2$.

Розв'язання. ОДЗ рівняння визначається системою нерівностей:

$$\begin{cases} (x-1)^2 > 0, \\ 2+2x-x^2 > 0. \end{cases}$$

Зазначимо, що на ОДЗ $\log_2(x-1)^2 \neq 2\log_2(x-1)$ (!), оскільки значення $(x-1)$ можуть бути від'ємними.

У відповідності з властивістю

$\boxed{\log_a x^{2n} = 2n\log_a|x|}$, $\quad n \in \mathbf{Z}, x \neq 0, a > 0, a \neq 1$

справедлива рівність $\log_2(x-1)^2 = 2\log_2|x-1|$.

Тому задане рівняння рівносильне рівнянню

$$2\log_2|x-1| - 2\log_2(2+2x-x^2) = -2 \iff$$

$$\iff \log_2|x-1| - \log_2(2+2x-x^2) = -1.$$

# Логарифмічні рівняння

П р и к л а д 7. Розв'язати рівняння

$\log_2(x-1)^2 - 2\log_2(2+2x-x^2) = -2\,.$

Р о з в' я з а н н я. ОДЗ рівняння визначається системою нерівностей:

$$\begin{cases} (x-1)^2 > 0\,, \\ 2+2x-x^2 > 0\,. \end{cases}$$

Зазначимо, що на ОДЗ $\log_2(x-1)^2 \neq 2\log_2(x-1)$ (!), оскільки значення $(x-1)$ можуть бути від'ємними.
У відповідності з властивістю

$\boxed{\log_a x^{2n} = 2n\log_a|x|}\,, \qquad n \in \mathbf{Z}\,, x \neq 0\,, a > 0\,, a \neq 1$

справедлива рівність $\log_2(x-1)^2 = 2\log_2|x-1|\,.$

Тому задане рівняння рівносильне рівнянню

$2\log_2|x-1| - 2\log_2(2+2x-x^2) = -2 \iff$

$\iff \log_2|x-1| - \log_2(2+2x-x^2) = -1\,.$

# Логарифмічні рівняння

Приклад 7. Розв'язати рівняння
$\log_2(x-1)^2 - 2\log_2(2+2x-x^2) = -2$.

Розв'язання. ОДЗ рівняння визначається системою нерівностей:

$$\begin{cases} (x-1)^2 > 0, \\ 2+2x-x^2 > 0. \end{cases}$$

Зазначимо, що на ОДЗ $\log_2(x-1)^2 \neq 2\log_2(x-1)$ (!), оскільки значення $(x-1)$ можуть бути від'ємними.
У відповідності з властивістю

$\boxed{\log_a x^{2n} = 2n\log_a|x|}$, $\quad n \in \mathbf{Z}, x \neq 0, a > 0, a \neq 1$

справедлива рівність $\log_2(x-1)^2 = 2\log_2|x-1|$.
Тому задане рівняння рівносильне рівнянню

$$2\log_2|x-1| - 2\log_2(2+2x-x^2) = -2 \iff$$

$$\iff \log_2|x-1| - \log_2(2+2x-x^2) = -1.$$

# Логарифмічні рівняння

Для перетворення рівняння, що містить логарифми від різних функцій, але за однією основою, доцільно різниці логарифмів замінити сумами. Цього легко досягти шляхом переносу "від'ємних" доданків в іншу частину рівняння.

Діючи у такий спосіб, маємо

$\log_2|x-1|-\log_2(2+2x-x^2)=-1 \iff$

$\iff \log_2|x-1|+1=\log_2(2+2x-x^2) \iff$

$\iff \log_2|x-1|+\log_2 2=\log_2(2+2x-x^2) \iff$

$\iff \log_2|2x-2|=\log_2(2+2x-x^2)$,

звідки на ОДЗ отримуємо рівняння $|2x-2|=2+2x-x^2$, яке перетворимо у відповідності з теоремою

$$|f(x)|=g(x) \iff \begin{cases} g(x)\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x), \end{array}\right. \end{cases}$$

# Логарифмічні рівняння

Для перетворення рівняння, що містить логарифми від різних функцій, але за однією основою, доцільно різниці логарифмів замінити сумами. Цього легко досягти шляхом переносу "від'ємних" доданків в іншу частину рівняння.

Діючи у такий спосіб, маємо

$$\log_2|x-1| - \log_2(2+2x-x^2) = -1 \iff$$

$$\iff \log_2|x-1| + 1 = \log_2(2+2x-x^2) \iff$$

$$\iff \log_2|x-1| + \log_2 2 = \log_2(2+2x-x^2) \iff$$

$$\iff \log_2|2x-2| = \log_2(2+2x-x^2),$$

звідки на ОДЗ отримуємо рівняння $|2x-2| = 2+2x-x^2$, яке перетворимо у відповідності з теоремою

$$|f(x)| = g(x) \iff \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \left[ \begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \end{array} \right. \end{cases}$$

# Логарифмічні рівняння

а саме:

$$|2x-2| = 2+2x-x^2 \iff \left\{\begin{array}{l} 2+2x-x^2 \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2x-2 = 2+2x-x^2, \\ 2x-2 = -(2+2x-x^2). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Розв'язуємо рівняння сукупності:

$2x-2 = 2+2x-x^2 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2.$

$2x-2 = -(2+2x-x^2) \iff 2x-2 = x^2-2x-2 \iff$

$\iff x^2-4x = 0 \iff x_1 = 0$ и $x_2 = 4.$

Нерівність $2+2x-x^2 \geq 0$ задовольняють тільки два корені: $x = 0$ і $x = 2$. Ці ж корені належать ОДЗ, оскільки задовольняють записану на початку розв'язання систему нерівностей, що визначає ОДЗ:

$$\left\{\begin{array}{l} (x-1)^2 > 0, \\ 2+2x-x^2 > 0. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x \in \{0; 2\}$.

# Логарифмічні рівняння

а саме:

$$|2x-2| = 2+2x-x^2 \iff \begin{cases} 2+2x-x^2 \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2x-2 = 2+2x-x^2, \\ 2x-2 = -(2+2x-x^2). \end{array}\right. \end{cases}$$

Розв'язуємо рівняння сукупності:

$$2x-2 = 2+2x-x^2 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2.$$

$$2x-2 = -(2+2x-x^2) \iff 2x-2 = x^2-2x-2 \iff$$

$$\iff x^2-4x = 0 \iff x_1 = 0 \text{ и } x_2 = 4.$$

Нерівність $2+2x-x^2 \geq 0$ задовольняють тільки два корені: $x=0$ і $x=2$. Ці ж корені належать ОДЗ, оскільки задовольняють записану на початку розв'язання систему нерівностей, що визначає ОДЗ:

$$\begin{cases} (x-1)^2 > 0, \\ 2+2x-x^2 > 0. \end{cases}$$

Відповідь: $x \in \{0;2\}$.

# Логарифмічні рівняння

а саме:

$$|2x-2| = 2+2x-x^2 \iff \left\{\begin{array}{l} 2+2x-x^2 \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2x-2 = 2+2x-x^2, \\ 2x-2 = -(2+2x-x^2). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Розв'язуємо рівняння сукупності:

$2x-2 = 2+2x-x^2 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2.$

$2x-2 = -(2+2x-x^2) \iff 2x-2 = x^2-2x-2 \iff$

$\iff x^2-4x = 0 \iff x_1 = 0$ и $x_2 = 4.$

Нерівність $2+2x-x^2 \geq 0$ задовольняють тільки два корені: $x=0$ і $x=2$. Ці ж корені належать ОДЗ, оскільки задовольняють записану на початку розв'язання систему нерівностей, що визначає ОДЗ:

$$\left\{\begin{array}{l} (x-1)^2 > 0, \\ 2+2x-x^2 > 0. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x \in \{0;2\}$.

# Логарифмічні рівняння

а саме:

$$|2x-2| = 2+2x-x^2 \iff \begin{cases} 2+2x-x^2 \geq 0, \\ \left[ \begin{array}{l} 2x-2 = 2+2x-x^2, \\ 2x-2 = -(2+2x-x^2). \end{array} \right. \end{cases}$$

Розв'язуємо рівняння сукупності:

$$2x-2 = 2+2x-x^2 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2.$$

$$2x-2 = -(2+2x-x^2) \iff 2x-2 = x^2-2x-2 \iff$$

$$\iff x^2-4x = 0 \iff x_1 = 0 \text{ и } x_2 = 4.$$

Нерівність $2+2x-x^2 \geq 0$ задовольняють тільки два корені: $x = 0$ і $x = 2$. Ці ж корені належать ОДЗ, оскільки задовольняють записану на початку розв'язання систему нерівностей, що визначає ОДЗ:

$$\begin{cases} (x-1)^2 > 0, \\ 2+2x-x^2 > 0. \end{cases}$$

Відповідь: $x \in \{0;2\}$.

# Логарифмічні рівняння

Приклад 8. Розв'язати рівняння
$9\log_{4x} x^2 - 4\log_{2x^2} x^3 = 0$.

Розв'язання. Враховуючи область визначення функції $\log_{\varphi(x)} f(x)$ (основа $\varphi(x)$ логарифма повинна бути додатньою і не рівною одиниці, а функція $f(x)$ також повинна приймати додатні значення), записуємо обмеження на область визначення (ОДЗ) рівняння:

$$\begin{cases} x^2 > 0; \quad 4x > 0; \quad 4x \neq 1, \\ x^3 > 0; \quad 2x^2 > 0; \quad 2x^2 \neq 1, \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1/4, \\ 2x^2 \neq 1. \end{cases}$$

На ОДЗ перейдемо до однієї основи логарифмів. Підкреслимо, що на ОДЗ $x$ може дорівнювати одиниці. Тому перехід до основи $x$ в даному рівнянні звужує ОДЗ і призводить до втрати розв'язків!

# Логарифмічні рівняння

Приклад 8. Розв'язати рівняння

$9\log_{4x} x^2 - 4\log_{2x^2} x^3 = 0\,.$

Розв'язання. Враховуючи область визначення функції $\log_{\varphi(x)} f(x)$ (основа $\varphi(x)$ логарифма повинна бути додатньою і не рівною одиниці, а функція $f(x)$ також повинна приймати додатні значення), записуємо обмеження на область визначення (ОДЗ) рівняння:

$$\begin{cases} x^2 > 0; \quad 4x > 0; \quad 4x \neq 1, \\ x^3 > 0; \quad 2x^2 > 0; \quad 2x^2 \neq 1, \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0\,, \\ x \neq 1/4\,, \\ 2x^2 \neq 1\,. \end{cases}$$

На ОДЗ перейдемо до однієї основи логарифмів. Підкреслимо, що на ОДЗ $x$ може дорівнювати одиниці. Тому перехід до основи $x$ в даному рівнянні звужує ОДЗ і призводить до втрати розв'язків!

# Логарифмічні рівняння

Приклад 8. Розв'язати рівняння

$9\log_{4x} x^2 - 4\log_{2x^2} x^3 = 0$.

Розв'язання. Враховуючи область визначення функції $\log_{\varphi(x)} f(x)$ (основа $\varphi(x)$ логарифма повинна бути додатньою і не рівною одиниці, а функція $f(x)$ також повинна приймати додатні значення), записуємо обмеження на область визначення (ОДЗ) рівняння:

$$\begin{cases} x^2 > 0; \quad 4x > 0; \quad 4x \neq 1, \\ x^3 > 0; \quad 2x^2 > 0; \quad 2x^2 \neq 1, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x > 0\,, \\ x \neq 1/4\,, \\ 2x^2 \neq 1\,. \end{cases}$$

На ОДЗ перейдемо до однієї основи логарифмів. Підкреслимо, що на ОДЗ $x$ може дорівнювати одиниці. Тому перехід до основи $x$ в даному рівнянні звужує ОДЗ і призводить до втрати розв'язків!

# Логарифмічні рівняння

Переводячи логарифми до основи 2 і використовуючи властивості логарифмів, на ОДЗ отримуємо

$$9\log_{4x} x^2 - 4\log_{2x^2} x^3 = 0 \iff 9\,\frac{\log_2 x^2}{\log_2(4x)} - 4\,\frac{\log_2 x^3}{\log_2(2x^2)} = 0 \iff$$

$$\iff 9\,\frac{2\log_2 x}{\log_2 4 + \log_2 x} - 4\,\frac{3\log_2 x}{\log_2 2 + 2\log_2 x} = 0\,.$$

Тепер отримане рівняння розв'язуємо методом заміни змінних. Так, позначивши $t = \log_2 x$, матимемо

$$\frac{18t}{2+t} - \frac{12t}{1+2t} = 0 \iff \frac{6t(4t-1)}{(2+t)(1+2t)} = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t = 1/4, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 0, \\ \log_2 x = 1/4, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 2^{1/4}. \end{array}\right.$$

Очевидно, що обидва корені задовольняють обмеження на ОДЗ рівняння: $x > 0$, $x \neq 1/4$, $2x^2 \neq 1$.

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = 2^{1/4}$.

# Логарифмічні рівняння

Переводячи логарифми до основи 2 і використовуючи властивості логарифмів, на ОДЗ отримуємо

$$9\log_{4x} x^2 - 4\log_{2x^2} x^3 = 0 \iff 9\,\frac{\log_2 x^2}{\log_2(4x)} - 4\,\frac{\log_2 x^3}{\log_2(2x^2)} = 0 \iff$$

$$\iff 9\,\frac{2\log_2 x}{\log_2 4 + \log_2 x} - 4\,\frac{3\log_2 x}{\log_2 2 + 2\log_2 x} = 0\,.$$

Тепер отримане рівняння розв'язуємо методом заміни змінних. Так, позначивши $t = \log_2 x$, матимемо

$$\frac{18t}{2+t} - \frac{12t}{1+2t} = 0 \iff \frac{6t(4t-1)}{(2+t)(1+2t)} = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t = 1/4, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 0, \\ \log_2 x = 1/4, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 2^{1/4}. \end{array}\right.$$

Очевидно, що обидва корені задовольняють обмеження на ОДЗ рівняння: $x > 0$, $x \neq 1/4$, $2x^2 \neq 1$.

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = 2^{1/4}$.

# Логарифмічні рівняння

Переводячи логарифми до основи 2 і використовуючи властивості логарифмів, на ОДЗ отримуємо

$$9\log_{4x} x^2 - 4\log_{2x^2} x^3 = 0 \iff 9\,\frac{\log_2 x^2}{\log_2(4x)} - 4\,\frac{\log_2 x^3}{\log_2(2x^2)} = 0 \iff$$

$$\iff 9\,\frac{2\log_2 x}{\log_2 4 + \log_2 x} - 4\,\frac{3\log_2 x}{\log_2 2 + 2\log_2 x} = 0\,.$$

Тепер отримане рівняння розв'язуємо методом заміни змінних. Так, позначивши $t = \log_2 x\,,$ матимемо

$$\frac{18t}{2+t} - \frac{12t}{1+2t} = 0 \iff \frac{6t(4t-1)}{(2+t)(1+2t)} = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t = 1/4, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 0, \\ \log_2 x = 1/4, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 2^{1/4}. \end{array}\right.$$

Очевидно, що обидва корені задовольняють обмеження на ОДЗ рівняння: $x > 0\,,\ x \neq 1/4\,,\quad 2x^2 \neq 1\,.$

Відповідь: $x_1 = 1\,,\ x_2 = 2^{1/4}\,.$

# Логарифмічні рівняння

Переводячи логарифми до основи 2 і використовуючи властивості логарифмів, на ОДЗ отримуємо

$$9\log_{4x} x^2 - 4\log_{2x^2} x^3 = 0 \iff 9\,\frac{\log_2 x^2}{\log_2(4x)} - 4\,\frac{\log_2 x^3}{\log_2(2x^2)} = 0 \iff$$

$$\iff 9\,\frac{2\log_2 x}{\log_2 4 + \log_2 x} - 4\,\frac{3\log_2 x}{\log_2 2 + 2\log_2 x} = 0\,.$$

Тепер отримане рівняння розв'язуємо методом заміни змінних. Так, позначивши $t = \log_2 x\,,$ матимемо

$$\frac{18t}{2+t} - \frac{12t}{1+2t} = 0 \iff \frac{6t(4t-1)}{(2+t)(1+2t)} = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{aligned} t &= 0, \\ t &= 1/4, \end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned} \log_2 x &= 0, \\ \log_2 x &= 1/4, \end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned} x &= 1, \\ x &= 2^{1/4}. \end{aligned}\right.$$

Очевидно, що обидва корені задовольняють обмеження на ОДЗ рівняння: $x > 0\,,\ x \neq 1/4\,,\ \ 2x^2 \neq 1\,.$

В і д п о в і д ь: $x_1 = 1\,,\ x_2 = 2^{1/4}\,.$

# Логарифмічні рівняння

Приклад 9. Розв'язати рівняння $x^{\log_5 x-2}=1$.

Розв'язання. ОДЗ рівняння визначається умовою: $x>0$.

Оскільки обидві частини рівняння додатні на ОДЗ, то на ОДЗ їх можна прологарифмувати за основою 5, тобто перейти до рівняння

$\log_5\left(x^{\log_5 x-2}\right)=\log_5 1$.

Звідси у відповідності з властивостями логарифмів отримуємо рівняння

$(\log_5 x-2)\log_5 x=0$.

В результаті на ОДЗ маємо сукупність

$$\left[\begin{array}{l}\log_5 x=2,\\ \log_5 x=0,\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x=5^2=25,\\ x=5^0=1.\end{array}\right.$$

Відповідь: $x_1=1$, $x_2=25$.

# Логарифмічні рівняння

Приклад 9. Розв'язати рівняння $x^{\log_5 x-2}=1$.

Розв'язання. ОДЗ рівняння визначається умовою: $x>0$.

Оскільки обидві частини рівняння додатні на ОДЗ, то на ОДЗ їх можна прологарифмувати за основою 5, тобто перейти до рівняння

$\log_5\left(x^{\log_5 x-2}\right)=\log_5 1$.

Звідси у відповідності з властивостями логарифмів отримуємо рівняння

$(\log_5 x-2)\log_5 x=0$.

В результаті на ОДЗ маємо сукупність

$$\left[\begin{aligned}&\log_5 x=2,\\&\log_5 x=0,\end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned}&x=5^2=25,\\&x=5^0=1.\end{aligned}\right.$$

Відповідь: $x_1=1$, $x_2=25$.

# Логарифмічні рівняння

Приклад 9. Розв'язати рівняння $x^{\log_5 x - 2} = 1$.

Розв'язання. ОДЗ рівняння визначається умовою: $x > 0$.

Оскільки обидві частини рівняння додатні на ОДЗ, то на ОДЗ їх можна прологарифмувати за основою 5, тобто перейти до рівняння

$\log_5 \left(x^{\log_5 x - 2}\right) = \log_5 1$.

Звідси у відповідності з властивостями логарифмів отримуємо рівняння

$(\log_5 x - 2)\log_5 x = 0$.

В результаті на ОДЗ маємо сукупність

$$\left[\begin{array}{l} \log_5 x = 2, \\ \log_5 x = 0, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 5^2 = 25, \\ x = 5^0 = 1. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = 25$.

# Логарифмічні рівняння

Приклад 9. Розв'язати рівняння $x^{\log_5 x-2}=1$.

Розв'язання. ОДЗ рівняння визначається умовою: $x>0$.

Оскільки обидві частини рівняння додатні на ОДЗ, то на ОДЗ їх можна прологарифмувати за основою 5, тобто перейти до рівняння

$\log_5\left(x^{\log_5 x-2}\right)=\log_5 1$.

Звідси у відповідності з властивостями логарифмів отримуємо рівняння

$(\log_5 x-2)\log_5 x=0$.

В результаті на ОДЗ маємо сукупність

$$\left[\begin{aligned}\log_5 x&=2,\\ \log_5 x&=0,\end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned}x&=5^2=25,\\ x&=5^0=1.\end{aligned}\right.$$

Відповідь: $x_1=1$, $x_2=25$.

# Логарифмічні рівняння

Приклад 9. Розв'язати рівняння $x^{\log_5 x-2}=1$.

Розв'язання. ОДЗ рівняння визначається умовою: $x>0$.

Оскільки обидві частини рівняння додатні на ОДЗ, то на ОДЗ їх можна прологарифмувати за основою 5, тобто перейти до рівняння

$\log_5\left(x^{\log_5 x-2}\right)=\log_5 1$.

Звідси у відповідності з властивостями логарифмів отримуємо рівняння

$(\log_5 x-2)\log_5 x=0$.

В результаті на ОДЗ маємо сукупність

$$\left[\begin{aligned}\log_5 x&=2,\\ \log_5 x&=0,\end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned}x&=5^2=25,\\ x&=5^0=1.\end{aligned}\right.$$

Відповідь: $x_1=1$, $x_2=25$.

# Логарифмічні рівняння

**Приклад 10.** Розв'язати рівняння $\dfrac{5^{\log_5^2 x(1+\log_5 x)}}{x^{\log_5^2 x+2}} = 1$.

**Розв'язання.** ОДЗ рівняння визначається умовою: $x > 0$.

При цьому, враховуючи властивості степеня і означення логарифма, на ОДЗ отримуємо рівності

$$5^{\log_5^2 x(1+\log_5 x)} = \left(5^{\log_5 x}\right)^{\log_5 x(1+\log_5 x)} = x^{\log_5 x(1+\log_5 x)} =$$
$$= x^{\log_5 x+\log_5^2 x}.$$

Тепер, виконавши ділення в лівій частині заданого рівняння, перетворимо його до вигляду

$x^{\log_5 x-2} = 1$.

Отримане рівняння розглянуто в попередньому прикладі.

**Відповідь:** $x_1 = 1$, $x_2 = 25$.

# Логарифмічні рівняння

Приклад 10. Розв'язати рівняння $\dfrac{5^{\log_5^2 x(1+\log_5 x)}}{x^{\log_5^2 x+2}} = 1$.

Розв'язання. ОДЗ рівняння визначається умовою: $x > 0$.

При цьому, враховуючи властивості степеня і означення логарифма, на ОДЗ отримуємо рівності

$$5^{\log_5^2 x(1+\log_5 x)} = \left(5^{\log_5 x}\right)^{\log_5 x(1+\log_5 x)} = x^{\log_5 x(1+\log_5 x)} =$$
$$= x^{\log_5 x+\log_5^2 x}.$$

Тепер, виконавши ділення в лівій частині заданого рівняння, перетворимо його до вигляду $x^{\log_5 x-2} = 1$.

Отримане рівняння розглянуто в попередньому прикладі.

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = 25$.

# Логарифмічні рівняння

Приклад 10. Розв'язати рівняння $\dfrac{5^{\log_5^2 x(1+\log_5 x)}}{x^{\log_5^2 x+2}} = 1$.

Розв'язання. ОДЗ рівняння визначається умовою:
$x > 0$.
При цьому, враховуючи властивості степеня і означення логарифма, на ОДЗ отримуємо рівності

$$5^{\log_5^2 x(1+\log_5 x)} = \left(5^{\log_5 x}\right)^{\log_5 x(1+\log_5 x)} = x^{\log_5 x(1+\log_5 x)} =$$
$$= x^{\log_5 x+\log_5^2 x}.$$

Тепер, виконавши ділення в лівій частині заданого рівняння, перетворимо його до вигляду
$x^{\log_5 x-2} = 1$.

Отримане рівняння розглянуто в попередньому прикладі.

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = 25$.

# Логарифмічні рівняння

Приклад 10. Розв'язати рівняння $\dfrac{5^{\log_5^2 x(1+\log_5 x)}}{x^{\log_5^2 x+2}} = 1$.

Розв'язання. ОДЗ рівняння визначається умовою: $x > 0$.

При цьому, враховуючи властивості степеня і означення логарифма, на ОДЗ отримуємо рівності

$$5^{\log_5^2 x(1+\log_5 x)} = \left(5^{\log_5 x}\right)^{\log_5 x(1+\log_5 x)} = x^{\log_5 x(1+\log_5 x)} =$$

$$= x^{\log_5 x+\log_5^2 x}.$$

Тепер, виконавши ділення в лівій частині заданого рівняння, перетворимо його до вигляду

$x^{\log_5 x-2} = 1$.

Отримане рівняння розглянуто в попередньому прикладі.

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = 25$.

# Приклади із ЗНО

**Приклад 11** (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.). Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{8^x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$.

**Розв'язання.** Подамо обидві частини рівняння у вигляді степенів числа $2$:

$$\sqrt[3]{8^x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \iff \left((2^3)^x\right)^{1/3} = 2^{1/2} \cdot 2^{1/3} \iff 2^x = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}.$$

Тоді $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

**Відповідь:** $\frac{5}{6}$.

**Приклад 12** (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2015 р.). Розв'яжіть рівняння $\log_5^2 x + \log_5 x = 2$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповіді, якщо рівняння має кілька коренів, то у відповіді запишіть їхню СУМУ. Якщо рівняння не має коренів, запишіть у відповіді число $100$.

**Розв'язання.** Після заміни змінних $t = \log_5 x$ отримуємо рівняння $t^2 + t = 2 \iff t^2 + t - 2 = 0$.

# Приклади із ЗНО

Приклад 11 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.). Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{8^x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$.

Розв'язання. Подамо обидві частини рівняння у вигляді степенів числа $2$:

$$\sqrt[3]{8^x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \iff \left((2^3)^x\right)^{1/3} = 2^{1/2} \cdot 2^{1/3} \iff 2^x = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}.$$

Тоді $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

Відповідь: $\frac{5}{6}$.

Приклад 12 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2015 р.). Розв'яжіть рівняння $\log_5^2 x + \log_5 x = 2$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповіді, якщо рівняння має кілька коренів, то у відповіді запишіть їхню СУМУ. Якщо рівняння не має коренів, запишіть у відповіді число $100$.

Розв'язання. Після заміни змінних $t = \log_5 x$ отримуємо рівняння $t^2 + t = 2 \iff t^2 + t - 2 = 0$.

# Приклади із ЗНО

**Приклад 11** (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.). Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{8^x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$.

**Розв'язання.** Подамо обидві частини рівняння у вигляді степенів числа $2$:

$$\sqrt[3]{8^x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \iff \left((2^3)^x\right)^{1/3} = 2^{1/2} \cdot 2^{1/3} \iff 2^x = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}.$$

Тоді $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

**Відповідь:** $\frac{5}{6}$.

**Приклад 12** (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2015 р.). Розв'яжіть рівняння $\log_5^2 x + \log_5 x = 2$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповіді, якщо рівняння має кілька коренів, то у відповіді запишіть їхню СУМУ. Якщо рівняння не має коренів, запишіть у відповіді число $100$.

**Розв'язання.** Після заміни змінних $t = \log_5 x$ отримуємо рівняння $t^2 + t = 2 \iff t^2 + t - 2 = 0$.

# Приклади із ЗНО

П р и к л а д 11 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.). Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{8^x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$.

Р о з в' я з а н н я. Подамо обидві частини рівняння у вигляді степенів числа $2$:

$$\sqrt[3]{8^x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \iff \left((2^3)^x\right)^{1/3} = 2^{1/2} \cdot 2^{1/3} \iff 2^x = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}.$$

Тоді $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

В і д п о в і д ь: $\frac{5}{6}$.

П р и к л а д 12 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2015 р.). Розв'яжіть рівняння $\log_5^2 x + \log_5 x = 2$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповіді, якщо рівняння має кілька коренів, то у відповіді запишіть їхню СУМУ. Якщо рівняння не має коренів, запишіть у відповіді число $100$.

Р о з в' я з а н н я. Після заміни змінних $t = \log_5 x$ отримуємо рівняння $t^2 + t = 2 \iff t^2 + t - 2 = 0$.

# Приклади із ЗНО

Приклад 11 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.). Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{8^x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$.

Розв'язання. Подамо обидві частини рівняння у вигляді степенів числа $2$:

$$\sqrt[3]{8^x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \iff \left((2^3)^x\right)^{1/3} = 2^{1/2} \cdot 2^{1/3} \iff 2^x = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}.$$

Тоді $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

Відповідь: $\frac{5}{6}$.

Приклад 12 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2015 р.). Розв'яжіть рівняння $\log_5^2 x + \log_5 x = 2$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповіді, якщо рівняння має кілька коренів, то у відповіді запишіть їхню СУМУ. Якщо рівняння не має коренів, запишіть у відповіді число $100$.

Розв'язання. Після заміни змінних $t = \log_5 x$ отримуємо рівняння $t^2 + t = 2 \iff t^2 + t - 2 = 0$.

# Приклади із ЗНО

Далі маємо

$$t^2+t-2=0 \iff \left[\begin{array}{l} t=-2, \\ t=1, \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \log_5 x=-2, \\ \log_5 x=1, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x=5^{-2}=1/25=0,04, \\ x=5. \end{array}\right.$$

Отже, рівняння має 2 корені: $x_1=0,04$ і $x_2=5$. Їх сума $x_1+x_2=5,04$.

Відповідь: $5,04$.

Приклад 13 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2009 р.). Розв'яжіть рівняння $\log_6(x-3)+\log_6(x-8)=2$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь; якщо воно має два корені, то у відповідь запишіть їх суму.

# Приклади із ЗНО

Далі маємо

$$t^2+t-2=0 \iff \left[\begin{array}{l} t=-2, \\ t=1, \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \log_5 x=-2, \\ \log_5 x=1, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x=5^{-2}=1/25=0,04\,, \\ x=5\,. \end{array}\right.$$

Отже, рівняння має 2 корені: $x_1=0,04$ і $x_2=5$. Їх сума $x_1+x_2=5,04$.

Відповідь: $5,04$.

Приклад 13 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2009 р.). Розв'яжіть рівняння $\log_6(x-3)+\log_6(x-8)=2$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь; якщо воно має два корені, то у відповідь запишіть їх суму.

# Приклади із ЗНО

Далі маємо

$$t^2+t-2=0 \iff \left[\begin{array}{l} t=-2, \\ t=1, \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \log_5 x=-2, \\ \log_5 x=1, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x=5^{-2}=1/25=0,04\,, \\ x=5\,. \end{array}\right.$$

Отже, рівняння має 2 корені: $x_1=0,04$ і $x_2=5$. Їх сума $x_1+x_2=5,04$.

Відповідь: $5,04$.

Приклад 13 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2009 р.). Розв'яжіть рівняння $\log_6(x-3)+\log_6(x-8)=2$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь; якщо воно має два корені, то у відповідь запишіть їх суму.

# Приклади із ЗНО

Розв'язання. ОДЗ рівняння $\log_6(x-3)+\log_6(x-8)=2$ визначається системою нерівностей:

$$\begin{cases} x-3>0, \\ x-8>0. \end{cases}$$

На ОДЗ задане рівняння перетворюється до вигляду $\log_6((x-3)(x-8))=\log_6 36$, звідки отримуємо рівність $(x-3)(x-8)=36$.

Перетворюємо квадратне рівняння до стандартного вигляду:

$$(x-3)(x-8)=36 \iff x^2-8x-3x+24-36=0 \iff$$

$$\iff x^2-11x-12=0.$$

Воно має 2 корені: $x_1=-1$ і $x_2=12$, при цьому $x_1=-1$ не належить ОДЗ, бо не задовольняє нерівності записаної вище системи.

Отже, задане рівняння має єдиний корінь: $x_2=12$.

Відповідь: 12.

# Приклади із ЗНО

Р о з в' я з а н н я. ОДЗ рівняння $\log_6(x-3)+\log_6(x-8)=2$ визначається системою нерівностей:

$$\begin{cases} x-3>0\,, \\ x-8>0\,. \end{cases}$$

На ОДЗ задане рівняння перетворюється до вигляду $\log_6\big((x-3)(x-8)\big)=\log_6 36$, звідки отримуємо рівність $(x-3)(x-8)=36$.

Перетворюємо квадратне рівняння до стандартного вигляду:

$$(x-3)(x-8)=36 \iff x^2-8x-3x+24-36=0 \iff$$

$$\iff x^2-11x-12=0\,.$$

Воно має 2 корені: $x_1=-1$ і $x_2=12$, при цьому $x_1=-1$ не належить ОДЗ, бо не задовольняє нерівності записаної вище системи.

Отже, задане рівняння має єдиний корінь: $x_2=12$.

В і д п о в і д ь: 12.

# Приклади із ЗНО

Розв'язання. ОДЗ рівняння $\log_6(x-3)+\log_6(x-8)=2$ визначається системою нерівностей:

$$\begin{cases} x-3>0, \\ x-8>0. \end{cases}$$

На ОДЗ задане рівняння перетворюється до вигляду $\log_6\big((x-3)(x-8)\big)=\log_6 36$, звідки отримуємо рівність $(x-3)(x-8)=36$.

Перетворюємо квадратне рівняння до стандартного вигляду:

$$(x-3)(x-8)=36 \iff x^2-8x-3x+24-36=0 \iff$$
$$\iff x^2-11x-12=0.$$

Воно має 2 корені: $x_1=-1$ і $x_2=12$, при цьому $x_1=-1$ не належить ОДЗ, бо не задовольняє нерівності записаної вище системи.

Отже, задане рівняння має єдиний корінь: $x_2=12$.

Відповідь: 12.

# Приклади із ЗНО

Розв'язання. ОДЗ рівняння $\log_6(x-3)+\log_6(x-8)=2$ визначається системою нерівностей:

$$\begin{cases} x-3>0, \\ x-8>0. \end{cases}$$

На ОДЗ задане рівняння перетворюється до вигляду $\log_6\big((x-3)(x-8)\big)=\log_6 36$, звідки отримуємо рівність $(x-3)(x-8)=36$.

Перетворюємо квадратне рівняння до стандартного вигляду:

$$(x-3)(x-8)=36 \iff x^2-8x-3x+24-36=0 \iff$$

$$\iff x^2-11x-12=0.$$

Воно має 2 корені: $x_1=-1$ і $x_2=12$, при цьому $x_1=-1$ не належить ОДЗ, бо не задовольняє нерівності записаної вище системи.

Отже, задане рівняння має єдиний корінь: $x_2=12$.

Відповідь: $12$.