Показникова функція і логарифми

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 33 (частина перша)

Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Показникова функція

Показникова функція $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, визначена при усіх дійсних значеннях x і приймає тільки додатні значення, тобто $a^x > 0$ при усіх $x \in \mathbf{R}$.

При $a, b > 0$ і $x, y \in R$ справедливі властивості степеня:

1) $a^0 = 1$,

2) $a^x a^y = a^{x+y}$,

3) $a^x : a^y = a^{x-y}$,

4) $(a^x)^y = a^{xy}$,

5) $(ab)^x = a^x b^x$,

6) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$,

7) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

Показникова функція

Показникова функція $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, визначена при усіх дійсних значеннях x і приймає тільки додатні значення, тобто $a^x > 0$ при усіх $x \in \mathbf{R}$.

При $a, b > 0$ і $x, y \in R$ справедливі властивості степеня:

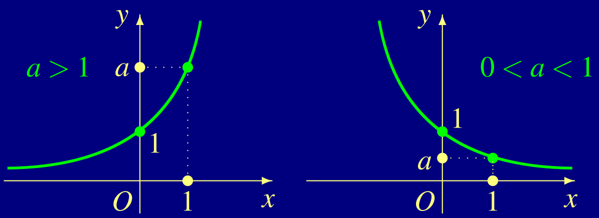
1) $a^0 = 1$,
2) $a^x a^y = a^{x+y}$,
3) $a^x : a^y = a^{x-y}$,
4) $(a^x)^y = a^{xy}$,
5) $(ab)^x = a^x b^x$,
6) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$,
7) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.

Графік показникової функції

Графіки показникової функції зображено на мал. При цьому істотно різні два випадки:

- при $a > 1$ функція $y = a^x$ є зростаючою,
- а при $0 < a < 1$ вона є спадною.

$y = a^x$



$y(0) = a^0 = 1$

$y(1) = a$

Рівняння $a^x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$. Логарифм

Нехай $a > 0$, $a \neq 1$.

Розглянемо рівняння $a^x = b$.

- Якщо $b > 0$, то рівняння $a^x = b$ має єдиний корінь, який називається логарифмом числа b за основою a і позначається $\log_a b$, тобто $a^x = b \iff x = \log_a b$.
- При $b \leq 0$ рівняння $a^x = b$ не має розв'язків, а логарифм із від'ємних чисел і числа 0 не визначений.

Наприклад, $2^x = 5 \iff x = \log_2 5$;
$2^x = 16 \iff x = \log_2 16 = 4$;
$2^x = 1/8 \iff x = \log_2(1/8) = -3$;
$2^x = \sqrt{2} \iff x = \log_2 \sqrt{2} = 1/2$;
$2^x = -2 \iff x \in \varnothing$.

Для логарифмів за основою 10 використовується позначення $\lg b$, тобто $\lg b = \log_{10} b$.

Рівняння $a^x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$. Логарифм

Нехай $a > 0$, $a \neq 1$.
Розглянемо рівняння $a^x = b$.

- Якщо $b > 0$, то рівняння $a^x = b$ має єдиний корінь, який називається логарифмом числа b за основою a і позначається $\log_a b$, тобто $a^x = b \iff x = \log_a b$.
- При $b \leq 0$ рівняння $a^x = b$ не має розв'язків, а логарифм із від'ємних чисел і числа 0 не визначений.

Наприклад, $2^x = 5 \iff x = \log_2 5$;
$2^x = 16 \iff x = \log_2 16 = 4$;
$2^x = 1/8 \iff x = \log_2(1/8) = -3$;
$2^x = \sqrt{2} \iff x = \log_2 \sqrt{2} = 1/2$;
$2^x = -2 \iff x \in \varnothing$.
Для логарифмів за основою 10 використовується позначення $\lg b$, тобто $\lg b = \log_{10} b$.

Рівняння $a^x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$. Логарифм

Нехай $a > 0$, $a \neq 1$.
Розглянемо рівняння $a^x = b$.

- Якщо $b > 0$, то рівняння $a^x = b$ має єдиний корінь, який називається логарифмом числа b за основою a і позначається $\log_a b$, тобто $a^x = b \iff x = \log_a b$.
- При $b \leq 0$ рівняння $a^x = b$ не має розв'язків, а логарифм із від'ємних чисел і числа 0 не визначений.

Наприклад, $2^x = 5 \iff x = \log_2 5$;
$2^x = 16 \iff x = \log_2 16 = 4$;
$2^x = 1/8 \iff x = \log_2(1/8) = -3$;
$2^x = \sqrt{2} \iff x = \log_2 \sqrt{2} = 1/2$;
$2^x = -2 \iff x \in \varnothing$.
Для логарифмів за основою 10 використовується позначення $\lg b$, тобто $\lg b = \log_{10} b$.

Рівняння $a^x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$. Логарифм

Нехай $a > 0$, $a \neq 1$.
Розглянемо рівняння $a^x = b$.

- Якщо $b > 0$, то рівняння $a^x = b$ має єдиний корінь, який називається логарифмом числа b за основою a і позначається $\log_a b$, тобто $a^x = b \iff x = \log_a b$.
- При $b \leq 0$ рівняння $a^x = b$ не має розв'язків, а логарифм із від'ємних чисел і числа 0 не визначений.

Наприклад, $2^x = 5 \iff x = \log_2 5$;
$2^x = 16 \iff x = \log_2 16 = 4$;
$2^x = 1/8 \iff x = \log_2 (1/8) = -3$;
$2^x = \sqrt{2} \iff x = \log_2 \sqrt{2} = 1/2$;
$2^x = -2 \iff x \in \varnothing$.

Для логарифмів за основою 10 використовується позначення $\lg b$, тобто $\lg b = \log_{10} b$.

Рівняння $a^x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$. Логарифм

Нехай $a > 0$, $a \neq 1$.
Розглянемо рівняння $a^x = b$.

- Якщо $b > 0$, то рівняння $a^x = b$ має єдиний корінь, який називається логарифмом числа b за основою a і позначається $\log_a b$, тобто $a^x = b \iff x = \log_a b$.
- При $b \leq 0$ рівняння $a^x = b$ не має розв'язків, а логарифм із від'ємних чисел і числа 0 не визначений.

Наприклад, $2^x = 5 \iff x = \log_2 5$;
$2^x = 16 \iff x = \log_2 16 = 4$;
$2^x = 1/8 \iff x = \log_2 (1/8) = -3$;
$2^x = \sqrt{2} \iff x = \log_2 \sqrt{2} = 1/2$;
$2^x = -2 \iff x \in \varnothing$.
Для логарифмів за основою 10 використовується позначення $\lg b$, тобто $\lg b = \log_{10} b$.

Основні властивості логарифмів

За означенням логарифма $\boxed{a^{\log_a b} = b}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, тобто $\log_a b$ – це показник степеня, до якого потрібно піднести основу a, щоб отримати число b.

Логарифми володіють наступними властивостями:

1) $\log_a a = 1$,	$a > 0, a \neq 1$,
2) $\log_a 1 = 0$,	$a > 0, a \neq 1$,
3) $\log_a (xy) = \log_a \|x\| + \log_a \|y\|$,	$xy > 0, a > 0, a \neq 1$,
4) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a \|x\| - \log_a \|y\|$,	$xy > 0, a > 0, a \neq 1$,
5) $\log_a x^{\alpha} = \alpha \log_a x$,	$x > 0, \alpha \in \mathbf{R}, a > 0, a \neq 1$,
6) $\log_a x^{2n} = 2n \log_a \|x\|$,	$n \in \mathbf{Z}, x \neq 0, a > 0, a \neq 1$,
7) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$,	$x > 0, a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$.

Основні властивості логарифмів

За означенням логарифма $\boxed{a^{\log_a b} = b}$ при $a > 0, \quad a \neq 1,$ $b > 0$, тобто $\log_a b$ – це показник степеня, до якого потрібно піднести основу a, щоб отримати число b.

Логарифми володіють наступними властивостями:

1) $\log_a a = 1$,	$a > 0, a \neq 1$,
2) $\log_a 1 = 0$,	$a > 0, a \neq 1$,
3) $\log_a (xy) = \log_a \lvert x\rvert + \log_a \lvert y\rvert$,	$xy > 0, a > 0, a \neq 1$,
4) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a \lvert x\rvert - \log_a \lvert y\rvert$,	$xy > 0, a > 0, a \neq 1$,
5) $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$,	$x > 0, \alpha \in \mathbf{R}, a > 0, a \neq 1$,
6) $\log_a x^{2n} = 2n \log_a \lvert x\rvert$,	$n \in \mathbf{Z}, x \neq 0, a > 0, a \neq 1$,
7) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$,	$x > 0, a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$.

Основні властивості логарифмів

Слід звернути увагу на істотну відмінність між зовні схожими властивостями

5) $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$, $\quad x > 0,\ \alpha \in \mathbf{R},\ a > 0,\ a \neq 1$,

6) $\log_a x^{2n} = 2n \log_a |x|$, $\quad n \in \mathbf{Z},\ x \neq 0,\ a > 0,\ a \neq 1$

(тут червоним кольором виділені самі істотні умови, які і дають можливість відрізнити одну властивість від іншої).

Так, у властивості 6, на відміну від властивості 5, у лівій частині рівності x може бути від'ємним числом, і тому в правій частині рівності з'являється модуль, інакше $\log_a x$ при від'ємному x буде не визначений.

Наприклад, $\log_3(1-\sqrt{2})^2 \neq 2\log_3(1-\sqrt{2})$, оскільки $1-\sqrt{2} < 0$ і $\log_3(1-\sqrt{2})$ не визначений.

Істинними тут є рівності

$\log_3(1-\sqrt{2})^2 = 2\log_3|1-\sqrt{2}| = 2\log_3(\sqrt{2}-1)$.

Основні властивості логарифмів

Аналогічними за своїм змістом є властивості

3) $\log_a(xy) = \log_a|x| + \log_a|y|, \qquad xy > 0, a > 0, a \neq 1,$

4) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a|x| - \log_a|y|, \qquad xy > 0, a > 0, a \neq 1,$

справедливі за умови $xy > 0$, яка означає, що значення x і y повинні бути одного знаку (тобто обидва додатні або обидва від'ємні). При цьому у випадку, коли x і y від'ємні, в правій частині рівностей істотним є наявність модулів.

Відзначимо також, що наслідком формули переходу до нової основи

7) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \qquad x > 0, a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1,$

при $x = b$ є рівність

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \qquad a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1.$$

Основні властивості логарифмів

Аналогічними за своїм змістом є властивості

3) $\log_a(xy) = \log_a|x| + \log_a|y|$, $\quad xy > 0, a > 0, a \neq 1$,

4) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a|x| - \log_a|y|$, $\quad xy > 0, a > 0, a \neq 1$,

справедливі за умови $xy > 0$, яка означає, що значення x і y повинні бути одного знаку (тобто обидва додатні або обидва від'ємні). При цьому у випадку, коли x і y від'ємні, в правій частині рівностей істотним є наявність модулів.

Відзначимо також, що наслідком формули переходу до нової основи

7) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, $\quad x > 0, a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$,

при $x = b$ є рівність

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1.$$

Приклади

Приклад 1. Обчислити $\log_3\left(2\log_{11}\sqrt{\sqrt[3]{11}}\right)$.

Розв'язання. Перетворюючи корені в степінь з дробовим показником, а потім використовуючи властивість логарифма від степеня, отримуємо

$$\log_3\left(2\log_{11}\sqrt{\sqrt[3]{11}}\right)=\log_3\left(2\log_{11}(11^{1/3})^{1/2}\right)=$$

$$=\log_3\left(2\log_{11}11^{1/6}\right)=\log_3\left(2\cdot\frac{1}{6}\right)=\log_3\frac{1}{3}=-1\,.$$

Відповідь: -1.

Приклад 2. Обчислити $\log_{(2+\sqrt{3})}(7-4\sqrt{3})$.

Розв'язання. Зазначимо, що $7-4\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^2$. Оскільки $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$, то $2-\sqrt{3}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=(2+\sqrt{3})^{-1}$. Отже,

$$\log_{(2+\sqrt{3})}(7-4\sqrt{3})=\log_{(2+\sqrt{3})}(2-\sqrt{3})^2=$$

$$=\log_{(2+\sqrt{3})}\left((2+\sqrt{3})^{-1}\right)^2=\log_{(2+\sqrt{3})}(2+\sqrt{3})^{-2}=-2\,.$$

Відповідь: -2.

Приклади

Приклад 1. Обчислити $\log_3\left(2\log_{11}\sqrt{\sqrt[3]{11}}\right)$.

Розв'язання. Перетворюючи корені в степінь з дробовим показником, а потім використовуючи властивість логарифма від степеня, отримуємо

$$\log_3\left(2\log_{11}\sqrt{\sqrt[3]{11}}\right) = \log_3\left(2\log_{11}(11^{1/3})^{1/2}\right) =$$

$$= \log_3\left(2\log_{11}11^{1/6}\right) = \log_3\left(2\cdot\frac{1}{6}\right) = \log_3\frac{1}{3} = -1\,.$$

Відповідь: -1.

Приклад 2. Обчислити $\log_{(2+\sqrt{3})}(7-4\sqrt{3})$.

Розв'язання. Зазначимо, що $7-4\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^2$. Оскільки $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4-3 = 1$, то $2-\sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = (2+\sqrt{3})^{-1}$. Отже,

$$\log_{(2+\sqrt{3})}(7-4\sqrt{3}) = \log_{(2+\sqrt{3})}(2-\sqrt{3})^2 =$$

$$= \log_{(2+\sqrt{3})}\left((2+\sqrt{3})^{-1}\right)^2 = \log_{(2+\sqrt{3})}(2+\sqrt{3})^{-2} = -2\,.$$

Відповідь: -2.

Приклади

Приклад 1. Обчислити $\log_3\left(2\log_{11}\sqrt{\sqrt[3]{11}}\right)$.

Розв'язання. Перетворюючи корені в степінь з дробовим показником, а потім використовуючи властивість логарифма від степеня, отримуємо

$$\log_3\left(2\log_{11}\sqrt{\sqrt[3]{11}}\right)=\log_3\left(2\log_{11}(11^{1/3})^{1/2}\right)=$$

$$=\log_3\left(2\log_{11}11^{1/6}\right)=\log_3\left(2\cdot\frac{1}{6}\right)=\log_3\frac{1}{3}=-1\,.$$

Відповідь: -1.

Приклад 2. Обчислити $\log_{(2+\sqrt{3})}(7-4\sqrt{3})$.

Розв'язання. Зазначимо, що $7-4\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^2$. Оскільки $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$, то $2-\sqrt{3}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=(2+\sqrt{3})^{-1}$. Отже,

$$\log_{(2+\sqrt{3})}(7-4\sqrt{3})=\log_{(2+\sqrt{3})}(2-\sqrt{3})^2=$$

$$=\log_{(2+\sqrt{3})}\left((2+\sqrt{3})^{-1}\right)^2=\log_{(2+\sqrt{3})}(2+\sqrt{3})^{-2}=-2\,.$$

Відповідь: -2.

Приклади

Приклад 1. Обчислити $\log_3\left(2\log_{11}\sqrt{\sqrt[3]{11}}\right)$.

Розв'язання. Перетворюючи корені в степінь з дробовим показником, а потім використовуючи властивість логарифма від степеня, отримуємо

$$\log_3\left(2\log_{11}\sqrt{\sqrt[3]{11}}\right) = \log_3\left(2\log_{11}(11^{1/3})^{1/2}\right) =$$

$$= \log_3\left(2\log_{11}11^{1/6}\right) = \log_3\left(2\cdot\frac{1}{6}\right) = \log_3\frac{1}{3} = -1\,.$$

Відповідь: -1.

Приклад 2. Обчислити $\log_{(2+\sqrt{3})}(7-4\sqrt{3})$.

Розв'язання. Зазначимо, що $7-4\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^2$. Оскільки $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$, то $2-\sqrt{3}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=(2+\sqrt{3})^{-1}$. Отже,

$$\log_{(2+\sqrt{3})}(7-4\sqrt{3}) = \log_{(2+\sqrt{3})}(2-\sqrt{3})^2 =$$

$$= \log_{(2+\sqrt{3})}\left((2+\sqrt{3})^{-1}\right)^2 = \log_{(2+\sqrt{3})}(2+\sqrt{3})^{-2} = -2\,.$$

Відповідь: -2.

Приклади

Приклад 1. Обчислити $\log_3\left(2\log_{11}\sqrt{\sqrt[3]{11}}\right)$.

Розв'язання. Перетворюючи корені в степінь з дробовим показником, а потім використовуючи властивість логарифма від степеня, отримуємо

$$\log_3\left(2\log_{11}\sqrt{\sqrt[3]{11}}\right) = \log_3\left(2\log_{11}(11^{1/3})^{1/2}\right) =$$

$$= \log_3\left(2\log_{11}11^{1/6}\right) = \log_3\left(2\cdot\frac{1}{6}\right) = \log_3\frac{1}{3} = -1\,.$$

Відповідь: -1.

Приклад 2. Обчислити $\log_{(2+\sqrt{3})}(7-4\sqrt{3})$.

Розв'язання. Зазначимо, що $7-4\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^2$. Оскільки $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4-3 = 1$, то $2-\sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = (2+\sqrt{3})^{-1}$. Отже,

$$\log_{(2+\sqrt{3})}(7-4\sqrt{3}) = \log_{(2+\sqrt{3})}(2-\sqrt{3})^2 =$$

$$= \log_{(2+\sqrt{3})}\left((2+\sqrt{3})^{-1}\right)^2 = \log_{(2+\sqrt{3})}(2+\sqrt{3})^{-2} = -2\,.$$

Відповідь: -2.

Приклади

Приклад 1. Обчислити $\log_3\left(2\log_{11}\sqrt{\sqrt[3]{11}}\right)$.

Розв'язання. Перетворюючи корені в степінь з дробовим показником, а потім використовуючи властивість логарифма від степеня, отримуємо

$$\log_3\left(2\log_{11}\sqrt{\sqrt[3]{11}}\right) = \log_3\left(2\log_{11}(11^{1/3})^{1/2}\right) =$$

$$= \log_3\left(2\log_{11} 11^{1/6}\right) = \log_3\left(2\cdot\tfrac{1}{6}\right) = \log_3\tfrac{1}{3} = -1\,.$$

Відповідь: -1.

Приклад 2. Обчислити $\log_{(2+\sqrt{3})}(7-4\sqrt{3})$.

Розв'язання. Зазначимо, що $7-4\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^2$. Оскільки $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4-3 = 1$, то $2-\sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = (2+\sqrt{3})^{-1}$. Отже,

$$\log_{(2+\sqrt{3})}(7-4\sqrt{3}) = \log_{(2+\sqrt{3})}(2-\sqrt{3})^2 =$$

$$= \log_{(2+\sqrt{3})}\left((2+\sqrt{3})^{-1}\right)^2 = \log_{(2+\sqrt{3})}(2+\sqrt{3})^{-2} = -2\,.$$

Відповідь: -2.

Приклади

Приклад 3. Обчислити $7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}+125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів і властивості степеня, спрощуємо кожен з доданків до вигляду $\boxed{a^{\log_a b}=b}$ (при $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$), а саме:

$$7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}=7^{\frac{\log_7(\sqrt{5}-3)^2}{\log_7 49}}=7^{\frac{1}{2}\log_7(\sqrt{5}-3)^2}=7^{\frac{1}{2}\cdot 2\log_7|\sqrt{5}-3|}=$$

$$=7^{\log_7|\sqrt{5}-3|}=|\sqrt{5}-3|=3-\sqrt{5}, \quad \text{оскільки } \sqrt{5}-3<0;$$

$$125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}=(5^3)^{\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{\log_5(5\sqrt{5})}}=5^{3\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{\log_5 5^{3/2}}}=5^{3\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{3/2}}=$$

$$=5^{2\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}=5^{\log_5\left(\sqrt{\sqrt{5}+3}\right)^2}=5^{\log_5(\sqrt{5}+3)}=\sqrt{5}+3.$$

В результаті маємо

$$7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}+125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}=3-\sqrt{5}+\sqrt{5}+3=6.$$

Відповідь: 6.

Приклади

Приклад 3. Обчислити $7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}+125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів і властивості степеня, спрощуємо кожен з доданків до вигляду $\boxed{a^{\log_a b}=b}$ (при $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$), а саме:

$$7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}=7^{\frac{\log_7(\sqrt{5}-3)^2}{\log_7 49}}=7^{\frac{1}{2}\log_7(\sqrt{5}-3)^2}=7^{\frac{1}{2}\cdot 2\log_7|\sqrt{5}-3|}=$$

$$=7^{\log_7|\sqrt{5}-3|}=|\sqrt{5}-3|=3-\sqrt{5}, \quad \text{оскільки } \sqrt{5}-3<0;$$

$$125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}=(5^3)^{\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{\log_5(5\sqrt{5})}}=5^{3\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{\log_5 5^{3/2}}}=5^{3\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{3/2}}=$$

$$=5^{2\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}=5^{\log_5\left(\sqrt{\sqrt{5}+3}\right)^2}=5^{\log_5(\sqrt{5}+3)}=\sqrt{5}+3.$$

В результаті маємо

$$7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}+125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}=3-\sqrt{5}+\sqrt{5}+3=6.$$

Відповідь: 6.

Приклади

Приклад 3. Обчислити $7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}+125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів і властивості степеня, спрощуємо кожен з доданків до вигляду $\boxed{a^{\log_a b}=b}$ (при $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$), а саме:

$$7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}=7^{\frac{\log_7(\sqrt{5}-3)^2}{\log_7 49}}=7^{\frac{1}{2}\log_7(\sqrt{5}-3)^2}=7^{\frac{1}{2}\cdot 2\log_7|\sqrt{5}-3|}=$$

$$=7^{\log_7|\sqrt{5}-3|}=|\sqrt{5}-3|=3-\sqrt{5}, \quad \text{оскільки } \sqrt{5}-3<0;$$

$$125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}=(5^3)^{\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{\log_5(5\sqrt{5})}}=5^{3\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{\log_5 5^{3/2}}}=5^{3\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{3/2}}=$$

$$=5^{2\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}=5^{\log_5\left(\sqrt{\sqrt{5}+3}\right)^2}=5^{\log_5(\sqrt{5}+3)}=\sqrt{5}+3.$$

В результаті маємо

$$7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}+125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}=3-\sqrt{5}+\sqrt{5}+3=6.$$

Відповідь: 6.

Приклади

Приклад 3. Обчислити $7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}+125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів і властивості степеня, спрощуємо кожен з доданків до вигляду $\boxed{a^{\log_a b}=b}$ (при $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$), а саме:

$$7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}=7^{\frac{\log_7(\sqrt{5}-3)^2}{\log_7 49}}=7^{\frac{1}{2}\log_7(\sqrt{5}-3)^2}=7^{\frac{1}{2}\cdot 2\log_7|\sqrt{5}-3|}=$$

$$=7^{\log_7|\sqrt{5}-3|}=|\sqrt{5}-3|=3-\sqrt{5},\quad \text{оскільки } \sqrt{5}-3<0;$$

$$125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}=(5^3)^{\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{\log_5(5\sqrt{5})}}=5^{3\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{\log_5 5^{3/2}}}=5^{3\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{3/2}}=$$

$$=5^{2\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}=5^{\log_5\left(\sqrt{\sqrt{5}+3}\right)^2}=5^{\log_5(\sqrt{5}+3)}=\sqrt{5}+3.$$

В результаті маємо

$$7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}+125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}=3-\sqrt{5}+\sqrt{5}+3=6.$$

Відповідь: 6.

Приклади

Приклад 3. Обчислити $7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}+125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів і властивості степеня, спрощуємо кожен з доданків до вигляду $\boxed{a^{\log_a b}=b}$ (при $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$), а саме:

$$7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}=7^{\frac{\log_7(\sqrt{5}-3)^2}{\log_7 49}}=7^{\frac{1}{2}\log_7(\sqrt{5}-3)^2}=7^{\frac{1}{2}\cdot 2\log_7|\sqrt{5}-3|}=$$

$$=7^{\log_7|\sqrt{5}-3|}=|\sqrt{5}-3|=3-\sqrt{5},\quad \text{оскільки } \sqrt{5}-3<0;$$

$$125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}=(5^3)^{\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{\log_5(5\sqrt{5})}}=5^{3\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{\log_5 5^{3/2}}}=5^{3\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{3/2}}=$$

$$=5^{2\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}=5^{\log_5\left(\sqrt{\sqrt{5}+3}\right)^2}=5^{\log_5(\sqrt{5}+3)}=\sqrt{5}+3.$$

В результаті маємо

$$7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}+125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}=3-\sqrt{5}+\sqrt{5}+3=6.$$

Відповідь: 6.

Приклади

Приклад 3. Обчислити $7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}+125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів і властивості степеня, спрощуємо кожен з доданків до вигляду $\boxed{a^{\log_a b}=b}$ (при $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$), а саме:

$$7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}=7^{\frac{\log_7(\sqrt{5}-3)^2}{\log_7 49}}=7^{\frac{1}{2}\log_7(\sqrt{5}-3)^2}=7^{\frac{1}{2}\cdot 2\log_7|\sqrt{5}-3|}=$$

$$=7^{\log_7|\sqrt{5}-3|}=|\sqrt{5}-3|=3-\sqrt{5}, \quad \text{оскільки } \sqrt{5}-3<0;$$

$$125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}=(5^3)^{\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{\log_5(5\sqrt{5})}}=5^{3\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{\log_5 5^{3/2}}}=5^{3\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{3/2}}=$$

$$=5^{2\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}=5^{\log_5\left(\sqrt{\sqrt{5}+3}\right)^2}=5^{\log_5(\sqrt{5}+3)}=\sqrt{5}+3.$$

В результаті маємо

$$7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}+125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}=3-\sqrt{5}+\sqrt{5}+3=6.$$

Відповідь: 6.

Приклади

Приклад 3. Обчислити $7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}+125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів і властивості степеня, спрощуємо кожен з доданків до вигляду $\boxed{a^{\log_a b}=b}$ (при $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$), а саме:

$$7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}=7^{\frac{\log_7(\sqrt{5}-3)^2}{\log_7 49}}=7^{\frac{1}{2}\log_7(\sqrt{5}-3)^2}=7^{\frac{1}{2}\cdot 2\log_7|\sqrt{5}-3|}=$$

$$=7^{\log_7|\sqrt{5}-3|}=|\sqrt{5}-3|=3-\sqrt{5},\quad \text{оскільки } \sqrt{5}-3<0;$$

$$125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}=(5^3)^{\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{\log_5(5\sqrt{5})}}=5^{3\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{\log_5 5^{3/2}}}=5^{3\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{3/2}}=$$

$$=5^{2\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}=5^{\log_5\left(\sqrt{\sqrt{5}+3}\right)^2}=5^{\log_5(\sqrt{5}+3)}=\sqrt{5}+3.$$

В результаті маємо

$$7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}+125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}=3-\sqrt{5}+\sqrt{5}+3=6.$$

Відповідь: 6.

Приклади

Приклад 3. Обчислити $7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}+125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів і властивості степеня, спрощуємо кожен з доданків до вигляду $\boxed{a^{\log_a b}=b}$ (при $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$), а саме:

$$7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}=7^{\frac{\log_7(\sqrt{5}-3)^2}{\log_7 49}}=7^{\frac{1}{2}\log_7(\sqrt{5}-3)^2}=7^{\frac{1}{2}\cdot 2\log_7|\sqrt{5}-3|}=$$

$$=7^{\log_7|\sqrt{5}-3|}=|\sqrt{5}-3|=3-\sqrt{5}\,,\quad \text{оскільки } \sqrt{5}-3<0\,;$$

$$125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}=(5^3)^{\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{\log_5(5\sqrt{5})}}=5^{3\,\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{\log_5 5^{3/2}}}=5^{3\,\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{3/2}}=$$

$$=5^{2\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}=5^{\log_5\left(\sqrt{\sqrt{5}+3}\right)^2}=5^{\log_5(\sqrt{5}+3)}=\sqrt{5}+3\,.$$

В результаті маємо

$$7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}+125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}=3-\sqrt{5}+\sqrt{5}+3=6\,.$$

Відповідь: 6.

Приклади

Приклад 3. Обчислити $7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}+125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів і властивості степеня, спрощуємо кожен з доданків до вигляду $\boxed{a^{\log_a b}=b}$ (при $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$), а саме:

$$7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}=7^{\frac{\log_7(\sqrt{5}-3)^2}{\log_7 49}}=7^{\frac{1}{2}\log_7(\sqrt{5}-3)^2}=7^{\frac{1}{2}\cdot 2\log_7|\sqrt{5}-3|}=$$

$$=7^{\log_7|\sqrt{5}-3|}=|\sqrt{5}-3|=3-\sqrt{5}, \quad \text{оскільки } \sqrt{5}-3<0;$$

$$125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}=(5^3)^{\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{\log_5(5\sqrt{5})}}=5^{3\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{\log_5 5^{3/2}}}=5^{3\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{3/2}}=$$

$$=5^{2\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}=5^{\log_5\left(\sqrt{\sqrt{5}+3}\right)^2}=5^{\log_5(\sqrt{5}+3)}=\sqrt{5}+3.$$

В результаті маємо

$$7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}+125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}=3-\sqrt{5}+\sqrt{5}+3=6.$$

Відповідь: 6.

Приклади

Приклад 3. Обчислити $7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}+125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів і властивості степеня, спрощуємо кожен з доданків до вигляду $\boxed{a^{\log_a b}=b}$ (при $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$), а саме:

$$7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}=7^{\frac{\log_7(\sqrt{5}-3)^2}{\log_7 49}}=7^{\frac{1}{2}\log_7(\sqrt{5}-3)^2}=7^{\frac{1}{2}\cdot 2\log_7|\sqrt{5}-3|}=$$

$$=7^{\log_7|\sqrt{5}-3|}=|\sqrt{5}-3|=3-\sqrt{5}, \quad \text{оскільки } \sqrt{5}-3<0;$$

$$125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}=(5^3)^{\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{\log_5(5\sqrt{5})}}=5^{3\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{\log_5 5^{3/2}}}=5^{3\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{3/2}}=$$

$$=5^{2\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}=5^{\log_5\left(\sqrt{\sqrt{5}+3}\right)^2}=5^{\log_5(\sqrt{5}+3)}=\sqrt{5}+3.$$

В результаті маємо

$$7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}+125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}=3-\sqrt{5}+\sqrt{5}+3=6.$$

Відповідь: 6.

Приклади

Приклад 3. Обчислити $7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}+125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів і властивості степеня, спрощуємо кожен з доданків до вигляду $\boxed{a^{\log_a b}=b}$ (при $a>0,\ \ a\neq 1,\ \ b>0$), а саме:

$$7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}=7^{\frac{\log_7(\sqrt{5}-3)^2}{\log_7 49}}=7^{\frac{1}{2}\log_7(\sqrt{5}-3)^2}=7^{\frac{1}{2}\cdot 2\log_7|\sqrt{5}-3|}=$$

$$=7^{\log_7|\sqrt{5}-3|}=|\sqrt{5}-3|=3-\sqrt{5},\quad \text{оскільки } \sqrt{5}-3<0;$$

$$125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}=(5^3)^{\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{\log_5(5\sqrt{5})}}=5^{3\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{\log_5 5^{3/2}}}=5^{3\frac{\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}{3/2}}=$$

$$=5^{2\log_5\sqrt{\sqrt{5}+3}}=5^{\log_5\left(\sqrt{\sqrt{5}+3}\right)^2}=5^{\log_5(\sqrt{5}+3)}=\sqrt{5}+3.$$

В результаті маємо

$$7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2}+125^{\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}}=3-\sqrt{5}+\sqrt{5}+3=6.$$

Відповідь: 6.

Приклади

Приклад 4. Знайти $\log_{30} 12$, якщо $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$.

Розв'язання. Використаємо формулу переходу до нової основи логарифма (основи 10):

$$\log_{30} 12 = \frac{\lg 12}{\lg 30}.$$

Далі, використовуючи раозклади $12 = 3 \cdot 2^2$, $30 = 3 \cdot 10$ і властивості логарифмів, отримуємо

$$\frac{\lg 12}{\lg 30} = \frac{\lg(3 \cdot 2^2)}{\lg(3 \cdot 10)} = \frac{\lg 3 + \cdot \lg 2^2}{\lg 3 + \lg 10} = \frac{\lg 3 + 2 \cdot \lg 2}{\lg 3 + \lg 10} = \frac{b + 2a}{b + 1}.$$

Відповідь: $\log_{30} 12 = \dfrac{b + 2a}{b + 1}$.

Приклади

Приклад 4. Знайти $\log_{30} 12$, якщо $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$.

Розв'язання. Використаємо формулу переходу до нової основи логарифма (основи 10):

$$\log_{30} 12 = \frac{\lg 12}{\lg 30}.$$

Далі, використовуючи раозклади $12 = 3 \cdot 2^2$, $30 = 3 \cdot 10$ і властивості логарифмів, отримуємо

$$\frac{\lg 12}{\lg 30} = \frac{\lg(3 \cdot 2^2)}{\lg(3 \cdot 10)} = \frac{\lg 3 + \cdot \lg 2^2}{\lg 3 + \lg 10} = \frac{\lg 3 + 2 \cdot \lg 2}{\lg 3 + \lg 10} = \frac{b + 2a}{b + 1}.$$

Відповідь: $\log_{30} 12 = \frac{b + 2a}{b + 1}$.

Приклади

Приклад 4. Знайти $\log_{30} 12$, якщо $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$.

Розв'язання. Використаємо формулу переходу до нової основи логарифма (основи 10):

$$\log_{30} 12 = \frac{\lg 12}{\lg 30}.$$

Далі, використовуючи раозклади $12 = 3 \cdot 2^2$, $30 = 3 \cdot 10$ і властивості логарифмів, отримуємо

$$\frac{\lg 12}{\lg 30} = \frac{\lg(3 \cdot 2^2)}{\lg(3 \cdot 10)} = \frac{\lg 3 + \cdot \lg 2^2}{\lg 3 + \lg 10} = \frac{\lg 3 + 2 \cdot \lg 2}{\lg 3 + \lg 10} = \frac{b + 2a}{b + 1}.$$

Відповідь: $\log_{30} 12 = \dfrac{b + 2a}{b + 1}$.

Область визначення функції $y = \log_{\varphi(x)} f(x)$

Оскільки логарифми визначені не для всіх чисел, а також не за довільною основою, то на область визначення функції $y = \log_{\varphi(x)} f(x)$ накладається ряд обмежень, а саме: основа $\varphi(x)$ логарифма повинна бути додатньою і не рівною одиниці, а функція $f(x)$ також повинна приймати додатні значення.

Отже,

- область визначення функції $y = \log_{\varphi(x)} f(x)$ знаходиться в результаті розв'язання системи нерівностей

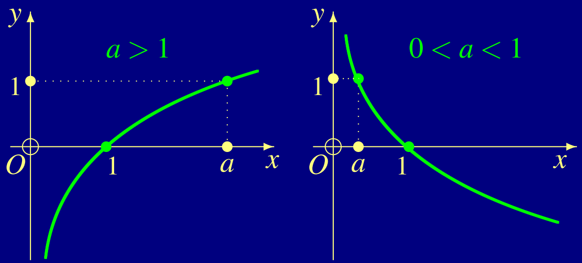
$$\begin{cases} \varphi(x) > 0\,, \\ \varphi(x) \neq 1\,, \\ f(x) > 0\,. \end{cases}$$

Графік логарифмічної функції

Областю визначення логарифмичної функції $y = \log_a x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, є проміжок $(0, \infty)$.
Графіки логарифмічної функції зображено на мал. При цьому істотно різні два випадки:

- при $a > 1$ функція $y = \log_a x$ є зростаючою,
- а при $0 < a < 1$ вона є спадною.

$y = \log_a x$



$D(y) = (0, \infty)$
$y(1) = \log_a 1 = 0$
$y(a) = \log_a a = 1$

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2017 р.). Нехай m і n – довільні дійсні числа, a – довільне додатнє число, $a \neq 1$. До кожного початку речення (1-4) доберіть його закінчення (А-Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення

1) Якщо $(a^m)^n = a^4$, то
2) Якщо $a^m \cdot a^n = a^4$, то
3) Якщо $\sqrt[8]{a^m} = \sqrt{a^n}$, то
4) Якщо $\dfrac{a^n}{a^m} = \dfrac{1}{a^4}$, то

Закінчення речення

А) $m+n=4$.
Б) $m-n=4$.
В) $mn=4$.
Г) $m=4n$.
Д) $m=8n$.

Розв'язання. За властивостями степеня маємо:
1) $a^4 = (a^m)^n = a^{mn}$, тому $mn = 4$;
2) $a^4 = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, тому $m+n=4$;
3) $a^{m/8} = a^{n/2}$, тому $m/8 = n/2$, звідки $m = 4n$;
4) $a^{n-m} = a^{-4}$, тому $n-m=-4$, звідки $m-n=4$.

Відповідь: 1-В, 2-А, 3-Г, 4-Б.

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2017 р.). Нехай m і n – довільні дійсні числа, a – довільне додатне число, $a \neq 1$. До кожного початку речення (1-4) доберіть його закінчення (А-Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення

1) Якщо $(a^m)^n = a^4$, то
2) Якщо $a^m \cdot a^n = a^4$, то
3) Якщо $\sqrt[8]{a^m} = \sqrt{a^n}$, то
4) Якщо $\dfrac{a^n}{a^m} = \dfrac{1}{a^4}$, то

Закінчення речення

А) $m+n=4$.
Б) $m-n=4$.
В) $mn=4$.
Г) $m=4n$.
Д) $m=8n$.

Розв'язання. За властивостями степеня маємо:

1) $a^4 = (a^m)^n = a^{mn}$, тому $mn = 4$;
2) $a^4 = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, тому $m+n=4$;
3) $a^{m/8} = a^{n/2}$, тому $m/8 = n/2$, звідки $m = 4n$;
4) $a^{n-m} = a^{-4}$, тому $n-m=-4$, звідки $m-n=4$.

Відповідь: 1-В, 2-А, 3-Г, 4-Б.

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2017 р.). Нехай m і n – довільні дійсні числа, a – довільне додатнє число, $a \neq 1$. До кожного початку речення (1-4) доберіть його закінчення (А-Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення

1) Якщо $(a^m)^n = a^4$, то
2) Якщо $a^m \cdot a^n = a^4$, то
3) Якщо $\sqrt[8]{a^m} = \sqrt{a^n}$, то
4) Якщо $\dfrac{a^n}{a^m} = \dfrac{1}{a^4}$, то

Закінчення речення

А) $m+n=4$.
Б) $m-n=4$.
В) $mn=4$.
Г) $m=4n$.
Д) $m=8n$.

Розв'язання. За властивостями степеня маємо:

1) $a^4 = (a^m)^n = a^{mn}$, тому $mn=4$;
2) $a^4 = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, тому $m+n=4$;
3) $a^{m/8} = a^{n/2}$, тому $m/8 = n/2$, звідки $m=4n$;
4) $a^{n-m} = a^{-4}$, тому $n-m=-4$, звідки $m-n=4$.

Відповідь: 1-В, 2-А, 3-Г, 4-Б.

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2017 р.). Нехай m і n – довільні дійсні числа, a – довільне додатнє число, $a \neq 1$. До кожного початку речення (1-4) доберіть його закінчення (А-Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення

1) Якщо $(a^m)^n = a^4$, то
2) Якщо $a^m \cdot a^n = a^4$, то
3) Якщо $\sqrt[8]{a^m} = \sqrt{a^n}$, то
4) Якщо $\dfrac{a^n}{a^m} = \dfrac{1}{a^4}$, то

Закінчення речення

А) $m+n=4$.
Б) $m-n=4$.
В) $mn=4$.
Г) $m=4n$.
Д) $m=8n$.

Розв'язання. За властивостями степеня маємо:

1) $a^4 = (a^m)^n = a^{mn}$, тому $mn = 4$;
2) $a^4 = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, тому $m+n=4$;
3) $a^{m/8} = a^{n/2}$, тому $m/8 = n/2$, звідки $m = 4n$;
4) $a^{n-m} = a^{-4}$, тому $n-m=-4$, звідки $m-n=4$.

Відповідь: 1-В, 2-А, 3-Г, 4-Б.

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2017 р.). Нехай m і n – довільні дійсні числа, a – довільне додатнє число, $a \neq 1$. До кожного початку речення (1-4) доберіть його закінчення (А-Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення

1) Якщо $(a^m)^n = a^4$, то
2) Якщо $a^m \cdot a^n = a^4$, то
3) Якщо $\sqrt[8]{a^m} = \sqrt{a^n}$, то
4) Якщо $\dfrac{a^n}{a^m} = \dfrac{1}{a^4}$, то

Закінчення речення

А) $m+n=4$.
Б) $m-n=4$.
В) $mn=4$.
Г) $m=4n$.
Д) $m=8n$.

Розв'язання. За властивостями степеня маємо:

1) $a^4 = (a^m)^n = a^{mn}$, тому $mn=4$;
2) $a^4 = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, тому $m+n=4$;
3) $a^{m/8} = a^{n/2}$, тому $m/8 = n/2$, звідки $m=4n$;
4) $a^{n-m} = a^{-4}$, тому $n-m=-4$, звідки $m-n=4$.

Відповідь: 1-В, 2-А, 3-Г, 4-Б.

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2017 р.). Нехай m і n – довільні дійсні числа, a – довільне додатнє число, $a \neq 1$. До кожного початку речення (1-4) доберіть його закінчення (А-Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення

1) Якщо $(a^m)^n = a^4$, то
2) Якщо $a^m \cdot a^n = a^4$, то
3) Якщо $\sqrt[8]{a^m} = \sqrt{a^n}$, то
4) Якщо $\dfrac{a^n}{a^m} = \dfrac{1}{a^4}$, то

Закінчення речення

А) $m+n=4$.
Б) $m-n=4$.
В) $mn=4$.
Г) $m=4n$.
Д) $m=8n$.

Розв'язання. За властивостями степеня маємо:

1) $a^4 = (a^m)^n = a^{mn}$, тому $mn=4$;
2) $a^4 = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, тому $m+n=4$;
3) $a^{m/8} = a^{n/2}$, тому $m/8 = n/2$, звідки $m=4n$;
4) $a^{n-m} = a^{-4}$, тому $n-m=-4$, звідки $m-n=4$.

Відповідь: 1-В, 2-А, 3-Г, 4-Б.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2009 р.).

Обчисліть $\dfrac{2^{-1,6}\cdot 4^{4,8}}{8^{2/3}}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості степеня, перетворюємо вираз у степінь двійки:

$$\frac{2^{-1,6}\cdot 4^{4,8}}{8^{2/3}}=\frac{2^{-1,6}\cdot (2^2)^{4,8}}{(2^3)^{2/3}}=\frac{2^{-1,6}\cdot 2^{9,6}}{2^2}=2^{-1,6+9,6-2}=2^6=64\,.$$

Відповідь: 64.

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.).

$\log_5 49+2\log_5\frac{5}{7}=$

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів, отримуємо

$$\log_5 49+2\log_5\tfrac{5}{7}=\log_5 49+\log_5\left(\tfrac{5}{7}\right)^2=\log_5 49+\log_5\tfrac{25}{49}=$$
$$=\log_5\left(49\cdot\tfrac{25}{49}\right)=\log_5 25=2\,.$$

Відповідь: 2.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2009 р.).

Обчисліть $\dfrac{2^{-1,6}\cdot 4^{4,8}}{8^{2/3}}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості степеня, перетворюємо вираз у степінь двійки:

$$\frac{2^{-1,6}\cdot 4^{4,8}}{8^{2/3}}=\frac{2^{-1,6}\cdot (2^2)^{4,8}}{(2^3)^{2/3}}=\frac{2^{-1,6}\cdot 2^{9,6}}{2^2}=2^{-1,6+9,6-2}=2^6=64\,.$$

Відповідь: 64.

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.).

$\log_5 49+2\log_5\frac{5}{7}=$

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів, отримуємо

$$\log_5 49+2\log_5\frac{5}{7}=\log_5 49+\log_5\left(\frac{5}{7}\right)^2=\log_5 49+\log_5\frac{25}{49}=$$

$$=\log_5\left(49\cdot\frac{25}{49}\right)=\log_5 25=2\,.$$

Відповідь: 2.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2009 р.).

Обчисліть $\dfrac{2^{-1,6}\cdot 4^{4,8}}{8^{2/3}}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості степеня, перетворюємо вираз у степінь двійки:

$$\frac{2^{-1,6}\cdot 4^{4,8}}{8^{2/3}} = \frac{2^{-1,6}\cdot (2^2)^{4,8}}{(2^3)^{2/3}} = \frac{2^{-1,6}\cdot 2^{9,6}}{2^2} = 2^{-1,6+9,6-2} = 2^6 = 64\,.$$

Відповідь: 64.

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.).

$\log_5 49 + 2\log_5 \frac{5}{7} =$

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів, отримуємо

$$\log_5 49 + 2\log_5 \tfrac{5}{7} = \log_5 49 + \log_5 \left(\tfrac{5}{7}\right)^2 = \log_5 49 + \log_5 \tfrac{25}{49} =$$
$$= \log_5 \left(49\cdot \tfrac{25}{49}\right) = \log_5 25 = 2\,.$$

Відповідь: 2.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2009 р.).

Обчисліть $\dfrac{2^{-1,6}\cdot 4^{4,8}}{8^{2/3}}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості степеня, перетворюємо вираз у степінь двійки:

$$\frac{2^{-1,6}\cdot 4^{4,8}}{8^{2/3}}=\frac{2^{-1,6}\cdot (2^2)^{4,8}}{(2^3)^{2/3}}=\frac{2^{-1,6}\cdot 2^{9,6}}{2^2}=2^{-1,6+9,6-2}=2^6=64\,.$$

Відповідь: 64.

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.).

$\log_5 49+2\log_5\frac{5}{7}=$

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів, отримуємо

$$\log_5 49+2\log_5\tfrac{5}{7}=\log_5 49+\log_5\left(\tfrac{5}{7}\right)^2=\log_5 49+\log_5\tfrac{25}{49}=$$
$$=\log_5\left(49\cdot\tfrac{25}{49}\right)=\log_5 25=2\,.$$

Відповідь: 2.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2009 р.).

Обчисліть $\dfrac{2^{-1{,}6}\cdot 4^{4{,}8}}{8^{2/3}}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості степеня, перетворюємо вираз у степінь двійки:

$$\frac{2^{-1{,}6}\cdot 4^{4{,}8}}{8^{2/3}}=\frac{2^{-1{,}6}\cdot (2^2)^{4{,}8}}{(2^3)^{2/3}}=\frac{2^{-1{,}6}\cdot 2^{9{,}6}}{2^2}=2^{-1{,}6+9{,}6-2}=2^6=64\,.$$

Відповідь: 64.

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.).

$\log_5 49+2\log_5\frac{5}{7}=$

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів, отримуємо

$$\log_5 49+2\log_5\tfrac{5}{7}=\log_5 49+\log_5\left(\tfrac{5}{7}\right)^2=\log_5 49+\log_5\tfrac{25}{49}=$$
$$=\log_5\left(49\cdot\tfrac{25}{49}\right)=\log_5 25=2\,.$$

Відповідь: 2.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2009 р.).

Обчисліть $\dfrac{2^{-1,6}\cdot 4^{4,8}}{8^{2/3}}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості степеня, перетворюємо вираз у степінь двійки:

$$\frac{2^{-1,6}\cdot 4^{4,8}}{8^{2/3}}=\frac{2^{-1,6}\cdot (2^2)^{4,8}}{(2^3)^{2/3}}=\frac{2^{-1,6}\cdot 2^{9,6}}{2^2}=2^{-1,6+9,6-2}=2^6=64\,.$$

Відповідь: 64.

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.).

$\log_5 49+2\log_5\frac{5}{7}=$

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів, отримуємо

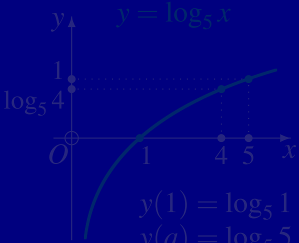
$$\log_5 49+2\log_5\tfrac{5}{7}=\log_5 49+\log_5\left(\tfrac{5}{7}\right)^2=\log_5 49+\log_5\tfrac{25}{49}=$$
$$=\log_5\left(49\cdot\tfrac{25}{49}\right)=\log_5 25=2\,.$$

Відповідь: 2.

Приклади із ЗНО

П р и к л а д 8 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2015 р.).
Вкажіть проміжок, якому належить число $\log_5 4$:
А) $(0;1)$, Б) $(1;2)$, В) $(2;3)$, Г) $(3;4)$, Д) $(4;5)$.

Р о з в' я з а н н я. Розглянемо графік функції $y = \log_5 x$.



$y(1) = \log_5 1 = 0$
$y(a) = \log_5 5 = 1$

Оскільки функція $y = \log_5 x$ – зростаюча, то
$\log_5 1 < \log_5 4 < \log_5 5$, тобто
$0 < \log_5 4 < 1$.

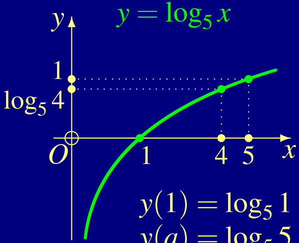
В і д п о в і д ь: А.

Приклади із ЗНО

П р и к л а д 8 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2015 р.). Вкажіть проміжок, якому належить число $\log_5 4$:

А) $(0;1)$, Б) $(1;2)$, В) $(2;3)$, Г) $(3;4)$, Д) $(4;5)$.

Р о з в' я з а н н я. Розглянемо графік функції $y = \log_5 x$.



$y(1) = \log_5 1 = 0$
$y(a) = \log_5 5 = 1$

Оскільки функція $y = \log_5 x$ – зростаюча, то

$\log_5 1 < \log_5 4 < \log_5 5$, тобто

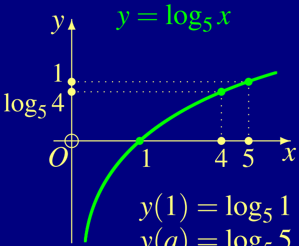
$0 < \log_5 4 < 1$.

В і д п о в і д ь: А.

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2015 р.). Вкажіть проміжок, якому належить число $\log_5 4$:
А) $(0;1)$, Б) $(1;2)$, В) $(2;3)$, Г) $(3;4)$, Д) $(4;5)$.

Розв'язання. Розглянемо графік функції $y = \log_5 x$.



$y(1) = \log_5 1 = 0$
$y(a) = \log_5 5 = 1$

Оскільки функція $y = \log_5 x$ – зростаюча, то
$\log_5 1 < \log_5 4 < \log_5 5$, тобто
$0 < \log_5 4 < 1$.

Відповідь: А.

Приклади із ЗНО

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.). Обчисліть $\log_{1/25}\sqrt{5}$.

Розв'язання. Використовуючи формулу переходу до нової основи (основи 5), отримуємо

$$\log_{1/25}\sqrt{5} = \frac{\log_5\sqrt{5}}{\log_5\frac{1}{25}} = \frac{\log_5 5^{1/2}}{\log_5 5^{-2}} = \frac{1/2}{-2} = -\frac{1}{4} = -0,25.$$

Відповідь: $-0,25$.

Приклад 10 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.). Обчисліть $\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 81$.

Розв'язання. Перетворюючи усі логарифми до основи 3, отримуємо

$$\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 81 = \log_3 4\cdot\frac{\log_3 5}{\log_3 4}\cdot\frac{\log_3 7}{\log_3 5}\cdot\frac{\log_3 81}{\log_3 7} =$$

$$= \log_3 81 = 4.$$

Відповідь: 4.

Приклади із ЗНО

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.). Обчисліть $\log_{1/25}\sqrt{5}$.

Розв'язання. Використовуючи формулу переходу до нової основи (основи 5), отримуємо

$$\log_{1/25}\sqrt{5} = \frac{\log_5\sqrt{5}}{\log_5\frac{1}{25}} = \frac{\log_5 5^{1/2}}{\log_5 5^{-2}} = \frac{1/2}{-2} = -\frac{1}{4} = -0,25\,.$$

Відповідь: $-0,25$.

Приклад 10 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.). Обчисліть $\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 81$.

Розв'язання. Перетворюючи усі логарифми до основи 3, отримуємо

$$\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 81 = \log_3 4\cdot\frac{\log_3 5}{\log_3 4}\cdot\frac{\log_3 7}{\log_3 5}\cdot\frac{\log_3 81}{\log_3 7} =$$
$$= \log_3 81 = 4\,.$$

Відповідь: 4.

Приклади із ЗНО

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.). Обчисліть $\log_{1/25}\sqrt{5}$.

Розв'язання. Використовуючи формулу переходу до нової основи (основи 5), отримуємо

$$\log_{1/25}\sqrt{5} = \frac{\log_5\sqrt{5}}{\log_5\frac{1}{25}} = \frac{\log_5 5^{1/2}}{\log_5 5^{-2}} = \frac{1/2}{-2} = -\frac{1}{4} = -0,25\,.$$

Відповідь: $-0,25$.

Приклад 10 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.). Обчисліть $\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 81$.

Розв'язання. Перетворюючи усі логарифми до основи 3, отримуємо

$$\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 81 = \log_3 4\cdot\frac{\log_3 5}{\log_3 4}\cdot\frac{\log_3 7}{\log_3 5}\cdot\frac{\log_3 81}{\log_3 7} =$$

$$= \log_3 81 = 4\,.$$

Відповідь: 4.

Приклади із ЗНО

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.). Обчисліть $\log_{1/25}\sqrt{5}$.

Розв'язання. Використовуючи формулу переходу до нової основи (основи 5), отримуємо

$$\log_{1/25}\sqrt{5} = \frac{\log_5\sqrt{5}}{\log_5\frac{1}{25}} = \frac{\log_5 5^{1/2}}{\log_5 5^{-2}} = \frac{1/2}{-2} = -\frac{1}{4} = -0,25\,.$$

Відповідь: $-0,25$.

Приклад 10 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.). Обчисліть $\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 81$.

Розв'язання. Перетворюючи усі логарифми до основи 3, отримуємо

$$\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 81 = \log_3 4\cdot\frac{\log_3 5}{\log_3 4}\cdot\frac{\log_3 7}{\log_3 5}\cdot\frac{\log_3 81}{\log_3 7} =$$
$$= \log_3 81 = 4\,.$$

Відповідь: 4.

Приклади із ЗНО

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.). Обчисліть $\log_{1/25}\sqrt{5}$.

Розв'язання. Використовуючи формулу переходу до нової основи (основи 5), отримуємо

$$\log_{1/25}\sqrt{5} = \frac{\log_5\sqrt{5}}{\log_5\frac{1}{25}} = \frac{\log_5 5^{1/2}}{\log_5 5^{-2}} = \frac{1/2}{-2} = -\frac{1}{4} = -0,25\,.$$

Відповідь: $-0,25$.

Приклад 10 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.). Обчисліть $\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 81$.

Розв'язання. Перетворюючи усі логарифми до основи 3, отримуємо

$$\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 81 = \log_3 4\cdot\frac{\log_3 5}{\log_3 4}\cdot\frac{\log_3 7}{\log_3 5}\cdot\frac{\log_3 81}{\log_3 7} =$$
$$= \log_3 81 = 4\,.$$

Відповідь: 4.

Приклади із ЗНО

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.). Обчисліть $\log_{1/25}\sqrt{5}$.

Розв'язання. Використовуючи формулу переходу до нової основи (основи 5), отримуємо

$$\log_{1/25}\sqrt{5} = \frac{\log_5\sqrt{5}}{\log_5\frac{1}{25}} = \frac{\log_5 5^{1/2}}{\log_5 5^{-2}} = \frac{1/2}{-2} = -\frac{1}{4} = -0,25\,.$$

Відповідь: $-0,25$.

Приклад 10 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.). Обчисліть $\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 81$.

Розв'язання. Перетворюючи усі логарифми до основи 3, отримуємо

$$\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 81 = \log_3 4\cdot\frac{\log_3 5}{\log_3 4}\cdot\frac{\log_3 7}{\log_3 5}\cdot\frac{\log_3 81}{\log_3 7} =$$
$$= \log_3 81 = 4\,.$$

Відповідь: 4.

Приклади із ЗНО

Приклад 11 (Пробне тестування ЗНО, 2015 р.).
Обчисліть $36^{\log_6 5}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів і властивості степеня, перетворюємо вираз до вигляду $\boxed{a^{\log_a b} = b}$ (при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$), а саме:
$36^{\log_6 5} = 6^{2\log_6 5} = 6^{\log_6 5^2} = 5^2 = 25$.

Відповідь: 25.

Приклад 12 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.).
Обчисліть $(\sqrt{20})^{2+\log_{20} 16}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості степеня і властивості логарифмів, отримуємо:

$$(\sqrt{20})^{2+\log_{20} 16} = 20^{1+\frac{1}{2}\log_{20} 16} = 20^1 \cdot 20^{\frac{1}{2}\log_{20} 16} =$$

$$= 20 \cdot 20^{\log_{20} 16^{1/2}} = 20 \cdot 16^{1/2} = 20\sqrt{16} = 20 \cdot 4 = 80.$$

Відповідь: 80.

Приклади із ЗНО

Приклад 11 (Пробне тестування ЗНО, 2015 р.).
Обчисліть $36^{\log_6 5}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів і властивості степеня, перетворюємо вираз до вигляду $\boxed{a^{\log_a b} = b}$ (при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$), а саме:
$36^{\log_6 5} = 6^{2\log_6 5} = 6^{\log_6 5^2} = 5^2 = 25$.

Відповідь: 25.

Приклад 12 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.).
Обчисліть $(\sqrt{20})^{2+\log_{20} 16}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості степеня і властивості логарифмів, отримуємо:

$$(\sqrt{20})^{2+\log_{20} 16} = 20^{1+\frac{1}{2}\log_{20} 16} = 20^1 \cdot 20^{\frac{1}{2}\log_{20} 16} =$$

$$= 20 \cdot 20^{\log_{20} 16^{1/2}} = 20 \cdot 16^{1/2} = 20\sqrt{16} = 20 \cdot 4 = 80.$$

Відповідь: 80.

Приклади із ЗНО

Приклад 11 (Пробне тестування ЗНО, 2015 р.). Обчисліть $36^{\log_6 5}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів і властивості степеня, перетворюємо вираз до вигляду $\boxed{a^{\log_a b} = b}$ (при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$), а саме:

$$36^{\log_6 5} = 6^{2\log_6 5} = 6^{\log_6 5^2} = 5^2 = 25 .$$

Відповідь: 25.

Приклад 12 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). Обчисліть $(\sqrt{20})^{2+\log_{20} 16}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості степеня і властивості логарифмів, отримуємо:

$$(\sqrt{20})^{2+\log_{20} 16} = 20^{1+\frac{1}{2}\log_{20} 16} = 20^1 \cdot 20^{\frac{1}{2}\log_{20} 16} =$$

$$= 20 \cdot 20^{\log_{20} 16^{1/2}} = 20 \cdot 16^{1/2} = 20\sqrt{16} = 20 \cdot 4 = 80 .$$

Відповідь: 80.

Приклади із ЗНО

Приклад 11 (Пробне тестування ЗНО, 2015 р.). Обчисліть $36^{\log_6 5}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів і властивості степеня, перетворюємо вираз до вигляду $\boxed{a^{\log_a b} = b}$ (при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$), а саме:

$$36^{\log_6 5} = 6^{2\log_6 5} = 6^{\log_6 5^2} = 5^2 = 25.$$

Відповідь: 25.

Приклад 12 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). Обчисліть $(\sqrt{20})^{2+\log_{20} 16}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості степеня і властивості логарифмів, отримуємо:

$$(\sqrt{20})^{2+\log_{20} 16} = 20^{1+\frac{1}{2}\log_{20} 16} = 20^1 \cdot 20^{\frac{1}{2}\log_{20} 16} =$$

$$= 20 \cdot 20^{\log_{20} 16^{1/2}} = 20 \cdot 16^{1/2} = 20\sqrt{16} = 20 \cdot 4 = 80.$$

Відповідь: 80.

Приклади із ЗНО

Приклад 11 (Пробне тестування ЗНО, 2015 р.). Обчисліть $36^{\log_6 5}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів і властивості степеня, перетворюємо вираз до вигляду $\boxed{a^{\log_a b} = b}$ (при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$), а саме:

$$36^{\log_6 5} = 6^{2\log_6 5} = 6^{\log_6 5^2} = 5^2 = 25.$$

Відповідь: 25.

Приклад 12 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). Обчисліть $(\sqrt{20})^{2+\log_{20} 16}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості степеня і властивості логарифмів, отримуємо:

$$(\sqrt{20})^{2+\log_{20} 16} = 20^{1+\frac{1}{2}\log_{20} 16} = 20^1 \cdot 20^{\frac{1}{2}\log_{20} 16} =$$

$$= 20 \cdot 20^{\log_{20} 16^{1/2}} = 20 \cdot 16^{1/2} = 20\sqrt{16} = 20 \cdot 4 = 80.$$

Відповідь: 80.

Приклади із ЗНО

Приклад 11 (Пробне тестування ЗНО, 2015 р.). Обчисліть $36^{\log_6 5}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів і властивості степеня, перетворюємо вираз до вигляду $\boxed{a^{\log_a b} = b}$ (при $a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0$), а саме:

$$36^{\log_6 5} = 6^{2\log_6 5} = 6^{\log_6 5^2} = 5^2 = 25.$$

Відповідь: 25.

Приклад 12 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). Обчисліть $(\sqrt{20})^{2+\log_{20} 16}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості степеня і властивості логарифмів, отримуємо:

$$(\sqrt{20})^{2+\log_{20} 16} = 20^{1+\frac{1}{2}\log_{20} 16} = 20^1 \cdot 20^{\frac{1}{2}\log_{20} 16} =$$

$$= 20 \cdot 20^{\log_{20} 16^{1/2}} = 20 \cdot 16^{1/2} = 20\sqrt{16} = 20 \cdot 4 = 80.$$

Відповідь: 80.

Приклади із ЗНО

Приклад 11 (Пробне тестування ЗНО, 2015 р.).
Обчисліть $36^{\log_6 5}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів і властивості степеня, перетворюємо вираз до вигляду $\boxed{a^{\log_a b} = b}$ (при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$), а саме:

$$36^{\log_6 5} = 6^{2\log_6 5} = 6^{\log_6 5^2} = 5^2 = 25 .$$

Відповідь: 25.

Приклад 12 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.).
Обчисліть $(\sqrt{20})^{2+\log_{20} 16}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості степеня і властивості логарифмів, отримуємо:

$$(\sqrt{20})^{2+\log_{20} 16} = 20^{1+\frac{1}{2}\log_{20} 16} = 20^1 \cdot 20^{\frac{1}{2}\log_{20} 16} =$$

$$= 20 \cdot 20^{\log_{20} 16^{1/2}} = 20 \cdot 16^{1/2} = 20\sqrt{16} = 20 \cdot 4 = 80 .$$

Відповідь: 80.

Приклади із ЗНО

Приклад 11 (Пробне тестування ЗНО, 2015 р.). Обчисліть $36^{\log_6 5}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів і властивості степеня, перетворюємо вираз до вигляду $\boxed{a^{\log_a b} = b}$ (при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$), а саме:

$$36^{\log_6 5} = 6^{2\log_6 5} = 6^{\log_6 5^2} = 5^2 = 25\,.$$

Відповідь: 25.

Приклад 12 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). Обчисліть $(\sqrt{20})^{2+\log_{20} 16}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості степеня і властивості логарифмів, отримуємо:

$$(\sqrt{20})^{2+\log_{20} 16} = 20^{1+\frac{1}{2}\log_{20} 16} = 20^1 \cdot 20^{\frac{1}{2}\log_{20} 16} =$$

$$= 20 \cdot 20^{\log_{20} 16^{1/2}} = 20 \cdot 16^{1/2} = 20\sqrt{16} = 20 \cdot 4 = 80\,.$$

Відповідь: 80.

Приклади із ЗНО

Приклад 11 (Пробне тестування ЗНО, 2015 р.).
Обчисліть $36^{\log_6 5}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів і властивості степеня, перетворюємо вираз до вигляду $\boxed{a^{\log_a b} = b}$ (при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$), а саме:
$36^{\log_6 5} = 6^{2\log_6 5} = 6^{\log_6 5^2} = 5^2 = 25$.

Відповідь: 25.

Приклад 12 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.).
Обчисліть $(\sqrt{20})^{2+\log_{20} 16}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості степеня і властивості логарифмів, отримуємо:
$(\sqrt{20})^{2+\log_{20} 16} = 20^{1+\frac{1}{2}\log_{20} 16} = 20^1 \cdot 20^{\frac{1}{2}\log_{20} 16} =$
$= 20 \cdot 20^{\log_{20} 16^{1/2}} = 20 \cdot 16^{1/2} = 20\sqrt{16} = 20 \cdot 4 = 80$.

Відповідь: 80.

Приклади із ЗНО

Приклад 13 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). Обчисліть значення виразу $\log_a 500 - \log_a 4$, якщо $\log_5 a = \dfrac{1}{4}$.

Розв'язання. Перетворюючи різницю логарифмів у логарифм частки, отримуємо:

$\log_a 500 - \log_a 4 = \log_a \frac{500}{4} = \log_a 125$.

Тепер після переходу до основи 5 матимемо

$$\log_a 125 = \frac{\log_5 125}{\log_5 a} = \frac{3}{1/4} = 3 \cdot 4 = 12.$$

Відповідь: 12.

Приклади із ЗНО

Приклад 13 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). Обчисліть значення виразу $\log_a 500 - \log_a 4$, якщо $\log_5 a = \frac{1}{4}$.

Розв'язання. Перетворюючи різницю логарифмів у логарифм частки, отримуємо:

$$\log_a 500 - \log_a 4 = \log_a \frac{500}{4} = \log_a 125 .$$

Тепер після переходу до основи 5 матимемо

$$\log_a 125 = \frac{\log_5 125}{\log_5 a} = \frac{3}{1/4} = 3 \cdot 4 = 12 .$$

Відповідь: 12.

Приклади із ЗНО

Приклад 13 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). Обчисліть значення виразу $\log_a 500 - \log_a 4$, якщо $\log_5 a = \frac{1}{4}$.

Розв'язання. Перетворюючи різницю логарифмів у логарифм частки, отримуємо:

$$\log_a 500 - \log_a 4 = \log_a \tfrac{500}{4} = \log_a 125\,.$$

Тепер після переходу до основи 5 матимемо

$$\log_a 125 = \frac{\log_5 125}{\log_5 a} = \frac{3}{1/4} = 3 \cdot 4 = 12\,.$$

Відповідь: 12.