

Область значень функції

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 30 (частина друга)



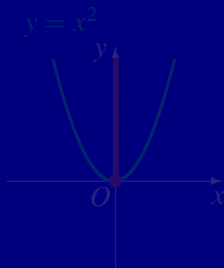
Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Область значень функції

З означення графіка функції $y = f(x)$ (див. Урок 2) випливає, що **область визначення** $D(f)$ функції $f(x)$ є проекцією графіка цієї функції на вісь Ox .

- Проекцією графіка функції $y = f(x)$ на вісь Oy є множина тих значень, які приймаються функцією $f(x)$. Цю множину називають **областю значень** функції $f(x)$ та позначають $E(f)$.

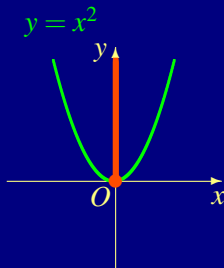


Так, наприклад, областю значень функції $y = f(x) = x^2$ є множина $E(f) = [0, \infty)$.

Область значень функції

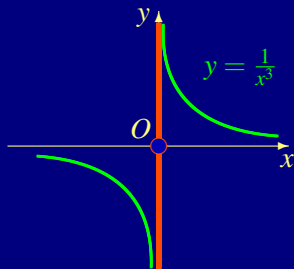
З означення графіка функції $y = f(x)$ (див. Урок 2) випливає, що **область визначення** $D(f)$ функції $f(x)$ є проекцією графіка цієї функції на вісь Ox .

- Проекцією графіка функції $y = f(x)$ на вісь Oy є множина тих значень, які приймаються функцією $f(x)$. Цю множину називають **областю значень** функції $f(x)$ та позначають $E(f)$.

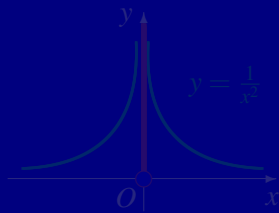


Так, наприклад, областю значень функції $y = f(x) = x^2$ є множина $E(f) = [0, \infty)$.

Область значень функції

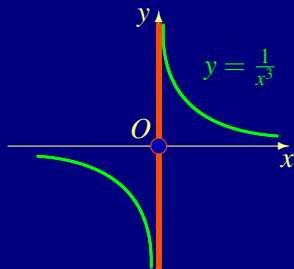


Функція $y = f(x) = \frac{1}{x^3}$ має
область значень
 $E(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

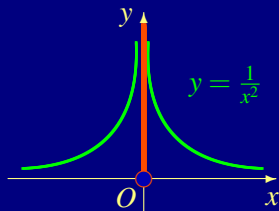


Функція $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$ має
область значень
 $E(f) = (0, \infty)$.

Область значень функції

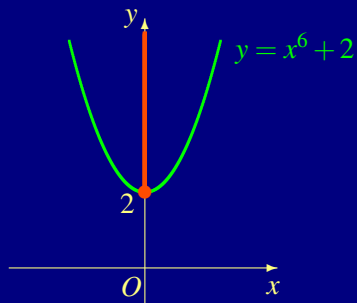


Функція $y = f(x) = \frac{1}{x^3}$ має
область значень
 $E(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.



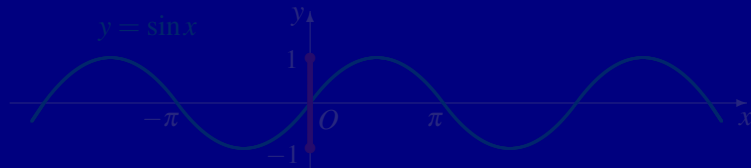
Функція $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$ має
область значень
 $E(f) = (0, \infty)$.

Область значень функції

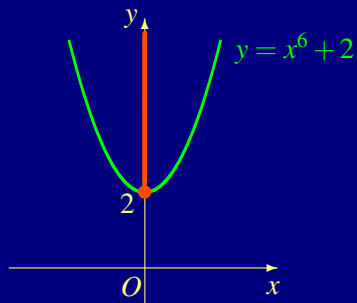


Область значень функції
 $y = f(x) = x^6 + 2$ – це
множина $E(f) = [2, \infty)$.

Областю значень функції $y = f(x) = \sin x$ є відрізок
 $E(f) = [-1; 1]$:

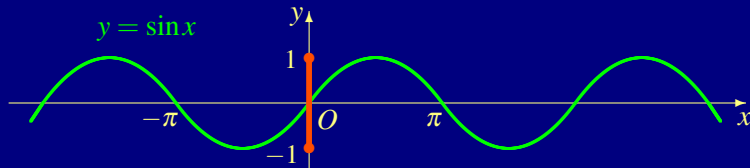


Область значень функції



Область значень функції
 $y = f(x) = x^6 + 2$ – це
множина $E(f) = [2, \infty)$.

Областю значень функції $y = f(x) = \sin x$ є відрізок
 $E(f) = [-1; 1]$:



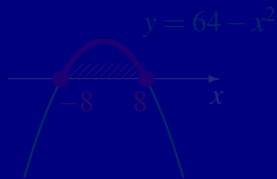
Приклади

Приклад 1. Знайти область значень функції

$$f(x) = \left(\sqrt{64-x^2}\right)^2.$$

Розв'язання. Відзначимо, що $\left(\sqrt{64-x^2}\right)^2 \neq 64-x^2$, оскільки обидві частини цієї нерівності мають різні області визначення!

Тому знайдемо спочатку область визначення функції $D(f)$, розв'язуючи нерівність $64-x^2 \geq 0$:



Отже, $D(f) = [-8; 8]$ і лише на цій області визначення $D(f)$ виконується рівність $\left(\sqrt{64-x^2}\right)^2 = 64-x^2$.

Це означає, що графіком функції $y = f(x)$ є виділена на мал. частина параболи $y = 64-x^2$.

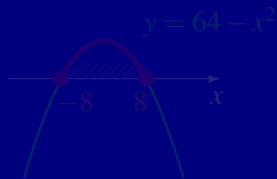
Приклади

Приклад 1. Знайти область значень функції

$$f(x) = \left(\sqrt{64 - x^2} \right)^2.$$

Розв'язання. Відзначимо, що $\left(\sqrt{64 - x^2} \right)^2 \neq 64 - x^2$, оскільки обидві частини цієї нерівності мають різні області визначення !

Тому знайдемо спочатку область визначення функції $D(f)$, розв'язуючи нерівність $64 - x^2 \geq 0$:



Отже, $D(f) = [-8; 8]$ і лише на цій області визначення $D(f)$ виконується рівність $\left(\sqrt{64 - x^2} \right)^2 = 64 - x^2$.

Це означає, що графіком функції $y = f(x)$ є виділена на мал. частина параболи $y = 64 - x^2$.

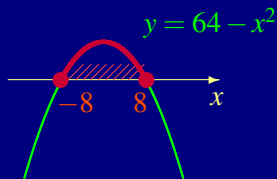
Приклади

Приклад 1. Знайти область значень функції

$$f(x) = \left(\sqrt{64 - x^2} \right)^2.$$

Розв'язання. Відзначимо, що $\left(\sqrt{64 - x^2} \right)^2 \neq 64 - x^2$, оскільки обидві частини цієї нерівності мають різні області визначення !

Тому знайдемо спочатку область визначення функції $D(f)$, розв'язуючи нерівність $64 - x^2 \geq 0$:



Отже, $D(f) = [-8; 8]$ і лише на цій області визначення $D(f)$ виконується рівність $\left(\sqrt{64 - x^2} \right)^2 = 64 - x^2$.

Це означає, що графіком функції $y = f(x)$ є виділена на мал. частина параболи $y = 64 - x^2$.

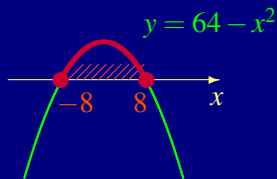
Приклади

Приклад 1. Знайти область значень функції

$$f(x) = \left(\sqrt{64 - x^2} \right)^2.$$

Розв'язання. Відзначимо, що $\left(\sqrt{64 - x^2} \right)^2 \neq 64 - x^2$, оскільки обидві частини цієї нерівності мають різні області визначення !

Тому знайдемо спочатку область визначення функції $D(f)$, розв'язуючи нерівність $64 - x^2 \geq 0$:

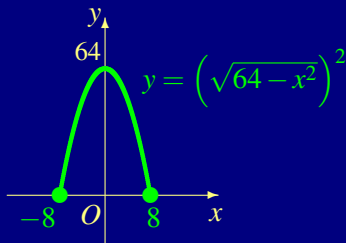


Отже, $D(f) = [-8; 8]$ і лише на цій області визначення $D(f)$ виконується рівність $\left(\sqrt{64 - x^2} \right)^2 = 64 - x^2$.

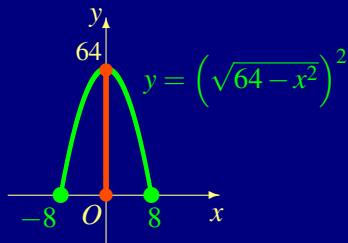
Це означає, що графіком функції $y = f(x)$ є виділена на мал. частина параболи $y = 64 - x^2$.

Приклади

Отже, графік функції $y = f(x) = \left(\sqrt{64 - x^2}\right)^2$ – це частина параболи $y = 64 - x^2$, розміщена над відрізком $[-8; 8]$ осі Ox (див. мал.).



Приклади

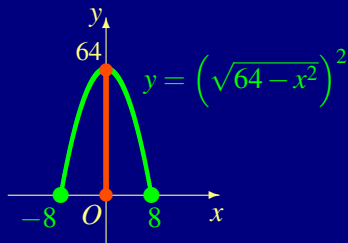


Очевидно, що проекцією вказаної частини параболи $y = 64 - x^2$ на вісь Oy є відрізок $[0; 64]$.

Отже, $E(f) = [0; 64]$.

Відповідь: $E(f) = [0; 64]$.

Приклади



Очевидно, що проекцією вказаної частини параболи $y = 64 - x^2$ на вісь Oy є відрізок $[0; 64]$.

Отже, $E(f) = [0; 64]$.

Відповідь: $E(f) = [0; 64]$.

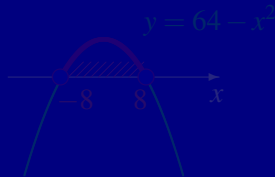
Приклади

Приклад 2. Знайти область значень функції

$$f(x) = 3^{\log_3(64-x^2)}.$$

Розв'язання. Відзначимо, що $3^{\log_3(64-x^2)} \neq 64 - x^2$, оскільки обидві частини цієї нерівності мають різні області визначення!

Тому знайдемо спочатку область визначення функції $D(f)$, розв'язуючи нерівність $64 - x^2 > 0$:



Отже, $D(f) = (-8; 8)$ і лише на цій області визначення $D(f)$ виконується рівність $3^{\log_3(64-x^2)} = 64 - x^2$.

Це означає, що графіком функції $y = f(x)$ є виділена на мал. частина параболи $y = 64 - x^2$.

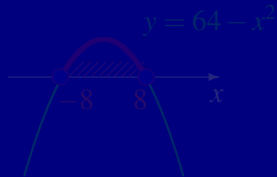
Приклади

Приклад 2. Знайти область значень функції

$$f(x) = 3^{\log_3(64-x^2)}.$$

Розв'язання. Відзначимо, що $3^{\log_3(64-x^2)} \neq 64 - x^2$, оскільки обидві частини цієї нерівності мають різні області визначення !

Тому знайдемо спочатку область визначення функції $D(f)$, розв'язуючи нерівність $64 - x^2 > 0$:



Отже, $D(f) = (-8; 8)$ і лише на цій області визначення $D(f)$ виконується рівність $3^{\log_3(64-x^2)} = 64 - x^2$.

Це означає, що графіком функції $y = f(x)$ є виділена на мал. частина параболи $y = 64 - x^2$.

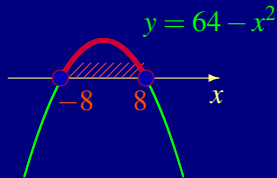
Приклади

Приклад 2. Знайти область значень функції

$$f(x) = 3^{\log_3(64-x^2)}.$$

Розв'язання. Відзначимо, що $3^{\log_3(64-x^2)} \neq 64 - x^2$, оскільки обидві частини цієї нерівності мають різні області визначення!

Тому знайдемо спочатку область визначення функції $D(f)$, розв'язуючи нерівність $64 - x^2 > 0$:



Отже, $D(f) = (-8; 8)$ і лише на цій області визначення $D(f)$ виконується рівність $3^{\log_3(64-x^2)} = 64 - x^2$.

Це означає, що графіком функції $y = f(x)$ є виділена на мал. частина параболи $y = 64 - x^2$.

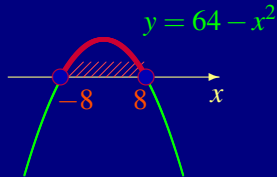
Приклади

Приклад 2. Знайти область значень функції

$$f(x) = 3^{\log_3(64-x^2)}.$$

Розв'язання. Відзначимо, що $3^{\log_3(64-x^2)} \neq 64 - x^2$, оскільки обидві частини цієї нерівності мають різні області визначення!

Тому знайдемо спочатку область визначення функції $D(f)$, розв'язуючи нерівність $64 - x^2 > 0$:

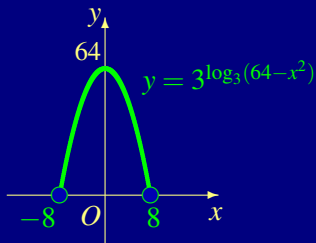


Отже, $D(f) = (-8; 8)$ і лише на цій області визначення $D(f)$ виконується рівність $3^{\log_3(64-x^2)} = 64 - x^2$.

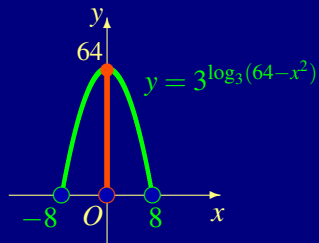
Це означає, що графіком функції $y = f(x)$ є виділена на мал. частина параболи $y = 64 - x^2$.

Приклади

Отже, графік функції $y = f(x) = 3^{\log_3(64-x^2)}$ – це частина параболи $y = 64 - x^2$, розміщена над інтервалом $(-8; 8)$ осі Ox (див. мал.). На відміну від графіка функції, розглянутої в попередньому прикладі, тут графік функції $y = f(x)$ не містить точок перетину параболи $y = 64 - x^2$ з віссю Ox .



Приклади

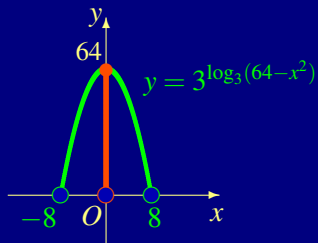


Тому його проекцією на вісь Oy є проміжок $(0; 64]$.

Отже, $E(f) = (0; 64]$.

Відповідь: $E(f) = (0; 64]$.

Приклади



Тому його проекцією на вісь Oy є проміжок $(0; 64]$.

Отже, $E(f) = (0; 64]$.

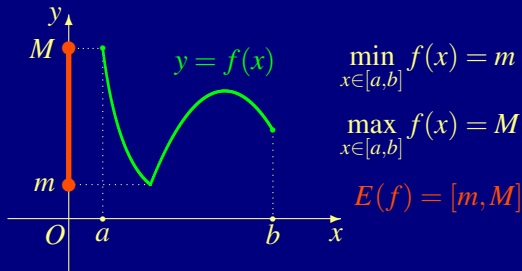
Відповідь: $E(f) = (0; 64]$.

Область значень функції (продовження)

Відзначимо, що

- областю значень функції $f(x)$, заданої і неперервної на відрізку $[a, b]$, є відрізок

$$E(f) = \left[\min_{x \in [a, b]} f(x), \max_{x \in [a, b]} f(x) \right] \quad (\text{див. мал.}).$$



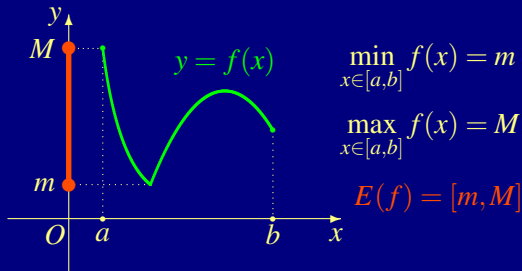
Отже, в цьому випадку знаходження області значень $E(f)$ зводиться до знаходження найбільшого та найменшого значень функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Область значень функції (продовження)

Відзначимо, що

- областю значень функції $f(x)$, заданої і неперервної на відрізку $[a, b]$, є відрізок

$$E(f) = \left[\min_{x \in [a, b]} f(x), \max_{x \in [a, b]} f(x) \right] \quad (\text{див. мал.}).$$



Отже, в цьому випадку знаходження області значень $E(f)$ зводиться до знаходження найбільшого та найменшого значень функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Область значень функції (продовження)

Аналогічно,

- якщо функція $f(x)$ неперервна на всій числовій прямій і існують абсолютні максимум і мінімум цієї функції, то $E(f) = \left[\min_{x \in \mathbf{R}} f(x), \max_{x \in \mathbf{R}} f(x) \right]$.

Так, областю значень функції $y = f(x) = 2 \sin x$ є відрізок $E(f) = [-2; 2]$, оскільки

$$\min_{x \in \mathbf{R}} f(x) = \min_{x \in \mathbf{R}} (2 \sin x) = -2,$$

$$\max_{x \in \mathbf{R}} f(x) = \max_{x \in \mathbf{R}} (2 \sin x) = 2.$$

Приклади

Приклад 3. Знайти область значень функції

$$f(x) = 5 \sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) - 2.$$

Розв'язання. Найбільше значення функція $f(x)$ досягає тоді, коли $\sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right)$ приймає своє найбільше значення 1, а найменше значення $f(x)$ досягає в тому випадку, коли $\sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right)$ приймає своє найменше значення -1 .

Отже,

$$\max_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 5 \cdot 1 - 2 = 3,$$

$$\min_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 5(-1) - 2 = -7.$$

Тому $E(f) = [-7; 3]$.

Відповідь: $E(f) = [-7; 3]$.

Приклади

Приклад 3. Знайти область значень функції

$$f(x) = 5 \sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) - 2.$$

Розв'язання. Найбільше значення функція $f(x)$ досягає тоді, коли $\sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right)$ приймає своє найбільше значення 1, а найменше значення $f(x)$ досягає в тому випадку, коли $\sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right)$ приймає своє найменше значення -1 .

Отже,

$$\max_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 5 \cdot 1 - 2 = 3,$$

$$\min_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 5(-1) - 2 = -7.$$

Тому $E(f) = [-7; 3]$.

Відповідь: $E(f) = [-7; 3]$.

Приклади

Приклад 3. Знайти область значень функції

$$f(x) = 5 \sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) - 2.$$

Розв'язання. Найбільше значення функція $f(x)$ досягає тоді, коли $\sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right)$ приймає своє найбільше значення 1, а найменше значення $f(x)$ досягає в тому випадку, коли $\sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right)$ приймає своє найменше значення -1 .

Отже,

$$\max_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 5 \cdot 1 - 2 = 3,$$

$$\min_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 5(-1) - 2 = -7.$$

Тому $E(f) = [-7; 3]$.

Відповідь: $E(f) = [-7; 3]$.

Приклади

Приклад 3. Знайти область значень функції

$$f(x) = 5 \sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) - 2.$$

Розв'язання. Найбільше значення функція $f(x)$ досягає тоді, коли $\sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right)$ приймає своє найбільше значення 1, а найменше значення $f(x)$ досягає в тому випадку, коли $\sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right)$ приймає своє найменше значення -1 .

Отже,

$$\max_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 5 \cdot 1 - 2 = 3,$$

$$\min_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 5(-1) - 2 = -7.$$

Тому $E(f) = [-7; 3]$.

Відповідь: $E(f) = [-7; 3]$.

Приклади

Приклад 4. Знайти область значень функції

$$f(x) = 3 \sin 3x - 4 \cos 3x - 2.$$

Розв'язання. Використовуючи формулу

$$a \sin t + b \cos t = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(t + \alpha),$$

де α – деякий допоміжний кут (див. Урок 21), подамо функцію $f(x)$ у вигляді $f(x) = 5 \sin(3x + \alpha) - 2$.

Тепер область значень $E(f)$ знаходимо шляхом таких же міркувань, як і в попередньому прикладі. Дійсно, своє найбільше чи найменше значення функція $f(x)$ досягає в тому випадку, коли $\sin(3x + \alpha)$ приймає відповідно своє найбільше чи найменше значення, тобто

$$\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 5 \cdot 1 - 2 = 3, \quad \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 5(-1) - 2 = -7.$$

Отже, $E(f) = [-7; 3]$.

Відповідь: $E(f) = [-7; 3]$.

Приклади

Приклад 4. Знайти область значень функції

$$f(x) = 3 \sin 3x - 4 \cos 3x - 2.$$

Розв'язання. Використовуючи формулу

$$a \sin t + b \cos t = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(t + \alpha),$$

де α – деякий допоміжний кут (див. Урок 21), подамо функцію $f(x)$ у вигляді $f(x) = 5 \sin(3x + \alpha) - 2$.

Тепер область значень $E(f)$ знаходимо шляхом таких же міркувань, як і в попередньому прикладі. Дійсно, своє найбільше чи найменше значення функція $f(x)$ досягає в тому випадку, коли $\sin(3x + \alpha)$ приймає відповідно своє найбільше чи найменше значення, тобто

$$\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 5 \cdot 1 - 2 = 3, \quad \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 5(-1) - 2 = -7.$$

Отже, $E(f) = [-7; 3]$.

Відповідь: $E(f) = [-7; 3]$.

Приклади

Приклад 4. Знайти область значень функції

$$f(x) = 3 \sin 3x - 4 \cos 3x - 2.$$

Розв'язання. Використовуючи формулу

$$a \sin t + b \cos t = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(t + \alpha),$$

де α – деякий допоміжний кут (див. Урок 21), подамо функцію $f(x)$ у вигляді $f(x) = 5 \sin(3x + \alpha) - 2$.

Тепер область значень $E(f)$ знаходимо шляхом таких же міркувань, як і в попередньому прикладі. Дійсно, своє найбільше чи найменше значення функція $f(x)$ досягає в тому випадку, коли $\sin(3x + \alpha)$ приймає відповідно своє найбільше чи найменше значення, тобто

$$\max_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 5 \cdot 1 - 2 = 3, \quad \min_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 5(-1) - 2 = -7.$$

Отже, $E(f) = [-7; 3]$.

Відповідь: $E(f) = [-7; 3]$.

Приклади

Приклад 4. Знайти область значень функції

$$f(x) = 3 \sin 3x - 4 \cos 3x - 2.$$

Розв'язання. Використовуючи формулу

$$a \sin t + b \cos t = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(t + \alpha),$$

де α – деякий допоміжний кут (див. Урок 21), подамо функцію $f(x)$ у вигляді $f(x) = 5 \sin(3x + \alpha) - 2$.

Тепер область значень $E(f)$ знаходимо шляхом таких же міркувань, як і в попередньому прикладі. Дійсно, своє найбільше чи найменше значення функція $f(x)$ досягає в тому випадку, коли $\sin(3x + \alpha)$ приймає відповідно своє найбільше чи найменше значення, тобто

$$\max_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 5 \cdot 1 - 2 = 3, \quad \min_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 5(-1) - 2 = -7.$$

Отже, $E(f) = [-7; 3]$.

Відповідь: $E(f) = [-7; 3]$.

Приклади

Приклад 5. Знайти область значень функції
 $f(x) = \sin^2 x - \sin x - 1$.

Розв'язання. Зробимо заміну змінних: $t = \sin x$.
Тоді $f(x) = \sin^2 x - \sin x - 1 = t^2 - t - 1 = \varphi(t)$, при цьому,
якщо x "пробігає" область визначення функції $f(x)$, то
 t "пробігає" область значень функції $t = \sin x$, тобто
відрізок $[-1; 1]$.

Крім того, у відповідних точках x і t функції $f(x)$ і
 $\varphi(t)$ приймають рівні значення, оскільки в цих точках
виконується рівність $f(x) = \varphi(t)$.

Це означає, що область значень функції $f(x)$, заданої
на $\mathbb{R}$, збігається з областю значень функції $\varphi(t)$,
заданої на $[-1; 1]$, при цьому

$$\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \max_{t \in [-1; 1]} \varphi(t), \quad \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \min_{t \in [-1; 1]} \varphi(t).$$

Приклади

Приклад 5. Знайти область значень функції

$$f(x) = \sin^2 x - \sin x - 1.$$

Розв'язання. Зробимо **заміну змінних**: $t = \sin x$.

Тоді $f(x) = \sin^2 x - \sin x - 1 = t^2 - t - 1 = \varphi(t)$, при цьому, якщо x "пробігає" область визначення функції $f(x)$, то t "пробігає" область значень функції $t = \sin x$, тобто відрізок $[-1; 1]$.

Крім того, у відповідних точках x і t функції $f(x)$ і $\varphi(t)$ приймають рівні значення, оскільки в цих точках виконується рівність $f(x) = \varphi(t)$.

Це означає, що область значень функції $f(x)$, заданої на $\mathbb{R}$, збігається з областю значень функції $\varphi(t)$, заданої на $[-1; 1]$, при цьому

$$\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \max_{t \in [-1; 1]} \varphi(t), \quad \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \min_{t \in [-1; 1]} \varphi(t).$$

Приклади

Приклад 5. Знайти область значень функції

$$f(x) = \sin^2 x - \sin x - 1.$$

Розв'язання. Зробимо заміну змінних: $t = \sin x$.

Тоді $f(x) = \sin^2 x - \sin x - 1 = t^2 - t - 1 = \varphi(t)$, при цьому, якщо x "пробігає" область визначення функції $f(x)$, то t "пробігає" область значень функції $t = \sin x$, тобто відрізок $[-1; 1]$.

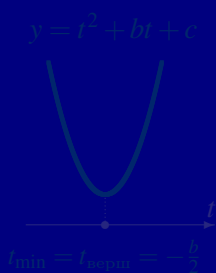
Крім того, у відповідних точках x і t функції $f(x)$ і $\varphi(t)$ приймають рівні значення, оскільки в цих точках виконується рівність $f(x) = \varphi(t)$.

Це означає, що область значень функції $f(x)$, заданої на $\mathbf{R}$, збігається з областю значень функції $\varphi(t)$, заданої на $[-1; 1]$, при цьому

$$\max_{x \in \mathbf{R}} f(x) = \max_{t \in [-1; 1]} \varphi(t), \quad \min_{x \in \mathbf{R}} f(x) = \min_{t \in [-1; 1]} \varphi(t).$$

Приклади

Знайдемо найбільше та найменше значення функції $\varphi(t) = t^2 - t - 1$ на відрізку $[-1; 1]$.



Оскільки $t = \frac{1}{2}$ — абсциса вершини параболы (див. Урок 29) $y = t^2 - t - 1$, вітки якої направлені вгору, то функція $\varphi(t)$ має мінімум в точці $t = \frac{1}{2}$, яка до того ж належить відрізку $[-1; 1]$. При цьому

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{4} = \min_{t \in [-1; 1]} \varphi(t).$$

Інших критичних точок функція $\varphi(t)$ не має. Тоді

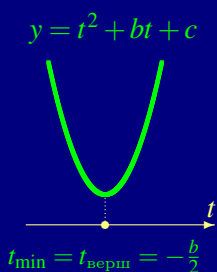
$$\max_{t \in [-1; 1]} \varphi(t) = \max\{\varphi(-1), \varphi(1)\}, \text{ де } \varphi(-1) = 1, \quad \varphi(1) = -1,$$

і тому $\max_{t \in [-1; 1]} \varphi(t) = 1$. Значить, $E(f) = \left[-\frac{5}{4}, 1\right]$.

Відповідь: $E(f) = \left[-\frac{5}{4}, 1\right]$.

Приклади

Знайдемо найбільше та найменше значення функції $\varphi(t) = t^2 - t - 1$ на відрізку $[-1; 1]$.



Оскільки $t = \frac{1}{2}$ — абсциса вершини параболы (див. Урок 29) $y = t^2 - t - 1$, вітки якої направлені вгору, то функція $\varphi(t)$ має мінімум в точці $t = \frac{1}{2}$, яка до того ж належить відрізку $[-1; 1]$. При цьому

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{4} = \min_{t \in [-1; 1]} \varphi(t).$$

Інших критичних точок функція $\varphi(t)$ не має. Тоді

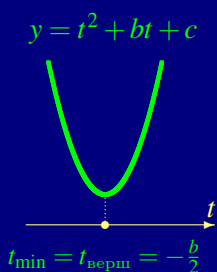
$$\max_{t \in [-1; 1]} \varphi(t) = \max\{\varphi(-1), \varphi(1)\}, \text{ де } \varphi(-1) = 1, \quad \varphi(1) = -1,$$

і тому $\max_{t \in [-1; 1]} \varphi(t) = 1$. Значить, $E(f) = \left[-\frac{5}{4}, 1\right]$.

Відповідь: $E(f) = \left[-\frac{5}{4}, 1\right]$.

Приклади

Знайдемо найбільше та найменше значення функції $\varphi(t) = t^2 - t - 1$ на відрізку $[-1; 1]$.



Оскільки $t = \frac{1}{2}$ — абсциса вершини параболы (див. Урок 29) $y = t^2 - t - 1$, вітки якої направлені вгору, то функція $\varphi(t)$ має мінімум в точці $t = \frac{1}{2}$, яка до того ж належить відрізку $[-1; 1]$. При цьому

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{4} = \min_{t \in [-1; 1]} \varphi(t).$$

Інших критичних точок функція $\varphi(t)$ не має. Тоді

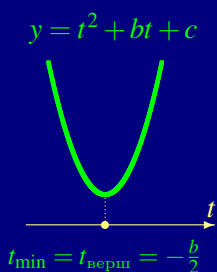
$$\max_{t \in [-1; 1]} \varphi(t) = \max\{\varphi(-1), \varphi(1)\}, \text{ де } \varphi(-1) = 1, \quad \varphi(1) = -1,$$

і тому $\max_{t \in [-1; 1]} \varphi(t) = 1$. Значить, $E(f) = \left[-\frac{5}{4}, 1\right]$.

Відповідь: $E(f) = \left[-\frac{5}{4}, 1\right]$.

Приклади

Знайдемо найбільше та найменше значення функції $\varphi(t) = t^2 - t - 1$ на відрізку $[-1; 1]$.



Оскільки $t = \frac{1}{2}$ — абсциса вершини параболы (див. Урок 29) $y = t^2 - t - 1$, вітки якої направлені вгору, то функція $\varphi(t)$ має мінімум в точці $t = \frac{1}{2}$, яка до того ж належить відрізку $[-1; 1]$. При цьому

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{4} = \min_{t \in [-1; 1]} \varphi(t).$$

Інших критичних точок функція $\varphi(t)$ не має. Тоді

$$\max_{t \in [-1; 1]} \varphi(t) = \max\{\varphi(-1), \varphi(1)\}, \text{ де } \varphi(-1) = 1, \quad \varphi(1) = -1,$$

і тому $\max_{t \in [-1; 1]} \varphi(t) = 1$. Значить, $E(f) = \left[-\frac{5}{4}, 1\right]$.

Відповідь: $E(f) = \left[-\frac{5}{4}, 1\right]$.

Приклади із ЗНО

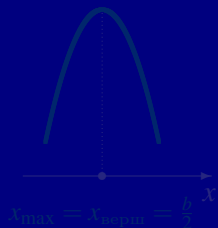
Приклад 6 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.).

Знайдіть найбільше значення функції $y = -x^2 + 3x - 4$.

Якщо функція не має найбільшого значення, то у відповідь запишіть число 100.

Розв'язання.

$$y = -x^2 + bx + c$$



Оскільки $x = \frac{3}{2}$ — абсциса вершини параболи (див. мал.) $y = -x^2 + 3x - 4$, вітки якої направлені вниз, то функція має максимум в точці $x = \frac{3}{2}$.

При цьому

$$\begin{aligned}\max y &= -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{2} - 4 = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} - 4 = \\ &= \frac{-9+18-16}{4} = -\frac{7}{4} = -1,75.\end{aligned}$$

Відповідь: $-1,75$.

Приклади із ЗНО

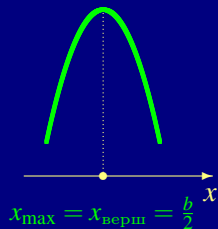
Приклад 6 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.).

Знайдіть найбільше значення функції $y = -x^2 + 3x - 4$.

Якщо функція не має найбільшого значення, то у відповідь запишіть число 100.

Розв'язання.

$$y = -x^2 + bx + c$$



Оскільки $x = \frac{3}{2}$ — абсциса вершини параболи (див. мал.) $y = -x^2 + 3x - 4$, вітки якої направлені вниз, то функція має максимум в точці $x = \frac{3}{2}$.

При цьому

$$\begin{aligned} \max y &= -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{2} - 4 = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} - 4 = \\ &= \frac{-9+18-16}{4} = -\frac{7}{4} = -1,75. \end{aligned}$$

Відповідь: $-1,75$.

Приклади із ЗНО

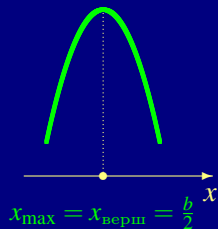
Приклад 6 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.).

Знайдіть найбільше значення функції $y = -x^2 + 3x - 4$.

Якщо функція не має найбільшого значення, то у відповідь запишіть число 100.

Розв'язання.

$$y = -x^2 + bx + c$$



Оскільки $x = \frac{3}{2}$ — абсциса вершини параболи (див. мал.) $y = -x^2 + 3x - 4$, вітки якої направлені вниз, то функція має максимум в точці $x = \frac{3}{2}$.

При цьому

$$\begin{aligned} \max y &= -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{2} - 4 = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} - 4 = \\ &= \frac{-9+18-16}{4} = -\frac{7}{4} = -1,75. \end{aligned}$$

Відповідь: $-1,75$.

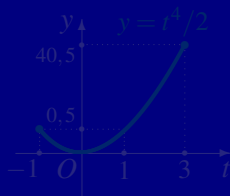
Приклади із ЗНО

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.).
Знайдіть НАЙБІЛЬШЕ значення функції $y = \frac{(1-2\cos x)^4}{2}$.

Розв'язання. Нехай $t = 1 - 2\cos x$. Наслідком нерівностей $-1 \leq \cos x \leq 1$ є нерівності $-2 \leq -2\cos x \leq 2$ і $-1 \leq 1 - 2\cos x \leq 3$.

Тому, якщо x "пробігає" множину дійсних чисел, то t "пробігає" відрізок $[-1; 3]$. При цьому

$$\max_{x \in \mathbb{R}} \frac{(1-2\cos x)^4}{2} = \max_{t \in [-1; 3]} \frac{t^4}{2}.$$



Найбільше значення на відрізку $[-1; 3]$ функція $\varphi(t) = t^4/2$ приймає в точці $t = 3$ (див. мал.), тобто

$$\max_{t \in [-1; 3]} \frac{t^4}{2} = \frac{3^4}{2} = \frac{81}{2} = 40,5.$$

Відповідь: 40,5.

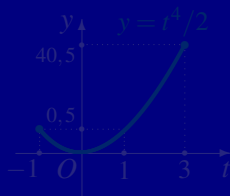
Приклади із ЗНО

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.).
Знайдіть НАЙБІЛЬШЕ значення функції $y = \frac{(1-2\cos x)^4}{2}$.

Розв'язання. Нехай $t = 1 - 2\cos x$. Наслідком нерівностей $-1 \leq \cos x \leq 1$ є нерівності $-2 \leq -2\cos x \leq 2$ і $-1 \leq 1 - 2\cos x \leq 3$.

Тому, якщо x "пробігає" множину дійсних чисел, то t "пробігає" відрізок $[-1; 3]$. При цьому

$$\max_{x \in \mathbf{R}} \frac{(1-2\cos x)^4}{2} = \max_{t \in [-1; 3]} \frac{t^4}{2}.$$



Найбільше значення на відрізку $[-1; 3]$ функція $\varphi(t) = t^4/2$ приймає в точці $t = 3$ (див. мал.), тобто

$$\max_{t \in [-1; 3]} \frac{t^4}{2} = \frac{3^4}{2} = \frac{81}{2} = 40,5.$$

Відповідь: 40,5.

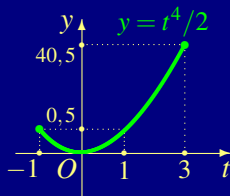
Приклади із ЗНО

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.).
Знайдіть НАЙБІЛЬШЕ значення функції $y = \frac{(1-2\cos x)^4}{2}$.

Розв'язання. Нехай $t = 1 - 2\cos x$. Наслідком нерівностей $-1 \leq \cos x \leq 1$ є нерівності $-2 \leq -2\cos x \leq 2$ і $-1 \leq 1 - 2\cos x \leq 3$.

Тому, якщо x "пробігає" множину дійсних чисел, то t "пробігає" відрізок $[-1; 3]$. При цьому

$$\max_{x \in \mathbf{R}} \frac{(1-2\cos x)^4}{2} = \max_{t \in [-1; 3]} \frac{t^4}{2}.$$



Найбільше значення на відрізку $[-1; 3]$ функція $\varphi(t) = t^4/2$ приймає в точці $t = 3$ (див. мал.), тобто

$$\max_{t \in [-1; 3]} \frac{t^4}{2} = \frac{3^4}{2} = \frac{81}{2} = 40,5.$$

Відповідь: 40,5.

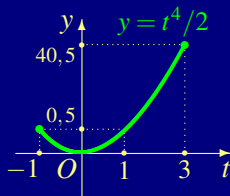
Приклади із ЗНО

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.).
Знайдіть НАЙБІЛЬШЕ значення функції $y = \frac{(1-2\cos x)^4}{2}$.

Розв'язання. Нехай $t = 1 - 2\cos x$. Наслідком нерівностей $-1 \leq \cos x \leq 1$ є нерівності $-2 \leq -2\cos x \leq 2$ і $-1 \leq 1 - 2\cos x \leq 3$.

Тому, якщо x "пробігає" множину дійсних чисел, то t "пробігає" відрізок $[-1; 3]$. При цьому

$$\max_{x \in \mathbf{R}} \frac{(1-2\cos x)^4}{2} = \max_{t \in [-1; 3]} \frac{t^4}{2}.$$



Найбільше значення на відрізку $[-1; 3]$ функція $\varphi(t) = t^4/2$ приймає в точці $t = 3$ (див. мал.), тобто

$$\max_{t \in [-1; 3]} \frac{t^4}{2} = \frac{3^4}{2} = \frac{81}{2} = 40,5.$$

Відповідь: 40,5.

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Пробне тестування ЗНО, 2013 р.). При якому значенні x функція $y = 4 - |20x + 7|$ набуває найбільшого значення?

Розв'язання. Оскільки $|20x + 7| \geq 0$, то $4 - |20x + 7| \leq 4$. При цьому функція $y = 4 - |20x + 7|$ приймає найбільше значення 4, якщо $|20x + 7| = 0 \iff x = -\frac{7}{20} = -0,35$.

Відповідь: $-0,35$.

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2016 р.). Побудуйте графік функції $y = \frac{x^2 - x - 2}{|x + 1|}$. Користуючись графіком, визначте область значень цієї функції.

Розв'язання. Область визначення заданої функції $D(y) : x \neq -1$.

Розкриваючи модуль на області визначення $D(y)$, розглянемо два випадки: $x > -1$ і $x < -1$.

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Пробне тестування ЗНО, 2013 р.). При якому значенні x функція $y = 4 - |20x + 7|$ набуває найбільшого значення?

Розв'язання. Оскільки $|20x + 7| \geq 0$, то $4 - |20x + 7| \leq 4$. При цьому функція $y = 4 - |20x + 7|$ приймає найбільше значення 4, якщо $|20x + 7| = 0 \iff x = -\frac{7}{20} = -0,35$.

Відповідь: $-0,35$.

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2016 р.). Побудуйте графік функції $y = \frac{x^2 - x - 2}{|x + 1|}$. Користуючись графіком, визначте область значень цієї функції.

Розв'язання. Область визначення заданої функції $D(y) : x \neq -1$.

Розкриваючи модуль на області визначення $D(y)$, розглянемо два випадки: $x > -1$ і $x < -1$.

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Пробне тестування ЗНО, 2013 р.). При якому значенні x функція $y = 4 - |20x + 7|$ набуває найбільшого значення?

Розв'язання. Оскільки $|20x + 7| \geq 0$, то $4 - |20x + 7| \leq 4$. При цьому функція $y = 4 - |20x + 7|$ приймає найбільше значення 4, якщо $|20x + 7| = 0 \iff x = -\frac{7}{20} = -0,35$.

Відповідь: $-0,35$.

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2016 р.). Побудуйте графік функції $y = \frac{x^2 - x - 2}{|x + 1|}$. Користуючись графіком, визначте область значень цієї функції.

Розв'язання. Область визначення заданої функції $D(y) : x \neq -1$.

Розкриваючи модуль на області визначення $D(y)$, розглянемо два випадки: $x > -1$ і $x < -1$.

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Пробне тестування ЗНО, 2013 р.). При якому значенні x функція $y = 4 - |20x + 7|$ набуває найбільшого значення?

Розв'язання. Оскільки $|20x + 7| \geq 0$, то $4 - |20x + 7| \leq 4$. При цьому функція $y = 4 - |20x + 7|$ приймає найбільше значення 4, якщо $|20x + 7| = 0 \iff x = -\frac{7}{20} = -0,35$.

Відповідь: $-0,35$.

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2016 р.). Побудуйте графік функції $y = \frac{x^2 - x - 2}{|x + 1|}$. Користуючись графіком, визначте область значень цієї функції.

Розв'язання. Область визначення заданої функції $D(y) : x \neq -1$.

Розкриваючи модуль на області визначення $D(y)$, розглянемо два випадки: $x > -1$ і $x < -1$.

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Пробне тестування ЗНО, 2013 р.). При якому значенні x функція $y = 4 - |20x + 7|$ набуває найбільшого значення?

Розв'язання. Оскільки $|20x + 7| \geq 0$, то $4 - |20x + 7| \leq 4$. При цьому функція $y = 4 - |20x + 7|$ приймає найбільше значення 4, якщо $|20x + 7| = 0 \iff x = -\frac{7}{20} = -0,35$.

Відповідь: $-0,35$.

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2016 р.). Побудуйте графік функції $y = \frac{x^2 - x - 2}{|x + 1|}$. Користуючись графіком, визначте область значень цієї функції.

Розв'язання. Область визначення заданої функції $D(y) : x \neq -1$.

Розкриваючи модуль на області визначення $D(y)$, розглянемо два випадки: $x > -1$ і $x < -1$.

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Пробне тестування ЗНО, 2013 р.). При якому значенні x функція $y = 4 - |20x + 7|$ набуває найбільшого значення?

Розв'язання. Оскільки $|20x + 7| \geq 0$, то $4 - |20x + 7| \leq 4$. При цьому функція $y = 4 - |20x + 7|$ приймає найбільше значення 4, якщо $|20x + 7| = 0 \iff x = -\frac{7}{20} = -0,35$.

Відповідь: $-0,35$.

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2016 р.). Побудуйте графік функції $y = \frac{x^2 - x - 2}{|x + 1|}$. Користуючись графіком, визначте область значень цієї функції.

Розв'язання. Область визначення заданої функції $D(y) : x \neq -1$.

Розкриваючи модуль на області визначення $D(y)$, розглянемо два випадки: $x > -1$ і $x < -1$.

Приклади із ЗНО

При цьому вираз функції y спрощується:

$$y = \frac{x^2 - x - 2}{|x + 1|} = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}, & \text{якщо } x > -1, \\ \frac{x^2 - x - 2}{-(x + 1)}, & \text{якщо } x < -1. \end{cases}$$

Для подальшого спрощення виразу функції y розкладемо на множники квадратний тричлен:

$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$. Тоді матимемо

$$\begin{aligned} y &= \begin{cases} \frac{(x+1)(x-2)}{x+1}, & \text{якщо } x > -1, \\ \frac{(x+1)(x-2)}{-(x+1)}, & \text{якщо } x < -1, \end{cases} = \\ &= \begin{cases} x - 2, & \text{якщо } x > -1, \\ 2 - x, & \text{якщо } x < -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Тепер після спрощення виразу функції y побудуємо її графік, який складається з "частинок" двох прямих:

$y = x - 2$ (при $x > -1$) і $y = 2 - x$ (при $x < -1$).

Приклади із ЗНО

При цьому вираз функції y спрощується:

$$y = \frac{x^2 - x - 2}{|x + 1|} = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}, & \text{якщо } x > -1, \\ \frac{x^2 - x - 2}{-(x + 1)}, & \text{якщо } x < -1. \end{cases}$$

Для подальшого спрощення виразу функції y розкладемо на множники квадратний тричлен:

$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$. Тоді матимемо

$$\begin{aligned} y &= \begin{cases} \frac{(x+1)(x-2)}{x+1}, & \text{якщо } x > -1, \\ \frac{(x+1)(x-2)}{-(x+1)}, & \text{якщо } x < -1, \end{cases} = \\ &= \begin{cases} x - 2, & \text{якщо } x > -1, \\ 2 - x, & \text{якщо } x < -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Тепер після спрощення виразу функції y побудуємо її графік, який складається з "частинок" двох прямих:

$y = x - 2$ (при $x > -1$) і $y = 2 - x$ (при $x < -1$).

Приклади із ЗНО

При цьому вираз функції y спрощується:

$$y = \frac{x^2 - x - 2}{|x + 1|} = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}, & \text{якщо } x > -1, \\ \frac{x^2 - x - 2}{-(x + 1)}, & \text{якщо } x < -1. \end{cases}$$

Для подальшого спрощення виразу функції y розкладемо на множники квадратний тричлен:

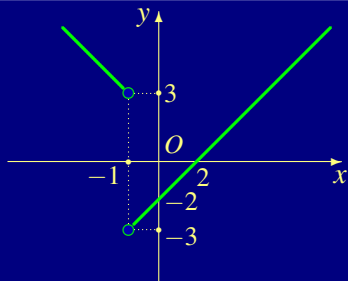
$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$. Тоді матимемо

$$\begin{aligned} y &= \begin{cases} \frac{(x+1)(x-2)}{x+1}, & \text{якщо } x > -1, \\ \frac{(x+1)(x-2)}{-(x+1)}, & \text{якщо } x < -1, \end{cases} = \\ &= \begin{cases} x - 2, & \text{якщо } x > -1, \\ 2 - x, & \text{якщо } x < -1. \end{cases} \end{aligned}$$

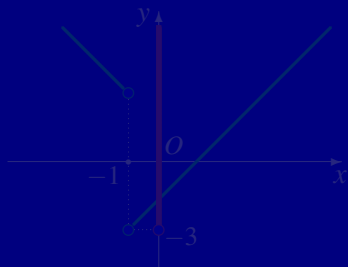
Тепер після спрощення виразу функції y побудуємо її графік, який складається з "частинок" двох прямих:

$y = x - 2$ (при $x > -1$) і $y = 2 - x$ (при $x < -1$).

Приклади із ЗНО



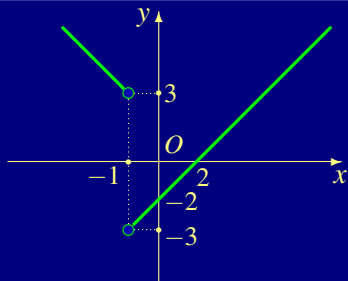
Отже, графік функції y складається з "частинок" двох прямих:
 $y = x - 2$ (при $x > -1$) і
 $y = 2 - x$ (при $x < -1$).



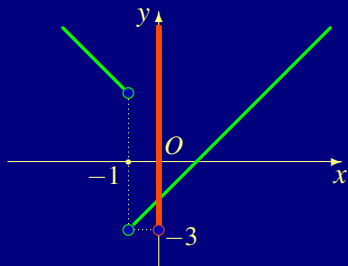
Проектуючи графік функції y на вісь Oy , знаходимо область значень цієї функції: $E(y) = (-3; \infty)$.

Відповідь: $E(y) = (-3; \infty)$.

Приклади із ЗНО



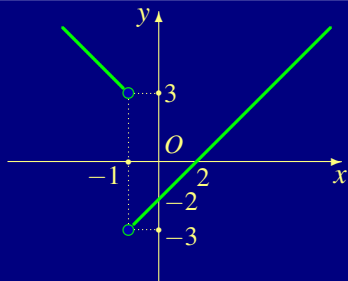
Отже, графік функції y складається з "частинок" двох прямих:
 $y = x - 2$ (при $x > -1$) і
 $y = 2 - x$ (при $x < -1$).



Проектуючи графік функції y на вісь Oy , знаходимо область значень цієї функції: $E(y) = (-3; \infty)$.

Відповідь: $E(y) = (-3; \infty)$.

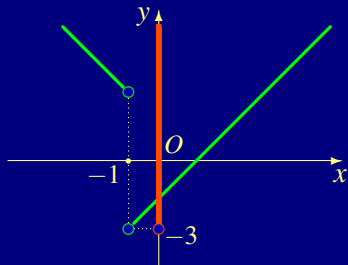
Приклади із ЗНО



Отже, графік функції y складається з "частинок" двох прямих:

$$y = x - 2 \quad (\text{при } x > -1) \quad \text{і}$$

$$y = 2 - x \quad (\text{при } x < -1).$$



Проектуючи графік функції y на вісь Oy , знаходимо область значень цієї функції: $E(y) = (-3; \infty)$.

Відповідь: $E(y) = (-3; \infty)$.

Приклади із ЗНО

Приклад 10 (Пробне тестування ЗНО, 2017 р.).

Задана функція $y = \frac{2-x}{x^2+x-6}$.

1. Розв'яжіть рівняння $x^2 + x - 6 = 0$.
2. Спростіть вираз $\frac{2-x}{x^2+x-6}$.
3. Побудуйте графік функції $y = \frac{2-x}{x^2+x-6}$.
4. Користуючись графіком, визначте область значень цієї функції.

Розв'язання. Для розв'язання рівняння $x^2 + x - 6 = 0$ скористаємося теоремою Вієта, згідно з якою корені x_1, x_2 заданого квадратного рівняння задовольняють рівності

$$x_1 + x_2 = -1 \quad \text{і} \quad x_1 \cdot x_2 = -6.$$

Згідно з теоремою, оберненою до теореми Вієта, числа $x_1 = -3$ і $x_2 = 2$, які задовольняють вказані рівності, є коренями заданого квадратного рівняння.

Приклади із ЗНО

Приклад 10 (Пробне тестування ЗНО, 2017 р.).

Задана функція $y = \frac{2-x}{x^2+x-6}$.

1. Розв'яжіть рівняння $x^2 + x - 6 = 0$.
2. Спростіть вираз $\frac{2-x}{x^2+x-6}$.
3. Побудуйте графік функції $y = \frac{2-x}{x^2+x-6}$.
4. Користуючись графіком, визначте область значень цієї функції.

Розв'язання. Для розв'язання рівняння $x^2 + x - 6 = 0$ скористаємося теоремою Вієта, згідно з якою корені x_1, x_2 заданого квадратного рівняння задовольняють рівності

$$x_1 + x_2 = -1 \quad \text{і} \quad x_1 \cdot x_2 = -6.$$

Згідно з теоремою, оберненою до теореми Вієта, числа $x_1 = -3$ і $x_2 = 2$, які задовольняють вказані рівності, є коренями заданого квадратного рівняння.

Приклади із ЗНО

Задана функція $y = \frac{2-x}{x^2+x-6}$ визначена, якщо знаменник не обертається в нуль, тобто при $x \neq -3$ і $x \neq 2$. Отже, область визначення заданої функції

$$D(y) = (\infty; -3) \cup (-3; 2) \cup (2; \infty).$$

Маємо також розклад квадратного тричлена на множники: $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$, використовуючи який, при $x \in D(y)$ спрощуємо вираз

$$\frac{2-x}{x^2+x-6} = \frac{-(x-2)}{(x+3)(x-2)} = -\frac{1}{x+3}.$$

Отже,

$$y = \frac{2-x}{x^2+x-6} = -\frac{1}{x+3} \quad \text{при } x \in D(y) = (\infty; -3) \cup (-3; 2) \cup (2; \infty).$$

Тому графіком функції y є гіпербола $y = -\frac{1}{x+3}$, у якої є "дірка" при $x = 2$ в точці $(2; y_0)$, де

$$y_0 = -\frac{1}{2+3} = -\frac{1}{5} = -0,2, \text{ тобто в точці } (2; -0,2).$$

Приклади із ЗНО

Задана функція $y = \frac{2-x}{x^2+x-6}$ визначена, якщо знаменник не обертається в нуль, тобто при $x \neq -3$ і $x \neq 2$. Отже, область визначення заданої функції

$$D(y) = (\infty; -3) \cup (-3; 2) \cup (2; \infty).$$

Маємо також розклад квадратного тричлена на множники: $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$, використовуючи який, при $x \in D(y)$ спрощуємо вираз

$$\frac{2-x}{x^2+x-6} = \frac{-(x-2)}{(x+3)(x-2)} = -\frac{1}{x+3}.$$

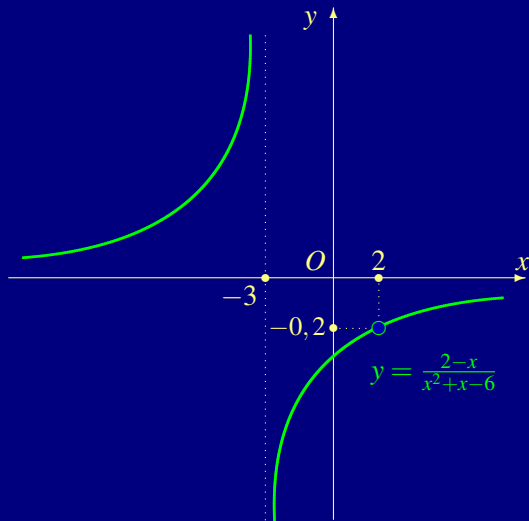
Отже,

$$y = \frac{2-x}{x^2+x-6} = -\frac{1}{x+3} \quad \text{при } x \in D(y) = (\infty; -3) \cup (-3; 2) \cup (2; \infty).$$

Тому графіком функції y є гіпербола $y = -\frac{1}{x+3}$, у якої є "дірка" при $x = 2$ в точці $(2; y_0)$, де

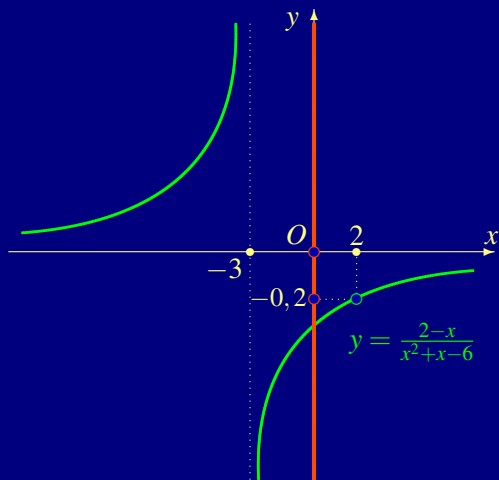
$$y_0 = -\frac{1}{2+3} = -\frac{1}{5} = -0,2, \text{ тобто в точці } (2; -0,2).$$

Приклади із ЗНО



Отже, графіком
функції $y = \frac{2-x}{x^2+x-6}$ є
гіпербола $y = -\frac{1}{x+3}$,
у якої є "дірка"
в точці $(2; -0,2)$.

Приклади із ЗНО



Проектуючи графік функції y на вісь Oy , знаходимо область значень цієї функції:

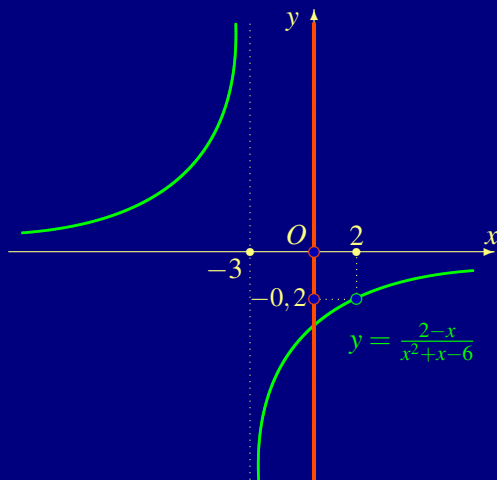
$$E(y) = (-\infty; -0,2) \cup (-0,2; 0) \cup (0; \infty).$$

Відповідь: -3 і 2 – корені квадратного рівняння;

$$\frac{2-x}{x^2+x-6} = -\frac{1}{x+3} \quad \text{при } x \in (\infty; -3) \cup (-3; 2) \cup (2; \infty);$$

$$E(y) = (-\infty; -0,2) \cup (-0,2; 0) \cup (0; \infty).$$

Приклади із ЗНО



Проектуючи графік функції y на вісь Oy , знаходимо область значень цієї функції:

$$E(y) = (-\infty; -0,2) \cup (-0,2; 0) \cup (0; \infty).$$

Відповідь: -3 і 2 – корені квадратного рівняння;

$$\frac{2-x}{x^2+x-6} = -\frac{1}{x+3} \quad \text{при } x \in (\infty; -3) \cup (-3; 2) \cup (2; \infty);$$

$$E(y) = (-\infty; -0,2) \cup (-0,2; 0) \cup (0; \infty).$$