Найбільше та найменше значення функції на відрізку

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

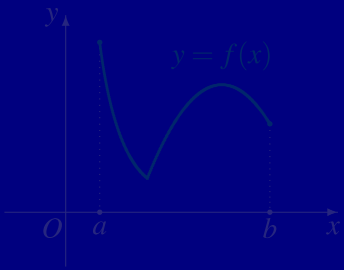
Урок 30 (частина перша)

Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Найбільше та найменше значення (абсолютні екстремуми) функції

Типовим і в той же час найбільш простим прикладом задачі про знаходження абсолютних екстремумів функції є задача про знаходження найбільшого та найменшого значень неперервної функції, заданої на деякому відрізку.

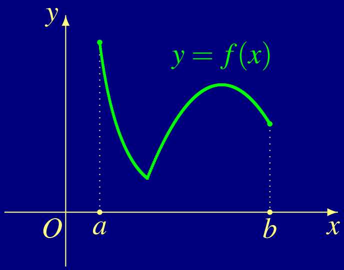


Нагадаємо, що графік неперервної на відрізку $[a,b]$ функції не має розривів на цьому відрізку.

Основні елементарні функції, що вивчаються в шкільному курсі математики, є неперервними в тих точках, в яких вони визначені.

Найбільше та найменше значення (абсолютні екстремуми) функції

Типовим і в той же час найбільш простим прикладом задачі про знаходження абсолютних екстремумів функції є задача про знаходження найбільшого та найменшого значень неперервної функції, заданої на деякому відрізку.

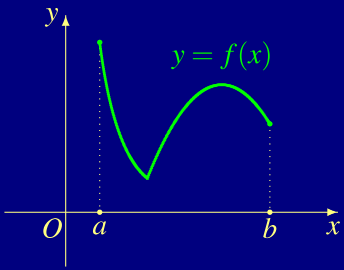


Нагадаємо, що графік неперервної на відрізку $[a, b]$ функції не має розривів на цьому відрізку.

Основні елементарні функції, що вивчаються в шкільному курсі математики, є неперервними в тих точках, в яких вони визначені.

Найбільше та найменше значення (абсолютні екстремуми) функції

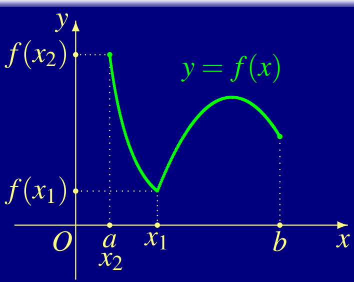
Типовим і в той же час найбільш простим прикладом задачі про знаходження абсолютних екстремумів функції є задача про знаходження найбільшого та найменшого значень неперервної функції, заданої на деякому відрізку.



Нагадаємо, що графік неперервної на відрізку $[a,b]$ функції не має розривів на цьому відрізку.

Основні елементарні функції, що вивчаються в шкільному курсі математики, є неперервними в тих точках, в яких вони визначені.

Найбільше та найменше значення (абсолютні екстремуми) функції



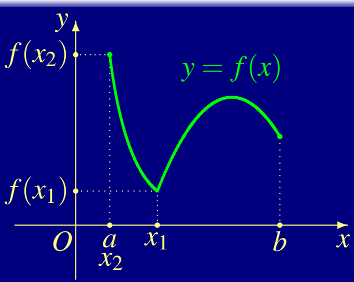
Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то існують точки $x_1, x_2 \in [a,b]$ такі, що $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$ для всіх $x \in [a,b]$.

- Очевидно, що в цьому випадку найменше значення функції $f(x_1)$ є абсолютним мінімумом цієї функції на відрізку $[a,b]$, а найбільше значення функції $f(x_2)$ – її абсолютним максимумом на цьому відрізку.

При цьому використовують позначення

$$f(x_1) = \min_{x\in[a,b]} f(x), \qquad f(x_2) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Найбільше та найменше значення (абсолютні екстремуми) функції



Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то існують точки $x_1, x_2 \in [a,b]$ такі, що $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ для всіх $x \in [a,b]$.

- Очевидно, що в цьому випадку найменше значення функції $f(x_1)$ є абсолютним мінімумом цієї функції на відрізку $[a,b]$, а найбільше значення функції $f(x_2)$ – її абсолютним максимумом на цьому відрізку.

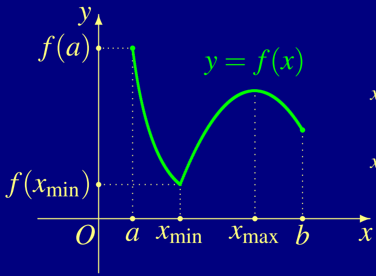
При цьому використовують позначення

$$f(x_1) = \min_{x\in[a,b]} f(x), \qquad f(x_2) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Найбільше та найменше значення функції

Підкреслимо, що

- неперервна на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$ приймає свої найменше та найбільше значення або в критичних точках, або на кінцях відрізка $[a,b]$ (див. мал., що ілюструє цю властивість неперервної функції).



$$\min_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_{\min})$$

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) = f(a)$$

Найбільше та найменше значення функції

Звідси випливає наступний алгоритм знаходження найбільшого та найменшого значення функції, неперервної на відрізку $[a, b]$:

- спочатку знаходимо критичні точки функції, що належать відрізку $[a, b]$;
- потім обчислюємо значення функції в цих критичних точках та на кінцях a і b відрізка;
- нарешті, вибираємо серед обчислених значень функції найбільше та найменше значення.

Найбільше та найменше значення функції

Звідси випливає наступний алгоритм знаходження найбільшого та найменшого значення функції, неперервної на відрізку $[a, b]$:

- спочатку знаходимо критичні точки функції, що належать відрізку $[a, b]$;
- потім обчислюємо значення функції в цих критичних точках та на кінцях a і b відрізка;
- нарешті, вибираємо серед обчислених значень функції найбільше та найменше значення.

Найбільше та найменше значення функції

Звідси випливає наступний алгоритм знаходження найбільшого та найменшого значення функції, неперервної на відрізку $[a,b]$:

- спочатку знаходимо критичні точки функції, що належать відрізку $[a,b]$;
- потім обчислюємо значення функції в цих критичних точках та на кінцях a і b відрізка;
- нарешті, вибираємо серед обчислених значень функції найбільше та найменше значення.

Найбільше та найменше значення функції

Звідси випливає наступний алгоритм знаходження найбільшого та найменшого значення функції, неперервної на відрізку $[a,b]$:

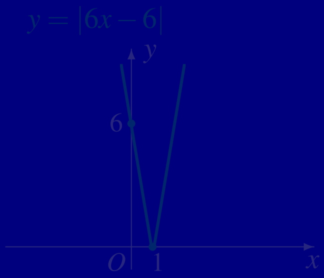
- спочатку знаходимо критичні точки функції, що належать відрізку $[a,b]$;
- потім обчислюємо значення функції в цих критичних точках та на кінцях a і b відрізка;
- нарешті, вибираємо серед обчислених значень функції найбільше та найменше значення.

Приклади

Приклад 1. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x)=x^2-|6x-6|$ на відрізку $[0;4]$.

Розв'язання. Розкриваючи модуль у виразі, яким задана функція $f(x)$, подамо цю функцію у вигляді

$$f(x)=x^2-|6x-6|=\left[\begin{array}{ll} x^2-6x+6, & \text{якщо} \quad x\ge 1, \\ x^2+6x-6, & \text{якщо} \quad x<1, \end{array}\right.$$



$y(0)=|6\cdot 0-6|=6$
$y=0\Rightarrow x=1$

При знаходженні похідної $f'(x)$ слід особливо виділити точку $x=1$, в якій підмодульний вираз $6x-6$ обертається в нуль, а графік функції $y=|6x-6|$ у відповідній точці має злам (див. мал.).

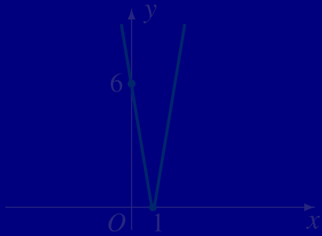
Приклади

Приклад 1. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = x^2 - |6x-6|$ на відрізку $[0;4]$.

Розв'язання. Розкриваючи модуль у виразі, яким задана функція $f(x)$, подамо цю функцію у вигляді

$$f(x) = x^2 - |6x-6| = \left[\begin{array}{lll} x^2 - 6x + 6, & \text{якщо} & x \geq 1, \\ x^2 + 6x - 6, & \text{якщо} & x < 1, \end{array} \right.$$

$y = |6x-6|$



$y(0) = |6 \cdot 0 - 6| = 6$

$y = 0 \Rightarrow x = 1$

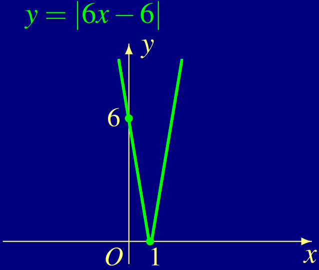
При знаходженні похідної $f'(x)$ слід особливо виділити точку $x = 1$, в якій підмодульний вираз $6x-6$ обертається в нуль, а графік функції $y = |6x-6|$ у відповідній точці має злам (див. мал.).

Приклади

Приклад 1. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = x^2 - |6x - 6|$ на відрізку $[0;4]$.

Розв'язання. Розкриваючи модуль у виразі, яким задана функція $f(x)$, подамо цю функцію у вигляді

$$f(x) = x^2 - |6x - 6| = \left[\begin{array}{ll} x^2 - 6x + 6, & \text{якщо} \quad x \geq 1, \\ x^2 + 6x - 6, & \text{якщо} \quad x < 1, \end{array} \right.$$



$y(0) = |6 \cdot 0 - 6| = 6$
$y = 0 \Rightarrow x = 1$

При знаходженні похідної $f'(x)$ слід особливо виділити точку $x = 1$, в якій підмодульний вираз $6x - 6$ обертається в нуль, а графік функції $y = |6x - 6|$ у відповідній точці має злам (див. мал.).

Приклади

Аналогічний злам при $x = 1$ у відповідній точці є також характерною особливістю графіка функції $f(x) = x^2 - |6x - 6|$. Це означає, що у зазначеній точці графік функції $y = f(x)$ не має дотичної, і тому похідна $f'(x)$ не визначена (!) при $x = 1$ (див. Урок 29).

Отже, маємо

$$f'(x) = \left[\begin{array}{lll} 2x-6, & \text{якщо} & x > 1, \\ \text{не визначена} & \text{при} & x = 1, \\ 2x+6, & \text{якщо} & x < 1, \end{array}\right.$$

і тому $x = 1$ — критична точка функції $f(x)$, яка до того ж належить відрізку $[0;4]$.

Знаходимо інші критичні точки:

$$f'(x) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-6=0, \\ x>1, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+6=0, \\ x<1, \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -3, \end{array}\right.$$

з яких відрізку $[0;4]$ належить точка $x = 3$.

Приклади

Аналогічний злам при $x = 1$ у відповідній точці є також характерною особливістю графіка функції $f(x) = x^2 - |6x - 6|$. Це означає, що у зазначеній точці графік функції $y = f(x)$ не має дотичної, і тому похідна $f'(x)$ не визначена (!) при $x = 1$ (див. Урок 29).

Отже, маємо

$$f'(x) = \left[\begin{array}{lll} 2x-6\,, & \text{якщо} & x>1\,, \\ \text{не визначена} & \text{при} & x=1\,, \\ 2x+6\,, & \text{якщо} & x<1\,, \end{array}\right.$$

і тому $x = 1$ — критична точка функції $f(x)$, яка до того ж належить відрізку $[0;4]$.

Знаходимо інші критичні точки:

$$f'(x) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-6=0\,, \\ x>1\,, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+6=0\,, \\ x<1\,, \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x=3\,, \\ x=-3\,, \end{array}\right.$$

з яких відрізку $[0;4]$ належить точка $x = 3$.

Приклади

Аналогічний злам при $x = 1$ у відповідній точці є також характерною особливістю графіка функції $f(x) = x^2 - |6x - 6|$. Це означає, що у зазначеній точці графік функції $y = f(x)$ не має дотичної, і тому похідна $f'(x)$ не визначена (!) при $x = 1$ (див. Урок 29).

Отже, маємо

$$f'(x) = \left[\begin{array}{lll} 2x-6, & \text{якщо} & x > 1, \\ \text{не визначена} & \text{при} & x = 1, \\ 2x+6, & \text{якщо} & x < 1, \end{array}\right.$$

і тому $x = 1$ — критична точка функції $f(x)$, яка до того ж належить відрізку $[0;4]$.

Знаходимо інші критичні точки:

$$f'(x) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-6=0, \\ x>1, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+6=0, \\ x<1, \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -3, \end{array}\right.$$

з яких відрізку $[0;4]$ належить точка $x = 3$.

Приклади

Тепер знаходимо значення функції $f(x) = x^2 - |6x - 6|$ в критичних точках функції, що належать відрізку $[0;4]$, та на кінцях цього відрізка:

$f(1) = 1$,

$f(3) = 3^2 - |6 \cdot 3 - 6| = -3$,

$f(0) = 0 - |-6| = -6$,

$f(4) = 4^2 - |6 \cdot 4 - 6| = -2$.

Отже,

$\max\limits_{x \in [0;4]} f(x) = \max\{1; -3; -6; -2\} = 1$,

$\min\limits_{x \in [0;4]} f(x) = \min\{1; -3; -6; -2)\} = -6$.

Відповідь: $\max\limits_{x \in [0;4]} f(x) = 1$, $\min\limits_{x \in [0;4]} f(x) = -6$.

Приклади

Тепер знаходимо значення функції $f(x) = x^2 - |6x - 6|$ в критичних точках функції, що належать відрізку $[0;4]$, та на кінцях цього відрізка:

$f(1) = 1$,

$f(3) = 3^2 - |6 \cdot 3 - 6| = -3$,

$f(0) = 0 - |-6| = -6$,

$f(4) = 4^2 - |6 \cdot 4 - 6| = -2$.

Отже,

$\max\limits_{x \in [0;4]} f(x) = \max\{1; -3; -6; -2\} = 1$,

$\min\limits_{x \in [0;4]} f(x) = \min\{1; -3; -6; -2)\} = -6$.

Відповідь: $\max\limits_{x \in [0;4]} f(x) = 1$, $\min\limits_{x \in [0;4]} f(x) = -6$.

Приклади

Тепер знаходимо значення функції $f(x)=x^2-|6x-6|$ в критичних точках функції, що належать відрізку $[0;4]$, та на кінцях цього відрізка:

$f(1)=1$,

$f(3)=3^2-|6\cdot 3-6|=-3$,

$f(0)=0-|-6|=-6$,

$f(4)=4^2-|6\cdot 4-6|=-2$.

Отже,

$\max\limits_{x\in[0;4]} f(x)=\max\{1;-3;-6;-2\}=1$,

$\min\limits_{x\in[0;4]} f(x)=\min\{1;-3;-6;-2)\}=-6$.

Відповідь: $\max\limits_{x\in[0;4]} f(x)=1$, $\min\limits_{x\in[0;4]} f(x)=-6$.

Приклади

Тепер знаходимо значення функції $f(x) = x^2 - |6x - 6|$ в критичних точках функції, що належать відрізку $[0;4]$, та на кінцях цього відрізка:

$f(1) = 1$,

$f(3) = 3^2 - |6 \cdot 3 - 6| = -3$,

$f(0) = 0 - |-6| = -6$,

$f(4) = 4^2 - |6 \cdot 4 - 6| = -2$.

Отже,

$$\max_{x \in [0;4]} f(x) = \max\{1; -3; -6; -2\} = 1,$$

$$\min_{x \in [0;4]} f(x) = \min\{1; -3; -6; -2)\} = -6.$$

Відповідь: $\max\limits_{x \in [0;4]} f(x) = 1$, $\min\limits_{x \in [0;4]} f(x) = -6$.

Приклади

Тепер знаходимо значення функції $f(x) = x^2 - |6x - 6|$ в критичних точках функції, що належать відрізку $[0;4]$, та на кінцях цього відрізка:

$f(1) = 1$,

$f(3) = 3^2 - |6 \cdot 3 - 6| = -3$,

$f(0) = 0 - |-6| = -6$,

$f(4) = 4^2 - |6 \cdot 4 - 6| = -2$.

Отже,

$$\max_{x \in [0;4]} f(x) = \max\{1; -3; -6; -2\} = 1,$$

$$\min_{x \in [0;4]} f(x) = \min\{1; -3; -6; -2)\} = -6.$$

Відповідь: $\max_{x \in [0;4]} f(x) = 1$, $\min_{x \in [0;4]} f(x) = -6$.

Приклади

Тепер знаходимо значення функції $f(x)=x^2-|6x-6|$ в критичних точках функції, що належать відрізку $[0;4]$, та на кінцях цього відрізка:

$f(1)=1$,

$f(3)=3^2-|6\cdot 3-6|=-3$,

$f(0)=0-|-6|=-6$,

$f(4)=4^2-|6\cdot 4-6|=-2$.

Отже,

$$\max_{x\in[0;4]} f(x)=\max\{1;-3;-6;-2\}=1,$$

$$\min_{x\in[0;4]} f(x)=\min\{1;-3;-6;-2)\}=-6.$$

Відповідь: $\max\limits_{x\in[0;4]} f(x)=1$, $\min\limits_{x\in[0;4]} f(x)=-6$.

Приклади

Тепер знаходимо значення функції $f(x) = x^2 - |6x-6|$ в критичних точках функції, що належать відрізку $[0;4]$, та на кінцях цього відрізка:

$f(1) = 1$,

$f(3) = 3^2 - |6 \cdot 3 - 6| = -3$,

$f(0) = 0 - |-6| = -6$,

$f(4) = 4^2 - |6 \cdot 4 - 6| = -2$.

Отже,

$$\max_{x\in[0;4]} f(x) = \max\{1; -3; -6; -2\} = 1,$$

$$\min_{x\in[0;4]} f(x) = \min\{1; -3; -6; -2)\} = -6.$$

Відповідь: $\max\limits_{x\in[0;4]} f(x) = 1$, $\min\limits_{x\in[0;4]} f(x) = -6$.

Приклади

Приклад 2. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = 3\sin 2x - \sin 6x$ на відрізку $[0;\pi/2]$.

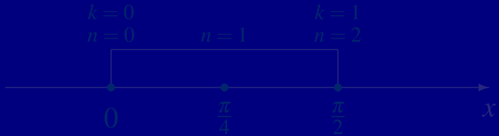
Розв'язання. Знаходимо критичні точки функції $f(x)$:

$f'(x) = 6\cos 2x - 6\cos 6x$;

$$f'(x) = 0 \iff \cos 2x - \cos 6x = 0 \iff 2\sin 4x \cdot \sin 2x = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \sin 4x = 0, \\ \sin 2x = 0, \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi n}{4}, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{\pi k}{2}, & k \in \mathbf{Z}. \end{array} \right.$$

Проміжку $[0,\pi/2]$ належать три критичні точки функції $f(x)$, а саме: $x = 0$ (при $n = k = 0$), $x = \frac{\pi}{4}$ (при $n = 1$) і $x = \frac{\pi}{2}$ (при $n = 2$ і $k = 1$).



Приклади

Приклад 2. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = 3\sin 2x - \sin 6x$ на відрізку $[0;\pi/2]$.

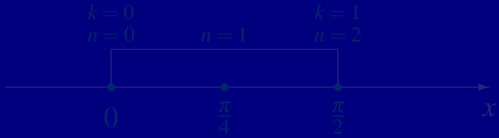
Розв'язання. Знаходимо критичні точки функції $f(x)$:

$f'(x) = 6\cos 2x - 6\cos 6x$;

$$f'(x) = 0 \iff \cos 2x - \cos 6x = 0 \iff 2\sin 4x \cdot \sin 2x = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \sin 4x = 0, \\ \sin 2x = 0, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi n}{4}, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{\pi k}{2}, & k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Проміжку $[0,\pi/2]$ належать три критичні точки функції $f(x)$, а саме: $x = 0$ (при $n = k = 0$), $x = \frac{\pi}{4}$ (при $n = 1$) і $x = \frac{\pi}{2}$ (при $n = 2$ і $k = 1$).



Приклади

Приклад 2. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = 3\sin 2x - \sin 6x$ на відрізку $[0; \pi/2]$.

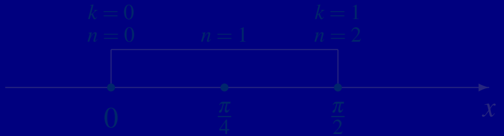
Розв'язання. Знаходимо критичні точки функції $f(x)$:

$$f'(x) = 6\cos 2x - 6\cos 6x\,;$$

$$f'(x) = 0 \iff \cos 2x - \cos 6x = 0 \iff 2\sin 4x \cdot \sin 2x = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \sin 4x = 0\,, \\ \sin 2x = 0\,, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi n}{4}\,, & n \in \mathbf{Z}\,, \\ x = \frac{\pi k}{2}\,, & k \in \mathbf{Z}\,. \end{array}\right.$$

Проміжку $[0, \pi/2]$ належать три критичні точки функції $f(x)$, а саме: $x = 0$ (при $n = k = 0$), $x = \frac{\pi}{4}$ (при $n = 1$) і $x = \frac{\pi}{2}$ (при $n = 2$ і $k = 1$).



Приклади

П р и к л а д 2. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = 3\sin 2x - \sin 6x$ на відрізку $[0; \pi/2]$.

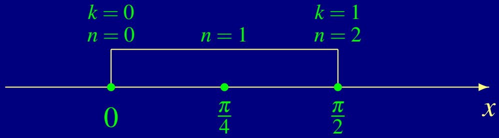
Р о з в' я з а н н я. Знаходимо критичні точки функції $f(x)$:

$f'(x) = 6\cos 2x - 6\cos 6x$;

$$f'(x) = 0 \iff \cos 2x - \cos 6x = 0 \iff 2\sin 4x \cdot \sin 2x = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \sin 4x = 0, \\ \sin 2x = 0, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi n}{4}, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{\pi k}{2}, & k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Проміжку $[0, \pi/2]$ належать три критичні точки функції $f(x)$, а саме: $x = 0$ (при $n = k = 0$), $x = \frac{\pi}{4}$ (при $n = 1$) і $x = \frac{\pi}{2}$ (при $n = 2$ і $k = 1$).



Приклади

Тепер знаходимо значення функції $f(x) = 3\sin 2x - \sin 6x$ в критичних точках функції, що належать відрізку $[0; \pi/2]$, та на кінцях цього відрізка:

$f(0) = 0$,

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(6\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 3\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2} = 3\cdot 1 - (-1) = 4$,

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\sin\pi - \sin 3\pi = 0$.

Отже,

$$\max_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = \max\{0; 4\} = 4,$$

$$\min_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = \min\{0; 4\} = 0.$$

Відповідь: $\max\limits_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = 4$, $\min\limits_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = 0$.

Приклади

Тепер знаходимо значення функції $f(x) = 3\sin 2x - \sin 6x$ в критичних точках функції, що належать відрізку $[0; \pi/2]$, та на кінцях цього відрізка:

$f(0) = 0$,

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(6\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 3\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2} = 3\cdot 1 - (-1) = 4$,

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\sin\pi - \sin 3\pi = 0$.

Отже,

$$\max_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = \max\{0; 4\} = 4,$$

$$\min_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = \min\{0; 4\} = 0.$$

Відповідь: $\max\limits_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = 4$, $\min\limits_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = 0$.

Приклади

Тепер знаходимо значення функції $f(x) = 3\sin 2x - \sin 6x$ в критичних точках функції, що належать відрізку $[0; \pi/2]$, та на кінцях цього відрізка:

$$f(0) = 0,$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(6\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 3\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2} = 3\cdot 1 - (-1) = 4,$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\sin\pi - \sin 3\pi = 0.$$

Отже,

$$\max_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = \max\{0; 4\} = 4,$$

$$\min_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = \min\{0; 4\} = 0.$$

В і д п о в і д ь: $\max\limits_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = 4$, $\min\limits_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = 0$.

Приклади

Тепер знаходимо значення функції $f(x) = 3\sin 2x - \sin 6x$ в критичних точках функції, що належать відрізку $[0; \pi/2]$, та на кінцях цього відрізка:

$$f(0) = 0,$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(6\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 3\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2} = 3\cdot 1 - (-1) = 4,$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\sin\pi - \sin 3\pi = 0.$$

Отже,

$$\max_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = \max\{0; 4\} = 4,$$

$$\min_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = \min\{0; 4\} = 0.$$

Відповідь: $\max\limits_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = 4$, $\min\limits_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = 0$.

Приклади

Тепер знаходимо значення функції $f(x) = 3\sin 2x - \sin 6x$ в критичних точках функції, що належать відрізку $[0; \pi/2]$, та на кінцях цього відрізка:

$$f(0) = 0,$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(6\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 3\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2} = 3\cdot 1 - (-1) = 4,$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\sin\pi - \sin 3\pi = 0.$$

Отже,

$$\max_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = \max\{0; 4\} = 4,$$

$$\min_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = \min\{0; 4\} = 0.$$

Відповідь: $\max\limits_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = 4$, $\min\limits_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = 0$.

Приклади

Тепер знаходимо значення функції $f(x) = 3\sin 2x - \sin 6x$ в критичних точках функції, що належать відрізку $[0; \pi/2]$, та на кінцях цього відрізка:

$$f(0) = 0,$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(6\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 3\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2} = 3\cdot 1 - (-1) = 4,$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\sin\pi - \sin 3\pi = 0.$$

Отже,

$$\max_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = \max\{0; 4\} = 4,$$

$$\min_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = \min\{0; 4\} = 0.$$

Відповідь: $\max\limits_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = 4$, $\min\limits_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = 0$.

Застосування похідної до доведення нерівностей

Ідея застосування похідної до доведення багатьох нерівностей базується на наступних твердженнях.

- Неперервна на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$ задовольняє нерівність $f(x) > A$ (чи $f(x) \geq A$) при всіх $x \in [a,b]$ тоді і тільки тоді, коли $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) > A$ (відповідно, $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) \geq A$).
- Неперервна на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$ задовольняє нерівність $f(x) < B$ (чи $f(x) \leq B$) при всіх $x \in [a,b]$ тоді і тільки тоді, коли $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) < B$ (відповідно, $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) \leq B$).

Приклад 3. Довести, що $0 \leq 3\sin 2x - \sin 6x \leq 4$ для всіх $x \in [0;\pi/2]$.

Доведення. Розглянемо функцію $f(x) = 3\sin 2x - \sin 6x$ і знайдемо її найбільше та найменше значення на відрізку $[0;\pi/2]$ (див. попередній приклад):

$$\max_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = 4, \qquad \min_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = 0.$$

Отже, $0 \leq f(x) \leq 4$ для всіх $x \in [0;\pi/2]$.

Доведення завершено.

Застосування похідної до доведення нерівностей

Ідея застосування похідної до доведення багатьох нерівностей базується на наступних твердженнях.

- Неперервна на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$ задовольняє нерівність $f(x) > A$ (чи $f(x) \geq A$) при всіх $x \in [a,b]$ тоді і тільки тоді, коли $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) > A$ (відповідно, $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) \geq A$).
- Неперервна на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$ задовольняє нерівність $f(x) < B$ (чи $f(x) \leq B$) при всіх $x \in [a,b]$ тоді і тільки тоді, коли $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) < B$ (відповідно, $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) \leq B$).

П р и к л а д 3. Довести, що $0 \leq 3\sin 2x - \sin 6x \leq 4$ для всіх $x \in [0;\pi/2]$.

Д о в е д е н н я. Розглянемо функцію $f(x) = 3\sin 2x - \sin 6x$ і знайдемо її найбільше та найменше значення на відрізку $[0;\pi/2]$ (див. попередній приклад):

$$\max_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = 4, \qquad \min_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = 0.$$

Отже, $0 \leq f(x) \leq 4$ для всіх $x \in [0;\pi/2]$.

Доведення завершено.

Застосування похідної до доведення нерівностей

Ідея застосування похідної до доведення багатьох нерівностей базується на наступних твердженнях.

- Неперервна на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$ задовольняє нерівність $f(x) > A$ (чи $f(x) \geq A$) при всіх $x \in [a,b]$ тоді і тільки тоді, коли $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) > A$ (відповідно, $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) \geq A$).
- Неперервна на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$ задовольняє нерівність $f(x) < B$ (чи $f(x) \leq B$) при всіх $x \in [a,b]$ тоді і тільки тоді, коли $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) < B$ (відповідно, $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) \leq B$).

Приклад 3. Довести, що $0 \leq 3\sin 2x - \sin 6x \leq 4$ для всіх $x \in [0;\pi/2]$.

Доведення. Розглянемо функцію $f(x) = 3\sin 2x - \sin 6x$ і знайдемо її найбільше та найменше значення на відрізку $[0;\pi/2]$ (див. попередній приклад):

$$\max_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = 4, \qquad \min_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = 0.$$

Отже, $0 \leq f(x) \leq 4$ для всіх $x \in [0;\pi/2]$.

Доведення завершено.

Застосування похідної до доведення нерівностей

Ідея застосування похідної до доведення багатьох нерівностей базується на наступних твердженнях.

- Неперервна на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$ задовольняє нерівність $f(x) > A$ (чи $f(x) \geq A$) при всіх $x \in [a,b]$ тоді і тільки тоді, коли $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) > A$ (відповідно, $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) \geq A$).
- Неперервна на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$ задовольняє нерівність $f(x) < B$ (чи $f(x) \leq B$) при всіх $x \in [a,b]$ тоді і тільки тоді, коли $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) < B$ (відповідно, $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) \leq B$).

П р и к л а д 3. Довести, що $0 \leq 3\sin 2x - \sin 6x \leq 4$ для всіх $x \in [0;\pi/2]$.

Д о в е д е н н я. Розглянемо функцію $f(x) = 3\sin 2x - \sin 6x$ і знайдемо її найбільше та найменше значення на відрізку $[0;\pi/2]$ (див. попередній приклад):

$$\max_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = 4, \qquad \min_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = 0.$$

Отже, $0 \leq f(x) \leq 4$ для всіх $x \in [0;\pi/2]$.

Доведення завершено.

Застосування похідної до доведення нерівностей

Ідея застосування похідної до доведення багатьох нерівностей базується на наступних твердженнях.

- Неперервна на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$ задовольняє нерівність $f(x) > A$ (чи $f(x) \geq A$) при всіх $x \in [a,b]$ тоді і тільки тоді, коли $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) > A$ (відповідно, $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) \geq A$).
- Неперервна на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$ задовольняє нерівність $f(x) < B$ (чи $f(x) \leq B$) при всіх $x \in [a,b]$ тоді і тільки тоді, коли $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) < B$ (відповідно, $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) \leq B$).

Приклад 3. Довести, що $0 \leq 3\sin 2x - \sin 6x \leq 4$ для всіх $x \in [0;\pi/2]$.

Доведення. Розглянемо функцію $f(x) = 3\sin 2x - \sin 6x$ і знайдемо її найбільше та найменше значення на відрізку $[0;\pi/2]$ (див. попередній приклад):

$$\max_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = 4, \qquad \min_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = 0.$$

Отже, $0 \leq f(x) \leq 4$ для всіх $x \in [0;\pi/2]$.

Доведення завершено.

Застосування похідної до доведення нерівностей

Ідея застосування похідної до доведення багатьох нерівностей базується на наступних твердженнях.

- Неперервна на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$ задовольняє нерівність $f(x) > A$ (чи $f(x) \geq A$) при всіх $x \in [a,b]$ тоді і тільки тоді, коли $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) > A$ (відповідно, $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) \geq A$).
- Неперервна на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$ задовольняє нерівність $f(x) < B$ (чи $f(x) \leq B$) при всіх $x \in [a,b]$ тоді і тільки тоді, коли $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) < B$ (відповідно, $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) \leq B$).

Приклад 3. Довести, що $0 \leq 3\sin 2x - \sin 6x \leq 4$ для всіх $x \in [0;\pi/2]$.

Доведення. Розглянемо функцію $f(x) = 3\sin 2x - \sin 6x$ і знайдемо її найбільше та найменше значення на відрізку $[0;\pi/2]$ (див. попередній приклад):

$$\max_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = 4, \qquad \min_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = 0.$$

Отже, $0 \leq f(x) \leq 4$ для всіх $x \in [0;\pi/2]$.

Доведення завершено.

Приклади із ЗНО

Приклад 4 (Пробне тестування ЗНО, 2012 р.).
Знайдіть найбільше значення функції $f(x) = 12x - x^3$ на відрізку $[0;3]$.

Розв'язання. Очевидно, що функція $f(x)$ та її похідна $f'(x) = 12 - 3x^2$ визначені всюди на $\mathbf{R}$.
Знаходимо критичні точки цієї функції:
$f'(x) = 0 \iff 12 - 3x^2 = 0 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2$,
з яких відрізку $[0;3]$ належить тільки точка $x = 2$.
Тепер знаходимо значення функції $f(x)$ в критичній точці $x = 2$ та на кінцях відрізка $[0;3]$:

$$f(2) = 12 \cdot 2 - 2^3 = 24 - 8 = 16,$$
$$f(0) = 0,$$
$$f(3) = 12 \cdot 3 - 3^3 = 36 - 27 = 9.$$

Отже, $\max\limits_{x \in [0;3]} f(x) = \max\{16; 0; 9\} = 16$.

Відповідь: 16.

Приклади із ЗНО

П р и к л а д 4 (Пробне тестування ЗНО, 2012 р.).
Знайдіть найбільше значення функції $f(x)=12x-x^3$ на відрізку $[0;3]$.

Р о з в' я з а н н я. Очевидно, що функція $f(x)$ та її похідна $f'(x)=12-3x^2$ визначені всюди на $\mathbf{R}$.

Знаходимо критичні точки цієї функції:
$f'(x)=0 \iff 12-3x^2=0 \iff x^2=4 \iff x=\pm 2$,
з яких відрізку $[0;3]$ належить тільки точка $x=2$.

Тепер знаходимо значення функції $f(x)$ в критичній точці $x=2$ та на кінцях відрізка $[0;3]$:

$f(2)=12\cdot 2-2^3=24-8=16$,

$f(0)=0$,

$f(3)=12\cdot 3-3^3=36-27=9$.

Отже, $\max\limits_{x\in[0;3]} f(x)=\max\{16;0;9\}=16$.

В і д п о в і д ь: 16.

Приклади із ЗНО

Приклад 4 (Пробне тестування ЗНО, 2012 р.).
Знайдіть найбільше значення функції $f(x) = 12x - x^3$ на відрізку $[0;3]$.

Розв'язання. Очевидно, що функція $f(x)$ та її похідна $f'(x) = 12 - 3x^2$ визначені всюди на $\mathbf{R}$.
Знаходимо критичні точки цієї функції:
$f'(x) = 0 \iff 12 - 3x^2 = 0 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2$,
з яких відрізку $[0;3]$ належить тільки точка $x = 2$.
Тепер знаходимо значення функції $f(x)$ в критичній точці $x = 2$ та на кінцях відрізка $[0;3]$:

$f(2) = 12 \cdot 2 - 2^3 = 24 - 8 = 16$,

$f(0) = 0$,

$f(3) = 12 \cdot 3 - 3^3 = 36 - 27 = 9$.

Отже, $\max\limits_{x \in [0;3]} f(x) = \max\{16; 0; 9\} = 16$.

Відповідь: 16.

Приклади із ЗНО

Приклад 4 (Пробне тестування ЗНО, 2012 р.).
Знайдіть найбільше значення функції $f(x) = 12x - x^3$ на відрізку $[0;3]$.

Розв'язання. Очевидно, що функція $f(x)$ та її похідна $f'(x) = 12 - 3x^2$ визначені всюди на $\mathbf{R}$.

Знаходимо критичні точки цієї функції:
$f'(x) = 0 \iff 12 - 3x^2 = 0 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2$,
з яких відрізку $[0;3]$ належить тільки точка $x = 2$.

Тепер знаходимо значення функції $f(x)$ в критичній точці $x = 2$ та на кінцях відрізка $[0;3]$:

$f(2) = 12 \cdot 2 - 2^3 = 24 - 8 = 16$,

$f(0) = 0$,

$f(3) = 12 \cdot 3 - 3^3 = 36 - 27 = 9$.

Отже, $\max\limits_{x \in [0;3]} f(x) = \max\{16; 0; 9\} = 16$.

Відповідь: 16.

Приклади із ЗНО

Приклад 4 (Пробне тестування ЗНО, 2012 р.). Знайдіть найбільше значення функції $f(x)=12x-x^3$ на відрізку $[0;3]$.

Розв'язання. Очевидно, що функція $f(x)$ та її похідна $f'(x)=12-3x^2$ визначені всюди на $\mathbf{R}$.

Знаходимо критичні точки цієї функції:
$f'(x)=0 \iff 12-3x^2=0 \iff x^2=4 \iff x=\pm 2$,
з яких відрізку $[0;3]$ належить тільки точка $x=2$.

Тепер знаходимо значення функції $f(x)$ в критичній точці $x=2$ та на кінцях відрізка $[0;3]$:

$f(2)=12\cdot 2-2^3=24-8=16$,

$f(0)=0$,

$f(3)=12\cdot 3-3^3=36-27=9$.

Отже, $\max\limits_{x\in[0;3]} f(x)=\max\{16;0;9\}=16$.

Відповідь: 16.

Приклади із ЗНО

Приклад 4 (Пробне тестування ЗНО, 2012 р.).
Знайдіть найбільше значення функції $f(x)=12x-x^3$ на відрізку $[0;3]$.

Розв'язання. Очевидно, що функція $f(x)$ та її похідна $f'(x)=12-3x^2$ визначені всюди на $\mathbf{R}$.

Знаходимо критичні точки цієї функції:
$f'(x)=0 \iff 12-3x^2=0 \iff x^2=4 \iff x=\pm 2$,
з яких відрізку $[0;3]$ належить тільки точка $x=2$.

Тепер знаходимо значення функції $f(x)$ в критичній точці $x=2$ та на кінцях відрізка $[0;3]$:

$f(2)=12\cdot 2-2^3=24-8=16$,

$f(0)=0$,

$f(3)=12\cdot 3-3^3=36-27=9$.

Отже, $\max\limits_{x\in[0;3]} f(x)=\max\{16;0;9\}=16$.

Відповідь: 16.

Приклади із ЗНО

Приклад 4 (Пробне тестування ЗНО, 2012 р.).
Знайдіть найбільше значення функції $f(x) = 12x - x^3$ на відрізку $[0;3]$.

Розв'язання. Очевидно, що функція $f(x)$ та її похідна $f'(x) = 12 - 3x^2$ визначені всюди на $\mathbf{R}$.
Знаходимо критичні точки цієї функції:
$f'(x) = 0 \iff 12 - 3x^2 = 0 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2$,
з яких відрізку $[0;3]$ належить тільки точка $x = 2$.
Тепер знаходимо значення функції $f(x)$ в критичній точці $x = 2$ та на кінцях відрізка $[0;3]$:

$$f(2) = 12 \cdot 2 - 2^3 = 24 - 8 = 16,$$
$$f(0) = 0,$$
$$f(3) = 12 \cdot 3 - 3^3 = 36 - 27 = 9.$$

Отже, $\max\limits_{x \in [0;3]} f(x) = \max\{16; 0; 9\} = 16$.

Відповідь: 16.

Приклади із ЗНО

Приклад 4 (Пробне тестування ЗНО, 2012 р.).
Знайдіть найбільше значення функції $f(x)=12x-x^3$ на відрізку $[0;3]$.

Розв'язання. Очевидно, що функція $f(x)$ та її похідна $f'(x)=12-3x^2$ визначені всюди на $\mathbf{R}$.
Знаходимо критичні точки цієї функції:
$f'(x)=0 \iff 12-3x^2=0 \iff x^2=4 \iff x=\pm 2$,
з яких відрізку $[0;3]$ належить тільки точка $x=2$.
Тепер знаходимо значення функції $f(x)$ в критичній точці $x=2$ та на кінцях відрізка $[0;3]$:

$f(2)=12\cdot 2-2^3=24-8=16$,

$f(0)=0$,

$f(3)=12\cdot 3-3^3=36-27=9$.

Отже, $\max\limits_{x\in[0;3]} f(x)=\max\{16;0;9\}=16$.

Відповідь: 16.

Приклади із ЗНО

Приклад 4 (Пробне тестування ЗНО, 2012 р.).
Знайдіть найбільше значення функції $f(x) = 12x - x^3$ на відрізку $[0;3]$.

Розв'язання. Очевидно, що функція $f(x)$ та її похідна $f'(x) = 12 - 3x^2$ визначені всюди на $\mathbf{R}$.
Знаходимо критичні точки цієї функції:
$f'(x) = 0 \iff 12 - 3x^2 = 0 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2$,
з яких відрізку $[0;3]$ належить тільки точка $x = 2$.
Тепер знаходимо значення функції $f(x)$ в критичній точці $x = 2$ та на кінцях відрізка $[0;3]$:

$$f(2) = 12 \cdot 2 - 2^3 = 24 - 8 = 16,$$
$$f(0) = 0,$$
$$f(3) = 12 \cdot 3 - 3^3 = 36 - 27 = 9.$$

Отже, $\max\limits_{x \in [0;3]} f(x) = \max\{16; 0; 9\} = 16$.

Відповідь: 16.

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Пробне тестування ЗНО, 2015 р.). При якому значенні параметра c найменше значення функції $f(x) = x^4 - 8x^2 + c$ на відрізку $[-1;3]$ дорівнює 30.

Розв'язання. Очевидно, що функція $f(x)$ та її похідна $f'(x) = 4x^3 - 16x$ визначені всюди на $\mathbf{R}$.

Знаходимо критичні точки цієї функції:

$$f'(x) = 0 \iff 4x^3 - 16x = 0 \iff 4x(x^2 - 4) = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x^2 - 4 = 0, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \pm 2, \end{array}\right.$$

з яких відрізку $[-1;3]$ належать точки $x = 0$ і $x = 2$.

Тепер знаходимо значення функції $f(x)$ в критичних точках $x = 0$, $x = 2$ та на кінцях відрізка $[-1;3]$:

$f(0) = c$,

$f(2) = 2^4 - 8 \cdot 2^2 + c = 16 - 32 + c = c - 16$,

$f(-1) = (-1)^4 - 8 \cdot (-1)^2 + c = 1 - 8 + c = c - 7$,

$f(3) = 3^4 - 8 \cdot 3^2 + c = 81 - 72 + c = c + 9$.

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Пробне тестування ЗНО, 2015 р.). При якому значенні параметра c найменше значення функції $f(x)=x^4-8x^2+c$ на відрізку $[-1;3]$ дорівнює 30.

Розв'язання. Очевидно, що функція $f(x)$ та її похідна $f'(x)=4x^3-16x$ визначені всюди на $\mathbf{R}$.

Знаходимо критичні точки цієї функції:

$$f'(x)=0 \iff 4x^3-16x=0 \iff 4x(x^2-4)=0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x^2-4=0, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=\pm 2, \end{array}\right.$$

з яких відрізку $[-1;3]$ належать точки $x=0$ і $x=2$.

Тепер знаходимо значення функції $f(x)$ в критичних точках $x=0$, $x=2$ та на кінцях відрізка $[-1;3]$:

$f(0)=c$,

$f(2)=2^4-8\cdot 2^2+c=16-32+c=c-16$,

$f(-1)=(-1)^4-8\cdot(-1)^2+c=1-8+c=c-7$,

$f(3)=3^4-8\cdot 3^2+c=81-72+c=c+9$.

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Пробне тестування ЗНО, 2015 р.). При якому значенні параметра c найменше значення функції $f(x) = x^4 - 8x^2 + c$ на відрізку $[-1;3]$ дорівнює 30.

Розв'язання. Очевидно, що функція $f(x)$ та її похідна $f'(x) = 4x^3 - 16x$ визначені всюди на $\mathbf{R}$.

Знаходимо критичні точки цієї функції:

$$f'(x) = 0 \iff 4x^3 - 16x = 0 \iff 4x(x^2 - 4) = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x^2 - 4 = 0, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \pm 2, \end{array}\right.$$

з яких відрізку $[-1;3]$ належать точки $x = 0$ і $x = 2$.

Тепер знаходимо значення функції $f(x)$ в критичних точках $x = 0$, $x = 2$ та на кінцях відрізка $[-1;3]$:

$f(0) = c$,

$f(2) = 2^4 - 8 \cdot 2^2 + c = 16 - 32 + c = c - 16$,

$f(-1) = (-1)^4 - 8 \cdot (-1)^2 + c = 1 - 8 + c = c - 7$,

$f(3) = 3^4 - 8 \cdot 3^2 + c = 81 - 72 + c = c + 9$.

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Пробне тестування ЗНО, 2015 р.). При якому значенні параметра c найменше значення функції $f(x)=x^4-8x^2+c$ на відрізку $[-1;3]$ дорівнює 30.

Розв'язання. Очевидно, що функція $f(x)$ та її похідна $f'(x)=4x^3-16x$ визначені всюди на $\mathbf{R}$.

Знаходимо критичні точки цієї функції:

$$f'(x)=0 \iff 4x^3-16x=0 \iff 4x(x^2-4)=0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x^2-4=0, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=\pm 2, \end{array}\right.$$

з яких відрізку $[-1;3]$ належать точки $x=0$ і $x=2$.

Тепер знаходимо значення функції $f(x)$ в критичних точках $x=0$, $x=2$ та на кінцях відрізка $[-1;3]$:

$f(0)=c$,

$f(2)=2^4-8\cdot 2^2+c=16-32+c=c-16$,

$f(-1)=(-1)^4-8\cdot(-1)^2+c=1-8+c=c-7$,

$f(3)=3^4-8\cdot 3^2+c=81-72+c=c+9$.

Приклади із ЗНО

П р и к л а д 5 (Пробне тестування ЗНО, 2015 р.). При якому значенні параметра c найменше значення функції $f(x) = x^4 - 8x^2 + c$ на відрізку $[-1;3]$ дорівнює 30.

Р о з в' я з а н н я. Очевидно, що функція $f(x)$ та її похідна $f'(x) = 4x^3 - 16x$ визначені всюди на $\mathbf{R}$.

Знаходимо критичні точки цієї функції:

$$f'(x) = 0 \iff 4x^3 - 16x = 0 \iff 4x(x^2 - 4) = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x^2 - 4 = 0, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \pm 2, \end{array}\right.$$

з яких відрізку $[-1;3]$ належать точки $x = 0$ і $x = 2$.

Тепер знаходимо значення функції $f(x)$ в критичних точках $x = 0$, $x = 2$ та на кінцях відрізка $[-1;3]$:

$f(0) = c$,

$f(2) = 2^4 - 8 \cdot 2^2 + c = 16 - 32 + c = c - 16$,

$f(-1) = (-1)^4 - 8 \cdot (-1)^2 + c = 1 - 8 + c = c - 7$,

$f(3) = 3^4 - 8 \cdot 3^2 + c = 81 - 72 + c = c + 9$.

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Пробне тестування ЗНО, 2015 р.). При якому значенні параметра c найменше значення функції $f(x) = x^4 - 8x^2 + c$ на відрізку $[-1;3]$ дорівнює 30.

Розв'язання. Очевидно, що функція $f(x)$ та її похідна $f'(x) = 4x^3 - 16x$ визначені всюди на $\mathbf{R}$.

Знаходимо критичні точки цієї функції:

$$f'(x) = 0 \iff 4x^3 - 16x = 0 \iff 4x(x^2-4) = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x^2 - 4 = 0, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \pm 2, \end{array}\right.$$

з яких відрізку $[-1;3]$ належать точки $x = 0$ і $x = 2$.

Тепер знаходимо значення функції $f(x)$ в критичних точках $x = 0$, $x = 2$ та на кінцях відрізка $[-1;3]$:

$f(0) = c$,

$f(2) = 2^4 - 8 \cdot 2^2 + c = 16 - 32 + c = c - 16$,

$f(-1) = (-1)^4 - 8 \cdot (-1)^2 + c = 1 - 8 + c = c - 7$,

$f(3) = 3^4 - 8 \cdot 3^2 + c = 81 - 72 + c = c + 9$.

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Пробне тестування ЗНО, 2015 р.). При якому значенні параметра c найменше значення функції $f(x)=x^4-8x^2+c$ на відрізку $[-1;3]$ дорівнює 30.

Розв'язання. Очевидно, що функція $f(x)$ та її похідна $f'(x)=4x^3-16x$ визначені всюди на $\mathbf{R}$.

Знаходимо критичні точки цієї функції:

$$f'(x)=0 \iff 4x^3-16x=0 \iff 4x(x^2-4)=0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x^2-4=0, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=\pm 2, \end{array}\right.$$

з яких відрізку $[-1;3]$ належать точки $x=0$ і $x=2$.

Тепер знаходимо значення функції $f(x)$ в критичних точках $x=0$, $x=2$ та на кінцях відрізка $[-1;3]$:

$f(0)=c$,

$f(2)=2^4-8\cdot 2^2+c=16-32+c=c-16$,

$f(-1)=(-1)^4-8\cdot(-1)^2+c=1-8+c=c-7$,

$f(3)=3^4-8\cdot 3^2+c=81-72+c=c+9$.

Приклади із ЗНО

П р и к л а д 5 (Пробне тестування ЗНО, 2015 р.). При якому значенні параметра c найменше значення функції $f(x) = x^4 - 8x^2 + c$ на відрізку $[-1;3]$ дорівнює 30.

Р о з в' я з а н н я. Очевидно, що функція $f(x)$ та її похідна $f'(x) = 4x^3 - 16x$ визначені всюди на $\mathbf{R}$.

Знаходимо критичні точки цієї функції:

$$f'(x) = 0 \iff 4x^3 - 16x = 0 \iff 4x(x^2-4) = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x^2 - 4 = 0, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \pm 2, \end{array}\right.$$

з яких відрізку $[-1;3]$ належать точки $x = 0$ і $x = 2$.

Тепер знаходимо значення функції $f(x)$ в критичних точках $x = 0$, $x = 2$ та на кінцях відрізка $[-1;3]$:

$f(0) = c$,

$f(2) = 2^4 - 8 \cdot 2^2 + c = 16 - 32 + c = c - 16$,

$f(-1) = (-1)^4 - 8 \cdot (-1)^2 + c = 1 - 8 + c = c - 7$,

$f(3) = 3^4 - 8 \cdot 3^2 + c = 81 - 72 + c = c + 9$.

Приклади із ЗНО

Отже,

$$\min_{x\in[-1;3]} f(x) = \min\{c; c-16; c-7; c+9\} = c-16.$$

Нарешті, знаходимо значення параметра c, при якому $\min_{x\in[-1;3]} f(x) = 30 \iff c-16=30 \iff c=46$.

Відповідь: 46.

Приклад 6 (Пробне тестування ЗНО,, 2016 р.). Знайдіть найбільше та найменше значення функції $f(x)=x+\sin 2x$ на відрізку $[0;\pi/2]$.

Розв'язання. Очевидно, що функція $f(x)$ та її похідна $f'(x)=1+2\cos 2x$ визначені всюди на $\mathbf{R}$.

Знаходимо критичні точки цієї функції:

$f'(x)=0 \iff 1+2\cos 2x=0 \iff \cos 2x = -\frac{1}{2} \iff$

$\iff 2x = \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}, \iff$

Приклади із ЗНО

Отже,

$$\min_{x\in[-1;3]} f(x) = \min\{c; c-16; c-7; c+9\} = c-16\,.$$

Нарешті, знаходимо значення параметра c, при якому $\min\limits_{x\in[-1;3]} f(x) = 30 \iff c-16=30 \iff c=46\,.$

Відповідь: 46.

Приклад 6 (Пробне тестування ЗНО,, 2016 р.). Знайдіть найбільше та найменше значення функції $f(x)=x+\sin 2x$ на відрізку $[0;\pi/2]$.

Розв'язання. Очевидно, що функція $f(x)$ та її похідна $f'(x)=1+2\cos 2x$ визначені всюди на $\mathbf{R}$.
Знаходимо критичні точки цієї функції:
$f'(x)=0 \iff 1+2\cos 2x=0 \iff \cos 2x=-\frac{1}{2} \iff$
$\iff 2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z},\iff$

Приклади із ЗНО

Отже,

$$\min_{x\in[-1;3]} f(x) = \min\{c; c-16; c-7; c+9\} = c-16 .$$

Нарешті, знаходимо значення параметра c, при якому
$$\min_{x\in[-1;3]} f(x) = 30 \iff c-16 = 30 \iff c = 46 .$$

Відповідь: 46.

Приклад 6 (Пробне тестування ЗНО,, 2016 р.). Знайдіть найбільше та найменше значення функції $f(x) = x + \sin 2x$ на відрізку $[0; \pi/2]$.

Розв'язання. Очевидно, що функція $f(x)$ та її похідна $f'(x) = 1 + 2\cos 2x$ визначені всюди на $\mathbf{R}$.

Знаходимо критичні точки цієї функції:

$$f'(x) = 0 \iff 1 + 2\cos 2x = 0 \iff \cos 2x = -\frac{1}{2} \iff$$
$$\iff 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}, \iff$$

Приклади із ЗНО

Отже,

$$\min_{x\in[-1;3]} f(x) = \min\{c; c-16; c-7; c+9\} = c-16\,.$$

Нарешті, знаходимо значення параметра c, при якому

$$\min_{x\in[-1;3]} f(x) = 30 \iff c-16=30 \iff c=46\,.$$

Відповідь: 46.

Приклад 6 (Пробне тестування ЗНО,, 2016 р.). Знайдіть найбільше та найменше значення функції $f(x)=x+\sin 2x$ на відрізку $[0;\pi/2]$.

Розв'язання. Очевидно, що функція $f(x)$ та її похідна $f'(x)=1+2\cos 2x$ визначені всюди на $\mathbf{R}$.

Знаходимо критичні точки цієї функції:

$$f'(x)=0 \iff 1+2\cos 2x=0 \iff \cos 2x=-\tfrac{1}{2} \iff$$
$$\iff 2x=\pm\tfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}, \iff$$

Приклади із ЗНО

Отже,

$$\min_{x\in[-1;3]} f(x) = \min\{c; c-16; c-7; c+9\} = c-16.$$

Нарешті, знаходимо значення параметра c, при якому

$$\min_{x\in[-1;3]} f(x) = 30 \iff c-16=30 \iff c=46.$$

В і д п о в і д ь: 46.

П р и к л а д 6 (Пробне тестування ЗНО,, 2016 р.). Знайдіть найбільше та найменше значення функції $f(x)=x+\sin 2x$ на відрізку $[0;\pi/2]$.

Р о з в' я з а н н я. Очевидно, що функція $f(x)$ та її похідна $f'(x)=1+2\cos 2x$ визначені всюди на $\mathbf{R}$.

Знаходимо критичні точки цієї функції:

$$f'(x)=0 \iff 1+2\cos 2x=0 \iff \cos 2x=-\frac{1}{2} \iff$$

$$\iff 2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}, \iff$$

Приклади із ЗНО

Отже,

$$\min_{x\in[-1;3]} f(x) = \min\{c; c-16; c-7; c+9\} = c-16.$$

Нарешті, знаходимо значення параметра c, при якому $\min\limits_{x\in[-1;3]} f(x) = 30 \iff c-16=30 \iff c=46$.

Відповідь: 46.

Приклад 6 (Пробне тестування ЗНО,, 2016 р.). Знайдіть найбільше та найменше значення функції $f(x) = x+\sin 2x$ на відрізку $[0;\pi/2]$.

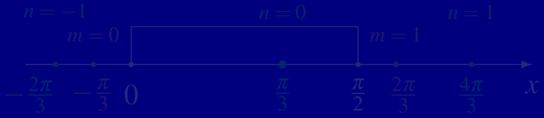
Розв'язання. Очевидно, що функція $f(x)$ та її похідна $f'(x) = 1+2\cos 2x$ визначені всюди на $\mathbf{R}$.
Знаходимо критичні точки цієї функції:

$$f'(x)=0 \iff 1+2\cos 2x = 0 \iff \cos 2x = -\tfrac{1}{2} \iff$$
$$\iff 2x = \pm\tfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}, \iff$$

Приклади із ЗНО

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, & n \in \mathbf{Z}, \\ 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, & m \in \mathbf{Z}. \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{3} + \pi n, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{3} + \pi m, & m \in \mathbf{Z}. \end{array} \right.$$

Проміжку $[0, \pi/2]$ належить єдина критична точка функції $f(x)$ – точка $x = \frac{\pi}{3}$ (при $n = 0$):



Тепер знаходимо значення функції $f(x) = x + \sin 2x$ в критичній точці $x = \frac{\pi}{3}$, що належить відрізку $[0; \pi/2]$, та на кінцях цього відрізка:

$$f(0) = 0 + \sin 0 = 0,$$

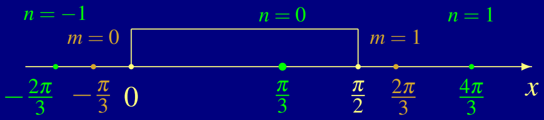
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \sin\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Приклади із ЗНО

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, & n \in \mathbf{Z}, \\ 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, & m \in \mathbf{Z}. \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{3} + \pi n, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{3} + \pi m, & m \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Проміжку $[0, \pi/2]$ належить єдина критична точка функції $f(x)$ – точка $x = \frac{\pi}{3}$ (при $n = 0$):



Тепер знаходимо значення функції $f(x) = x + \sin 2x$ в критичній точці $x = \frac{\pi}{3}$, що належить відрізку $[0; \pi/2]$, та на кінцях цього відрізка:

$$f(0) = 0 + \sin 0 = 0,$$

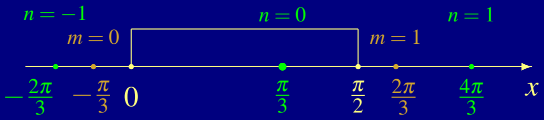
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \sin\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Приклади із ЗНО

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, & n \in \mathbf{Z}, \\ 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, & m \in \mathbf{Z}. \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{3} + \pi n, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{3} + \pi m, & m \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Проміжку $[0, \pi/2]$ належить єдина критична точка функції $f(x)$ – точка $x = \frac{\pi}{3}$ (при $n = 0$):



Тепер знаходимо значення функції $f(x) = x + \sin 2x$ в критичній точці $x = \frac{\pi}{3}$, що належить відрізку $[0; \pi/2]$, та на кінцях цього відрізка:

$$f(0) = 0 + \sin 0 = 0,$$

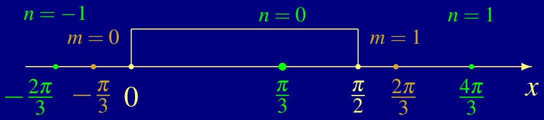
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \sin\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Приклади із ЗНО

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, & n \in \mathbf{Z}, \\ 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, & m \in \mathbf{Z}. \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{3} + \pi n, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{3} + \pi m, & m \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Проміжку $[0, \pi/2]$ належить єдина критична точка функції $f(x)$ – точка $x = \frac{\pi}{3}$ (при $n = 0$):



Тепер знаходимо значення функції $f(x) = x + \sin 2x$ в критичній точці $x = \frac{\pi}{3}$, що належить відрізку $[0; \pi/2]$, та на кінцях цього відрізка:

$$f(0) = 0 + \sin 0 = 0,$$

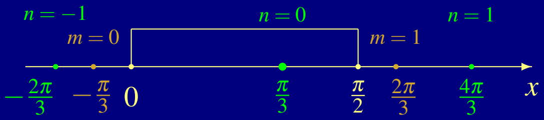
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \sin\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Приклади із ЗНО

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\,, & n \in \mathbf{Z}\,, \\ 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m\,, & m \in \mathbf{Z}\,. \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{3} + \pi n\,, & n \in \mathbf{Z}\,, \\ x = -\frac{\pi}{3} + \pi m\,, & m \in \mathbf{Z}\,. \end{array}\right.$$

Проміжку $[0,\pi/2]$ належить єдина критична точка функції $f(x)$ – точка $x = \frac{\pi}{3}$ (при $n = 0$):



Тепер знаходимо значення функції $f(x) = x + \sin 2x$ в критичній точці $x = \frac{\pi}{3}$, що належить відрізку $[0;\pi/2]$, та на кінцях цього відрізка:

$$f(0) = 0 + \sin 0 = 0\,,$$

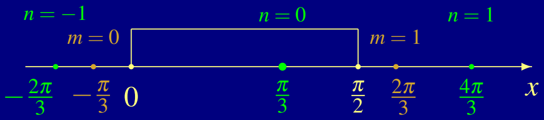
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \sin\pi = \frac{\pi}{2}\,.$$

Приклади із ЗНО

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, & n \in \mathbf{Z}, \\ 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, & m \in \mathbf{Z}. \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{3} + \pi n, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{3} + \pi m, & m \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Проміжку $[0, \pi/2]$ належить єдина критична точка функції $f(x)$ – точка $x = \frac{\pi}{3}$ (при $n = 0$):



Тепер знаходимо значення функції $f(x) = x + \sin 2x$ в критичній точці $x = \frac{\pi}{3}$, що належить відрізку $[0; \pi/2]$, та на кінцях цього відрізка:

$$f(0) = 0 + \sin 0 = 0,$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \sin\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Приклади із ЗНО

Оскільки $0 < \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$, то

$$\max_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = \max\{0;\ \tfrac{\pi}{2};\ \tfrac{\pi}{3} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\min_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = \min\{0;\ \tfrac{\pi}{2};\ \tfrac{\pi}{3} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\} = 0.$$

Відповідь: $\max\limits_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\min\limits_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = 0$.

Приклади із ЗНО

Оскільки $0 < \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$, то

$$\max_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = \max\{0;\, \tfrac{\pi}{2};\, \tfrac{\pi}{3} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\min_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = \min\{0;\, \tfrac{\pi}{2};\, \tfrac{\pi}{3} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\} = 0.$$

Відповідь: $\max\limits_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\min\limits_{x\in[0;\,\pi/2]} f(x) = 0$.