Метод інтервалів

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 3

Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Узагальнений метод інтервалів

Ідея узагальненого методу інтервалів полягає в тому, що числова пряма розбивається на частини, на яких розв'язання рівняння (чи нерівності) має свої характерні відмінності, і потім розв'язання проводиться окремо на кожній з цих частин. Нарешті, для того щоб одержати множину розв'язків, треба об'єднати всі частини цієї множини, знайдені в процесі розв'язання.

Раціональні нерівності

При розв'язанні раціональних нерівностей вигляду $f(x) > 0,\ f(x) < 0,\ f(x) \geq 0,\ f(x) \leq 0$ методом інтервалів використовується геометричний образ функції $y = f(x)$, який будемо називати кривою знаків цієї функції.

Цей геометричний образ функції $y = f(x)$ складається, перш за все, з кривої, яка розміщена вище осі Ox, якщо $f(x) > 0$, і нижче осі Ox, якщо $f(x) < 0$, а також містить наступну важливу інформацію про функцію:

- вказує проміжки, на яких $f(x) > 0$, і проміжки, на яких $f(x) < 0$;
- вказує точки, в яких $f(x) = 0$;
- вказує точки, в яких функція $f(x)$ не визначена.

Раціональні нерівності

При розв'язанні раціональних нерівностей вигляду $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$ методом інтервалів використовується геометричний образ функції $y = f(x)$, який будемо називати кривою знаків цієї функції.

Цей геометричний образ функції $y = f(x)$ складається, перш за все, з кривої, яка розміщена вище осі Ox, якщо $f(x) > 0$, і нижче осі Ox, якщо $f(x) < 0$, а також містить наступну важливу інформацію про функцію:

- вказує проміжки, на яких $f(x) > 0$, і проміжки, на яких $f(x) < 0$;
- вказує точки, в яких $f(x) = 0$;
- вказує точки, в яких функція $f(x)$ не визначена.

Раціональні нерівності

При розв'язанні раціональних нерівностей вигляду $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$ методом інтервалів використовується геометричний образ функції $y = f(x)$, який будемо називати кривою знаків цієї функції.

Цей геометричний образ функції $y = f(x)$ складається, перш за все, з кривої, яка розміщена вище осі Ox, якщо $f(x) > 0$, і нижче осі Ox, якщо $f(x) < 0$, а також містить наступну важливу інформацію про функцію:

- вказує проміжки, на яких $f(x) > 0$, і проміжки, на яких $f(x) < 0$;
- вказує точки, в яких $f(x) = 0$;
- вказує точки, в яких функція $f(x)$ не визначена.

Раціональні нерівності

При розв'язанні раціональних нерівностей вигляду $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$ методом інтервалів використовується геометричний образ функції $y = f(x)$, який будемо називати кривою знаків цієї функції.

Цей геометричний образ функції $y = f(x)$ складається, перш за все, з кривої, яка розміщена вище осі Ox, якщо $f(x) > 0$, і нижче осі Ox, якщо $f(x) < 0$, а також містить наступну важливу інформацію про функцію:

- вказує проміжки, на яких $f(x) > 0$, і проміжки, на яких $f(x) < 0$;
- вказує точки, в яких $f(x) = 0$;
- вказує точки, в яких функція $f(x)$ не визначена.

Раціональні нерівності

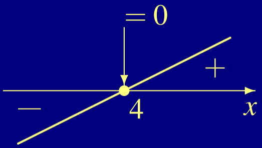
При розв'язанні раціональних нерівностей вигляду $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$ методом інтервалів використовується геометричний образ функції $y = f(x)$, який будемо називати кривою знаків цієї функції.
Цей геометричний образ функції $y = f(x)$ складається, перш за все, з кривої, яка розміщена вище осі Ox, якщо $f(x) > 0$, і нижче осі Ox, якщо $f(x) < 0$, а також містить наступну важливу інформацію про функцію:

- вказує проміжки, на яких $f(x) > 0$, і проміжки, на яких $f(x) < 0$;
- вказує точки, в яких $f(x) = 0$;
- вказує точки, в яких функція $f(x)$ не визначена.

Раціональні нерівності

Розглянемо криву знаків функції $y = x - 4$, для побудови якої достатньо скористатися тим, що $y = x - 4$ — це пряма "з нахилом вправо":

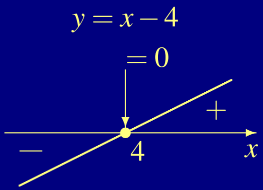
$y = x - 4$



- знак "+" показує, що при $x \in (4, \infty)$ функція $y = x - 4$ приймає додатні значення;
- знак "−" означає, що при $x \in (-\infty, 4)$ функція $y = x - 4$ приймає від'ємні значення;
- стрілка з надписом "$= 0$" над точкою $x = 4$ вказує на те, що $y(4) = 0$.

Раціональні нерівності

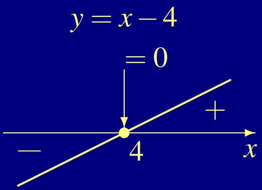
Розглянемо криву знаків функції $y = x - 4$, для побудови якої достатньо скористатися тим, що $y = x - 4$ — це пряма "з нахилом вправо":



- знак "$+$" показує, що при $x \in (4, \infty)$ функція $y = x - 4$ приймає додатні значення;
- знак "$-$" означає, що при $x \in (-\infty, 4)$ функція $y = x - 4$ приймає від'ємні значення;
- стрілка з надписом "$= 0$" над точкою $x = 4$ вказує на те, що $y(4) = 0$.

Раціональні нерівності

Розглянемо криву знаків функції $y = x - 4$, для побудови якої достатньо скористатися тим, що $y = x - 4$ — це пряма "з нахилом вправо":

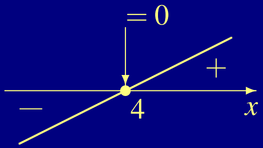


- знак "$+$" показує, що при $x \in (4, \infty)$ функція $y = x - 4$ приймає додатні значення;
- знак "$-$" означає, що при $x \in (-\infty, 4)$ функція $y = x - 4$ приймає від'ємні значення;
- стрілка з надписом "$= 0$" над точкою $x = 4$ вказує на те, що $y(4) = 0$.

Раціональні нерівності

Розглянемо криву знаків функції $y = x - 4$, для побудови якої достатньо скористатися тим, що $y = x - 4$ — це пряма "з нахилом вправо":

$y = x - 4$

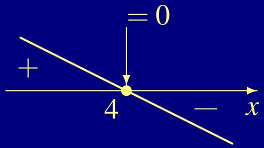


- знак "+" показує, що при $x \in (4, \infty)$ функція $y = x - 4$ приймає додатні значення;
- знак "−" означає, що при $x \in (-\infty, 4)$ функція $y = x - 4$ приймає від'ємні значення;
- стрілка з надписом "$= 0$" над точкою $x = 4$ вказує на те, що $y(4) = 0$.

Раціональні нерівності

Розглянемо криву знаків функції $y=4-x$, для побудови якої достатньо скористатися тим, що $y=4-x$ — це пряма "з нахилом вліво":

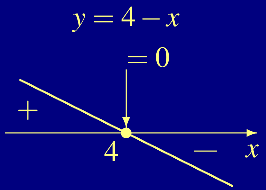
$y=4-x$



- знак "+" показує, що при $x\in(-\infty,4)$ функція $y=4-x$ приймає додатні значення;
- знак "−" означає, що при $x\in(4,\infty)$ функція $y=4-x$ приймає від'ємні значення;
- стрілка з надписом "= 0" над точкою $x=4$ вказує на те, що $y(4)=0$.

Раціональні нерівності

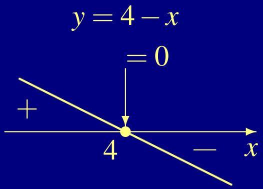
Розглянемо криву знаків функції $y = 4 - x$, для побудови якої достатньо скористатися тим, що $y = 4 - x$ — це пряма "з нахилом вліво":



- знак "+" показує, що при $x \in (-\infty, 4)$ функція $y = 4 - x$ приймає додатні значення;
- знак "−" означає, що при $x \in (4, \infty)$ функція $y = 4 - x$ приймає від'ємні значення;
- стрілка з надписом "$= 0$" над точкою $x = 4$ вказує на те, що $y(4) = 0$.

Раціональні нерівності

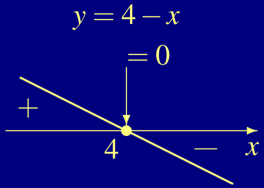
Розглянемо криву знаків функції $y=4-x$, для побудови якої достатньо скористатися тим, що $y=4-x$ — це пряма "з нахилом вліво":



- знак "+" показує, що при $x\in(-\infty,4)$ функція $y=4-x$ приймає додатні значення;
- знак "−" означає, що при $x\in(4,\infty)$ функція $y=4-x$ приймає від'ємні значення;
- стрілка з надписом "$=0$" над точкою $x=4$ вказує на те, що $y(4)=0$.

Раціональні нерівності

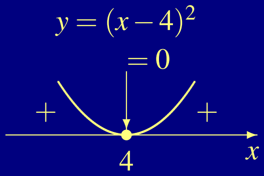
Розглянемо криву знаків функції $y = 4 - x$, для побудови якої достатньо скористатися тим, що $y = 4 - x$ — це пряма "з нахилом вліво":



- знак "$+$" показує, що при $x \in (-\infty, 4)$ функція $y = 4 - x$ приймає додатні значення;
- знак "$-$" означає, що при $x \in (4, \infty)$ функція $y = 4 - x$ приймає від'ємні значення;
- стрілка з надписом "$= 0$" над точкою $x = 4$ вказує на те, що $y(4) = 0$.

Раціональні нерівності

Для побудови кривої знаків функції $y=(x-4)^2$ достатньо скористатися тим, що $y=(x-4)^2$ — це парабола з вітками, направленими вгору, яка дотикається до осі Ox в точці $x=4$, оскільки $(x-4)^2=0 \Longleftrightarrow x=4$:

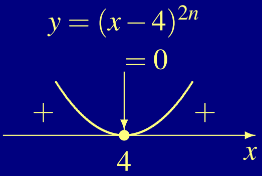


Раціональні нерівності

Схожий вигляд має крива знаків функції

$y = (x-4)^{2n}$, $n \in \mathbf{N}$

(наприклад, $y = (x-4)^4$, $y = (x-4)^6, \ldots$) :



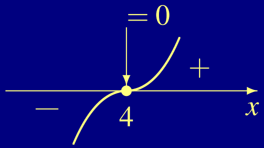
Раціональні нерівності

Крива знаків функції $y=(x-4)^{2n+1}$, $n \in \mathbf{N}$,

(наприклад, $y=(x-4)^3$, $y=(x-4)^5, \ldots$)

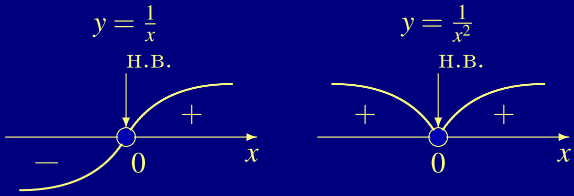
своїм виглядом нагадує кубічну параболу:

$$y=(x-4)^{2n+1}$$



Раціональні нерівності

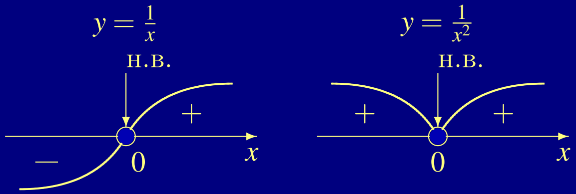
Порівняємо криві знаків функцій $y=\frac{1}{x}$ і $y=\frac{1}{x^2}$:



- стрілка з надписом "н.в." означає, що в точці $x=0$ функції $y=\frac{1}{x}$ і $y=\frac{1}{x^2}$ не визначені;
- функція $y=\frac{1}{x}$ при додатніх x приймає додатні значення, а при від'ємних x – від'ємні значення;
- функція $y=\frac{1}{x^2}$ від'ємних значень не приймає.

Раціональні нерівності

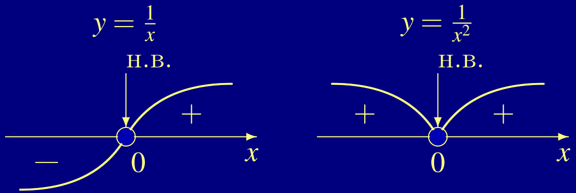
Порівняємо криві знаків функцій $y = \frac{1}{x}$ і $y = \frac{1}{x^2}$:



- стрілка з надписом "н.в." означає, що в точці $x = 0$ функції $y = \frac{1}{x}$ і $y = \frac{1}{x^2}$ не визначені;
- функція $y = \frac{1}{x}$ при додатніх x приймає додатні значення, а при від'ємних x – від'ємні значення;
- функція $y = \frac{1}{x^2}$ від'ємних значень не приймає.

Раціональні нерівності

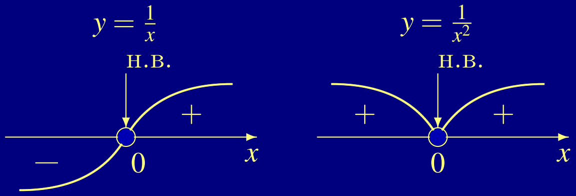
Порівняємо криві знаків функцій $y=\frac{1}{x}$ і $y=\frac{1}{x^2}$:



- стрілка з надписом "н.в." означає, що в точці $x=0$ функції $y=\frac{1}{x}$ і $y=\frac{1}{x^2}$ не визначені;
- функція $y=\frac{1}{x}$ при додатніх x приймає додатні значення, а при від'ємних x – від'ємні значення;
- функція $y=\frac{1}{x^2}$ від'ємних значень не приймає.

Раціональні нерівності

Порівняємо криві знаків функцій $y=\frac{1}{x}$ і $y=\frac{1}{x^2}$:



- стрілка з надписом "н.в." означає, що в точці $x=0$ функції $y=\frac{1}{x}$ і $y=\frac{1}{x^2}$ не визначені;
- функція $y=\frac{1}{x}$ при додатніх x приймає додатні значення, а при від'ємних x – від'ємні значення;
- функція $y=\frac{1}{x^2}$ від'ємних значень не приймає.

Раціональні нерівності

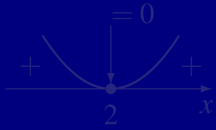
Зазначимо, що криву знаків функції $y = f(x)$, як правило, побудувати легше, ніж графік цієї функції. Цей факт використовується, зокрема, при розв'язанні раціональних нерівностей.

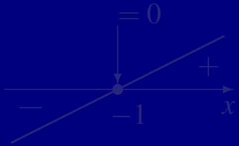
Приклад 1. Розв'язати нерівність $\dfrac{x^2-4x+4}{(x+1)(x-4)} \geq 0.$

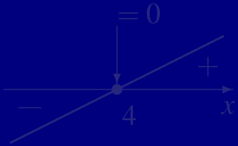
Розв'язання. $\dfrac{x^2-4x+4}{(x+1)(x-4)} \geq 0 \Longleftrightarrow \dfrac{(x-2)^2}{(x+1)(x-4)} \geq 0.$

Зобразимо допоміжні криві знаків функцій

$y_1 = (x-2)^2$ $\qquad$ $y_2 = x+1$ $\qquad$ $y_3 = x-4$







Раціональні нерівності

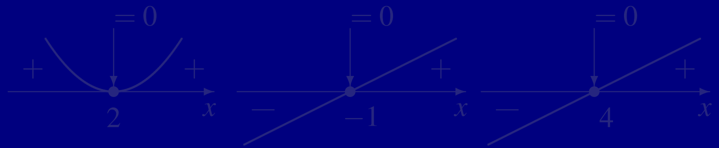
Зазначимо, що криву знаків функції $y = f(x)$, як правило, побудувати легше, ніж графік цієї функції. Цей факт використовується, зокрема, при розв'язанні раціональних нерівностей.

П р и к л а д 1. Розв'язати нерівність $\dfrac{x^2-4x+4}{(x+1)(x-4)} \geq 0$.

Р о з в' я з а н н я. $\dfrac{x^2-4x+4}{(x+1)(x-4)} \geq 0 \Longleftrightarrow \dfrac{(x-2)^2}{(x+1)(x-4)} \geq 0$.

Зобразимо допоміжні криві знаків функцій

$y_1 = (x-2)^2$ $\qquad$ $y_2 = x+1$ $\qquad$ $y_3 = x-4$



Раціональні нерівності

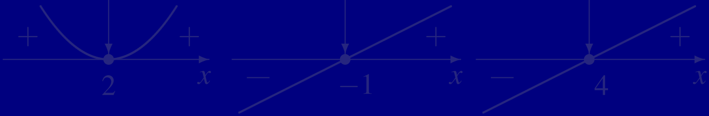
Зазначимо, що криву знаків функції $y = f(x)$, як правило, побудувати легше, ніж графік цієї функції. Цей факт використовується, зокрема, при розв'язанні раціональних нерівностей.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\dfrac{x^2-4x+4}{(x+1)(x-4)} \geq 0$.

Розв'язання. $\dfrac{x^2-4x+4}{(x+1)(x-4)} \geq 0 \Longleftrightarrow \dfrac{(x-2)^2}{(x+1)(x-4)} \geq 0$.

Зобразимо допоміжні криві знаків функцій

$y_1 = (x-2)^2 = 0$ $\quad$ $y_2 = x+1 = 0$ $\quad$ $y_3 = x-4 = 0$



Раціональні нерівності

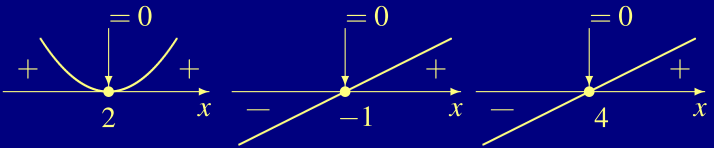
Зазначимо, що криву знаків функції $y = f(x)$, як правило, побудувати легше, ніж графік цієї функції. Цей факт використовується, зокрема, при розв'язанні раціональних нерівностей.

П р и к л а д 1. Розв'язати нерівність $\dfrac{x^2-4x+4}{(x+1)(x-4)} \geq 0$.

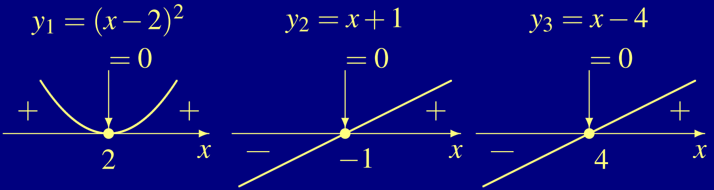
Р о з в' я з а н н я. $\dfrac{x^2-4x+4}{(x+1)(x-4)} \geq 0 \Longleftrightarrow \dfrac{(x-2)^2}{(x+1)(x-4)} \geq 0$.

Зобразимо допоміжні криві знаків функцій

$y_1 = (x-2)^2$ $\quad$ $y_2 = x+1$ $\quad$ $y_3 = x-4$



Раціональні нерівності

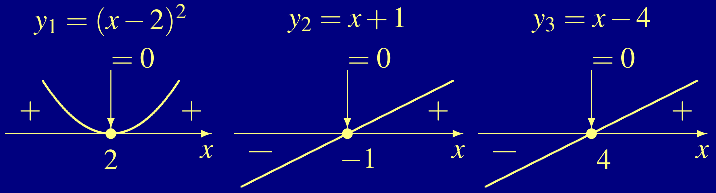


Використаємо інформацію, яку містять криві знаків цих функцій, для побудови кривої знаків функції

$$y = \frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-4)} .$$

З цією метою розділимо числову пряму точками $x=-1$, $x=2$, $x=4$ на 7 (сім!) частин: самі ці точки (над ними намалюємо стрілочки) і чотири інтервали між вказаними точками:

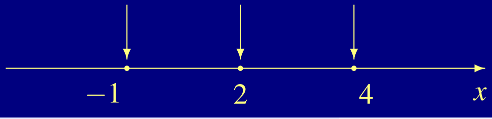
Раціональні нерівності



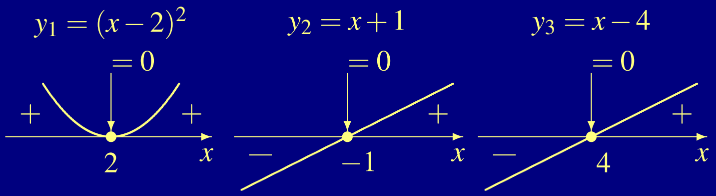
Використаємо інформацію, яку містять криві знаків цих функцій, для побудови кривої знаків функції

$$y = \frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-4)}.$$

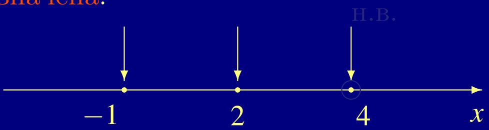
З цією метою розділимо числову пряму точками $x=-1$, $x=2$, $x=4$ на 7 (сім!) частин: самі ці точки (над ними намалюємо стрілочки) і чотири інтервали між вказаними точками:



Раціональні нерівності

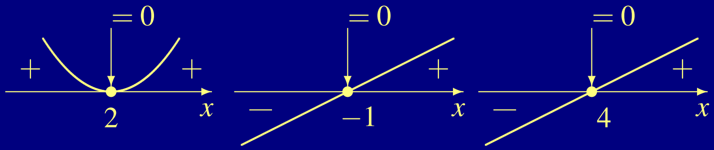


Оскільки при $x=4$ функція $y_3 = x-4$ перетворюється в нуль, то знаменник дробу $y = \dfrac{(x-2)^2}{(x+1)(x-4)}$ також перетворюється в нуль і тому функція y тут не визначена:

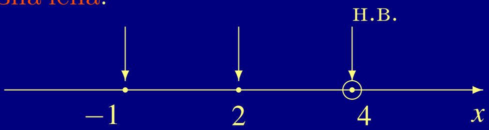


Раціональні нерівності

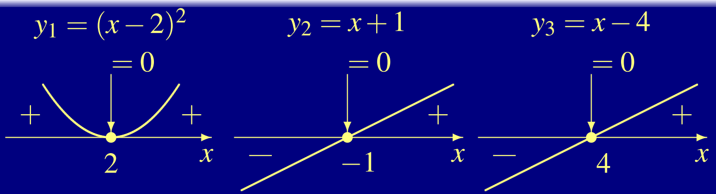
$y_1 = (x-2)^2$ $\quad$ $y_2 = x+1$ $\quad$ $y_3 = x-4$



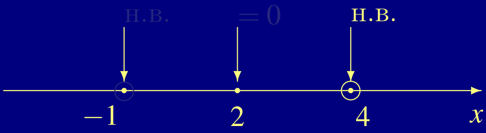
Оскільки при $x = 4$ функція $y_3 = x - 4$ перетворюється в нуль, то знаменник дробу $y = \dfrac{(x-2)^2}{(x+1)(x-4)}$ також перетворюється в нуль і тому функція y тут не визначена:



Раціональні нерівності

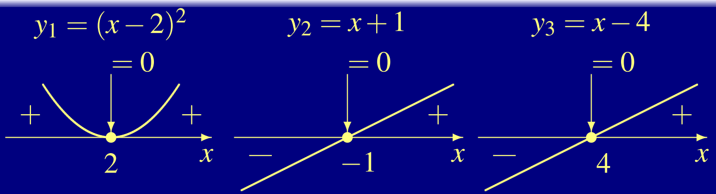


При $x = 2$ чисельник дробу $y = \dfrac{(x-2)^2}{(x+1)(x-4)}$ дорівнює нулю: $y_1(2) = 0$, а знаменник дробу не дорівнює нулю, оскільки $y_2(2) \neq 0$ і $y_3(2) \neq 0$; отже, $y(2) = 0$:

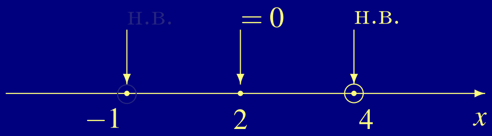


При $x = -1$ маємо $y_2(-1) = 0$, отже, знаменник дробу y перетворюється в нуль і функція y не визначена.

Раціональні нерівності



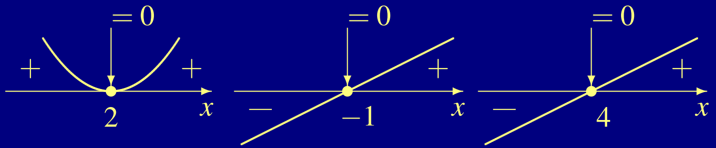
При $x = 2$ чисельник дробу $y = \dfrac{(x-2)^2}{(x+1)(x-4)}$ дорівнює нулю: $y_1(2) = 0$, а знаменник дробу не дорівнює нулю, оскільки $y_2(2) \neq 0$ і $y_3(2) \neq 0$; отже, $y(2) = 0$:



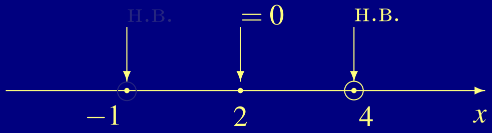
При $x = -1$ маємо $y_2(-1) = 0$, отже, знаменник дробу y перетворюється в нуль і функція y не визначена.

Раціональні нерівності

$y_1 = (x-2)^2$ $y_2 = x+1$ $y_3 = x-4$



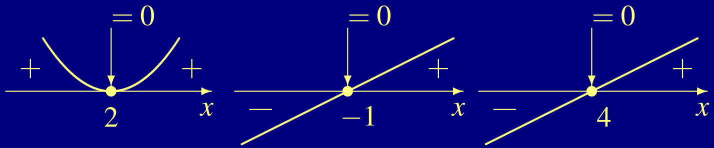
При $x = 2$ чисельник дробу $y = \dfrac{(x-2)^2}{(x+1)(x-4)}$ дорівнює нулю: $y_1(2) = 0$, а знаменник дробу не дорівнює нулю, оскільки $y_2(2) \neq 0$ і $y_3(2) \neq 0$; отже, $y(2) = 0$:



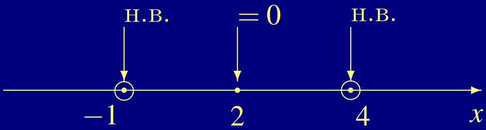
При $x = -1$ маємо $y_2(-1) = 0$, отже, знаменник дробу y перетворюється в нуль і функція y не визначена.

Раціональні нерівності

$y_1 = (x-2)^2$ $\qquad$ $y_2 = x+1$ $\qquad$ $y_3 = x-4$



При $x = 2$ чисельник дробу $y = \dfrac{(x-2)^2}{(x+1)(x-4)}$ дорівнює нулю: $y_1(2) = 0$, а знаменник дробу не дорівнює нулю, оскільки $y_2(2) \neq 0$ і $y_3(2) \neq 0$; отже, $y(2) = 0$:



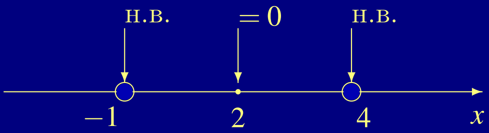
При $x = -1$ маємо $y_2(-1) = 0$, отже, знаменник дробу y перетворюється в нуль і функція y не визначена.

Раціональні нерівності

Для побудови кривої знаків функції $y = \dfrac{(x-2)^2}{(x+1)(x-4)}$ відобразимо знаки функцій

$y_1 = (x-2)^2$, $y_2 = x+1$, $y_3 = x-4$

на чотирьох інтервалах в наступній табличці:

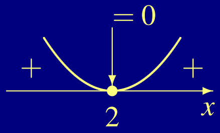


$(x-2)^2$				
$x+1$				
$x-4$				

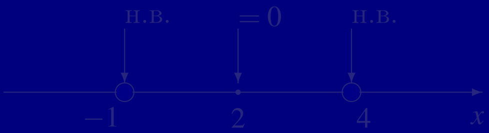
Раціональні нерівності

Функція $y_1 = (x-2)^2$ приймає додатні значення на проміжках $(-\infty, 2)$ і $(2, \infty)$:

$$y_1 = (x-2)^2$$



отже, і на кожному з інтервалів $(-\infty, -1)$, $(-1;2)$, $(2;4)$, $(4, \infty)$:

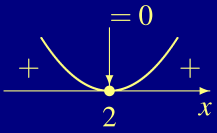


$(x-2)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$				
$x-4$				

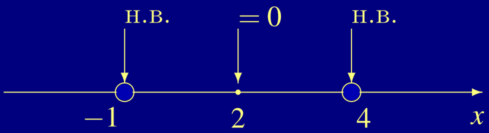
Раціональні нерівності

Функція $y_1 = (x-2)^2$ приймає додатні значення на проміжках $(-\infty, 2)$ і $(2, \infty)$:

$$y_1 = (x-2)^2$$



отже, і на кожному з інтервалів $(-\infty, -1)$, $(-1;2)$, $(2;4)$, $(4, \infty)$:

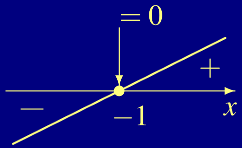


$(x-2)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$				
$x-4$				

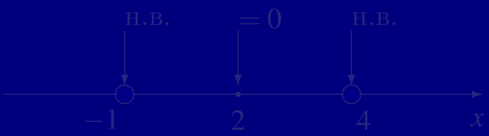
Раціональні нерівності

Функція $y_2 = x+1$ приймає від'ємні значення на $(-\infty, -1)$ і додатні значення на $(-1, \infty)$:

$$y_2 = x+1$$



тобто на кожному з інтервалів $(-1;2)$, $(2;4)$, $(4, \infty)$:

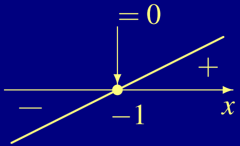


$(x-2)^2$	+	+	+	+
$x+1$	−	+	+	+
$x-4$				

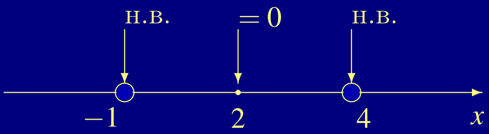
Раціональні нерівності

Функція $y_2 = x+1$ приймає від'ємні значення на $(-\infty, -1)$ і додатні значення на $(-1, \infty)$:

$$y_2 = x+1$$



тобто на кожному з інтервалів $(-1;2)$, $(2;4)$, $(4,\infty)$:

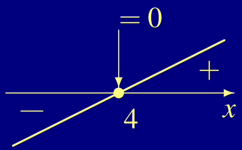


$(x-2)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-4$				

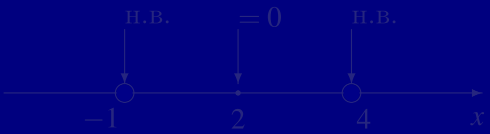
Раціональні нерівності

Функція $y_3 = x - 4$ приймає від'ємні значення на $(-\infty, 4)$ і додатні значення на $(4, \infty)$:

$$y_3 = x - 4$$



Отже, її значення від'ємні на кожному з інтервалів $(-\infty, -1)$, $(-1;2)$, $(2;4)$:

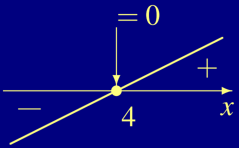


$(x-2)^2$	+	+	+	+
$x+1$	−	+	+	+
$x-4$	−	−	−	+

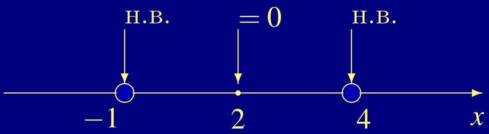
Раціональні нерівності

Функція $y_3 = x - 4$ приймає від'ємні значення на $(-\infty, 4)$ і додатні значення на $(4, \infty)$:

$y_3 = x - 4$



Отже, її значення від'ємні на кожному з інтервалів $(-\infty, -1)$, $(-1; 2)$, $(2; 4)$:



$(x-2)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$+$

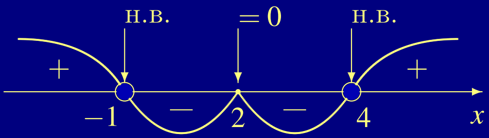
Раціональні нерівності

На проміжку $(4,\infty)$ значення функцій $y_1=(x-2)^2$, $y_2=x+1$, $y_3=x-4$ додатні, отже, функція $y=\frac{y_1}{y_2y_3}$ приймає додатні значення.

На інтервалах $(2;4)$ і $(-1;2)$ маємо $y_1>0$, $y_2>0$, а $y_3<0$, і в умовному записі одержуємо $y=\frac{y_1}{y_2y_3}=\frac{+}{+-}=-$.

На проміжку $(-\infty,-1)$ виконуються нерівності $y_1>0$, $y_2<0$, $y_3<0$, тому $y=\frac{y_1}{y_2y_3}=\frac{+}{--}=+$:

$$y=\frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-4)}$$

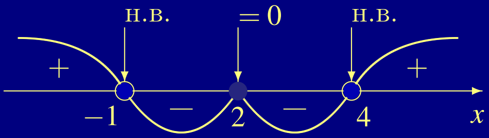


$(x-2)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$+$

Раціональні нерівності

Побудову кривої знаків функції y завершено:

$$y=\frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-4)}$$



$(x-2)^2$	+	+	+	+
$x+1$	−	+	+	+
$x-4$	−	−	−	+

Тепер знаходимо множину розв'язків нерівності:

$$\frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-4)}\geq 0 \Longleftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup\{2\}\cup(4,\infty),$$

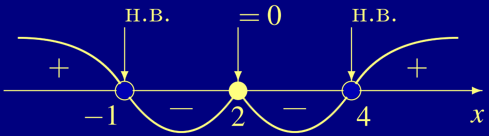
яка складається з двох інтервалів, де функція приймає додатні значення, і точки $x=2$ (!), в якій функція перетворюється в нуль.

Відповідь: $x\in(-\infty,-1)\cup\{2\}\cup(4,\infty)$.

Раціональні нерівності

Побудову кривої знаків функції y завершено:

$$y = \frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-4)}$$



$(x-2)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$+$

Тепер знаходимо множину розв'язків нерівності:

$$\frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-4)} \geq 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup \{2\} \cup (4, \infty),$$

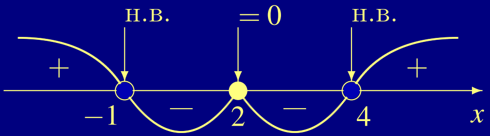
яка складається з двох інтервалів, де функція приймає додатні значення, і точки $x = 2$ (!), в якій функція перетворюється в нуль.

Відповідь: $x \in (-\infty, -1) \cup \{2\} \cup (4, \infty)$.

Раціональні нерівності

Побудову кривої знаків функції y завершено:

$$y = \frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-4)}$$



$(x-2)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$+$

Тепер знаходимо множину розв'язків нерівності:

$$\frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-4)} \geq 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty,-1) \cup \{2\} \cup (4,\infty),$$

яка складається з двох інтервалів, де функція приймає додатні значення, і точки $x=2$ (!), в якій функція перетворюється в нуль.

Відповідь: $x \in (-\infty,-1) \cup \{2\} \cup (4,\infty)$.

Раціональні нерівності

Дробово-раціональні нерівності після перетворення відповідного виразу в один дріб розв'язуються методом інтервалів.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\dfrac{9}{x+1}-\dfrac{4}{x-4}-5\le 0$.

Розв'язання. Зводячи дроби в лівій частині нерівності до спільного знаменника, одержуємо

$$\frac{9(x-4)-4(x+1)-5(x-4)(x+1)}{(x+1)(x-4)}\le 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{9x-36-4x-4-5(x^2+x-4x-4)}{(x+1)(x-4)}\le 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{5x-40-5(x^2-3x-4)}{(x+1)(x-4)}\le 0 \Longleftrightarrow \frac{5x-40-5x^2+15x+20}{(x+1)(x-4)}\le 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{-5x^2+20x-20}{(x+1)(x-4)}\le 0 \Longleftrightarrow \frac{-5(x^2-4x+4)}{(x+1)(x-4)}\le 0.$$

Раціональні нерівності

Дробово-раціональні нерівності після перетворення відповідного виразу в один дріб розв'язуються методом інтервалів.

П р и к л а д 2. Розв'язати нерівність $\dfrac{9}{x+1}-\dfrac{4}{x-4}-5\le 0$.

Р о з в' я з а н н я. Зводячи дроби в лівій частині нерівності до спільного знаменника, одержуємо

$$\frac{9(x-4)-4(x+1)-5(x-4)(x+1)}{(x+1)(x-4)}\le 0\iff$$

$$\iff\frac{9x-36-4x-4-5(x^2+x-4x-4)}{(x+1)(x-4)}\le 0\iff$$

$$\iff\frac{5x-40-5(x^2-3x-4)}{(x+1)(x-4)}\le 0\iff\frac{5x-40-5x^2+15x+20}{(x+1)(x-4)}\le 0\iff$$

$$\iff\frac{-5x^2+20x-20}{(x+1)(x-4)}\le 0\iff\frac{-5(x^2-4x+4)}{(x+1)(x-4)}\le 0.$$

Раціональні нерівності

Дробово-раціональні нерівності після перетворення відповідного виразу в один дріб розв'язуються методом інтервалів.

П р и к л а д 2. Розв'язати нерівність $\dfrac{9}{x+1}-\dfrac{4}{x-4}-5\le 0$.

Р о з в' я з а н н я. Зводячи дроби в лівій частині нерівності до спільного знаменника, одержуємо

$$\frac{9(x-4)-4(x+1)-5(x-4)(x+1)}{(x+1)(x-4)}\le 0 \iff$$

$$\iff \frac{9x-36-4x-4-5(x^2+x-4x-4)}{(x+1)(x-4)}\le 0 \iff$$

$$\iff \frac{5x-40-5(x^2-3x-4)}{(x+1)(x-4)}\le 0 \iff \frac{5x-40-5x^2+15x+20}{(x+1)(x-4)}\le 0 \iff$$

$$\iff \frac{-5x^2+20x-20}{(x+1)(x-4)}\le 0 \iff \frac{-5(x^2-4x+4)}{(x+1)(x-4)}\le 0\,.$$

Раціональні нерівності

Дробово-раціональні нерівності після перетворення відповідного виразу в один дріб розв'язуються методом інтервалів.

П р и к л а д 2. Розв'язати нерівність $\dfrac{9}{x+1}-\dfrac{4}{x-4}-5\le 0$.

Р о з в' я з а н н я. Зводячи дроби в лівій частині нерівності до спільного знаменника, одержуємо

$$\frac{9(x-4)-4(x+1)-5(x-4)(x+1)}{(x+1)(x-4)}\le 0 \iff$$

$$\iff \frac{9x-36-4x-4-5(x^2+x-4x-4)}{(x+1)(x-4)}\le 0 \iff$$

$$\iff \frac{5x-40-5(x^2-3x-4)}{(x+1)(x-4)}\le 0 \iff \frac{5x-40-5x^2+15x+20}{(x+1)(x-4)}\le 0 \iff$$

$$\iff \frac{-5x^2+20x-20}{(x+1)(x-4)}\le 0 \iff \frac{-5(x^2-4x+4)}{(x+1)(x-4)}\le 0.$$

Раціональні нерівності

Дробово-раціональні нерівності після перетворення відповідного виразу в один дріб розв'язуються методом інтервалів.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\frac{9}{x+1}-\frac{4}{x-4}-5\leq 0$.

Розв'язання. Зводячи дроби в лівій частині нерівності до спільного знаменника, одержуємо

$$\frac{9(x-4)-4(x+1)-5(x-4)(x+1)}{(x+1)(x-4)}\leq 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{9x-36-4x-4-5(x^2+x-4x-4)}{(x+1)(x-4)}\leq 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{5x-40-5(x^2-3x-4)}{(x+1)(x-4)}\leq 0 \Longleftrightarrow \frac{5x-40-5x^2+15x+20}{(x+1)(x-4)}\leq 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{-5x^2+20x-20}{(x+1)(x-4)}\leq 0 \Longleftrightarrow \frac{-5(x^2-4x+4)}{(x+1)(x-4)}\leq 0.$$

Раціональні нерівності

Нарешті, після ділення обох частин нерівності на -5, одержуємо

$$\frac{-5(x^2-4x+4)}{(x+1)(x-4)} \le 0 \Longleftrightarrow \frac{x^2-4x+4}{(x+1)(x-4)} \ge 0.$$

Одержану нерівність розглянуто в прикладі 1.

Відповідь: $x \in (-\infty,-1) \cup \{2\} \cup (4,\infty)$.

Раціональні нерівності

Нарешті, після ділення обох частин нерівності на -5, одержуємо

$$\frac{-5(x^2-4x+4)}{(x+1)(x-4)} \le 0 \iff \frac{x^2-4x+4}{(x+1)(x-4)} \ge 0.$$

Одержану нерівність розглянуто в прикладі 1.

Відповідь: $x \in (-\infty,-1) \cup \{2\} \cup (4,\infty)$.

Приклад із ЗНО

Приклад 3 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.).
Розв'яжіть нерівність $\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x}\geq 1$.
У відповідь запишіть суму всіх цілих її розв'язків.

Розв'язання. Перенесемо 1 в ліву частину нерівності і зведемо дроби до спільного знаменника:

$$\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x}-1\geq 0 \iff \frac{3x+4(x-2)-x(x-2)}{x(x-2)}\geq 0 \iff$$

$$\iff \frac{3x+4x-8-x^2+2x}{x(x-2)}\geq 0 \iff \frac{-x^2+9x-8}{x(x-2)}\geq 0 \iff$$

$$\iff \frac{x^2-9x+8}{x(x-2)}\leq 0.$$

Приклад із ЗНО

Приклад 3 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.).
Розв'яжіть нерівність $\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{4}{x}\geq 1$.
У відповідь запишіть суму всіх цілих її розв'язків.

Розв'язання. Перенесемо 1 в ліву частину нерівності і зведемо дроби до спільного знаменника:

$$\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x}-1\geq 0 \Longleftrightarrow \frac{3x+4(x-2)-x(x-2)}{x(x-2)}\geq 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{3x+4x-8-x^2+2x}{x(x-2)}\geq 0 \Longleftrightarrow \frac{-x^2+9x-8}{x(x-2)}\geq 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x^2-9x+8}{x(x-2)}\leq 0.$$

Приклад із ЗНО

П р и к л а д 3 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.).
Розв'яжіть нерівність $\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x} \geq 1$.
У відповідь запишіть суму всіх цілих її розв'язків.

Р о з в' я з а н н я. Перенесемо 1 в ліву частину нерівності і зведемо дроби до спільного знаменника:

$$\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x}-1 \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{3x+4(x-2)-x(x-2)}{x(x-2)} \geq 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{3x+4x-8-x^2+2x}{x(x-2)} \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{-x^2+9x-8}{x(x-2)} \geq 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x^2-9x+8}{x(x-2)} \leq 0.$$

Приклад із ЗНО

Приклад 3 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.).
Розв'яжіть нерівність $\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{4}{x}\geq 1$.
У відповідь запишіть суму всіх цілих її розв'язків.

Розв'язання. Перенесемо 1 в ліву частину нерівності і зведемо дроби до спільного знаменника:

$$\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x}-1\geq 0 \Longleftrightarrow \frac{3x+4(x-2)-x(x-2)}{x(x-2)}\geq 0 \Longleftrightarrow$$

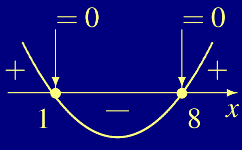
$$\Longleftrightarrow \frac{3x+4x-8-x^2+2x}{x(x-2)}\geq 0 \Longleftrightarrow \frac{-x^2+9x-8}{x(x-2)}\geq 0 \Longleftrightarrow$$

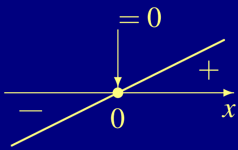
$$\Longleftrightarrow \frac{x^2-9x+8}{x(x-2)}\leq 0 .$$

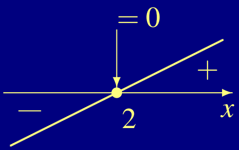
Приклад із ЗНО

Зобразимо допоміжні криві знаків функцій

$y = x^2 - 9x + 8$ $\qquad$ $y = x$ $\qquad$ $y = x - 2,$

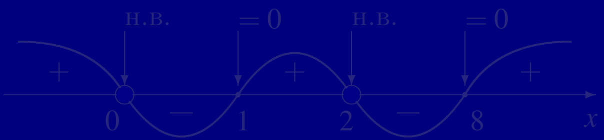






використовуючи які, побудуємо криву знаків функції

$$y = \frac{x^2 - 9x + 8}{x(x-2)}$$

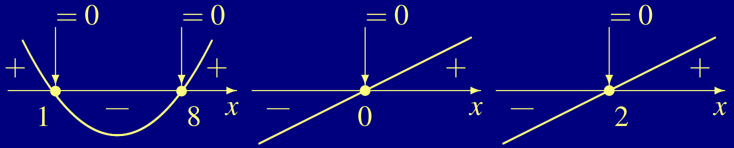


$x^2 - 9x + 8$	+	+	−	−	+
x	−	+	+	+	+
$x - 2$	−	−	−	+	+

Приклад із ЗНО

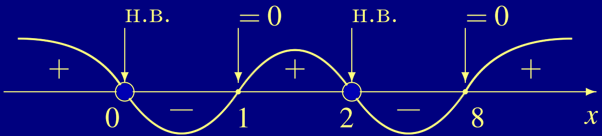
Зобразимо допоміжні криві знаків функцій

$y = x^2 - 9x + 8$ $\quad y = x$ $\quad y = x - 2,$



використовуючи які, побудуємо криву знаків функції

$y = \frac{x^2-9x+8}{x(x-2)}$

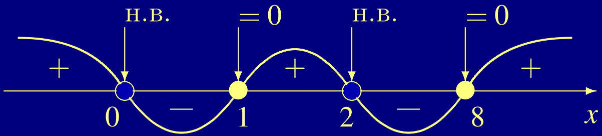


$x^2 - 9x + 8$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
x	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$

Приклад із ЗНО

Знаходимо множину розв'язків нерівності:

$y = \frac{x^2-9x+8}{x(x-2)}$



x^2-9x+8	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
x	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$

$$\frac{x^2-9x+8}{x(x-2)} \le 0 \iff x \in (0;1] \cup (2;8].$$

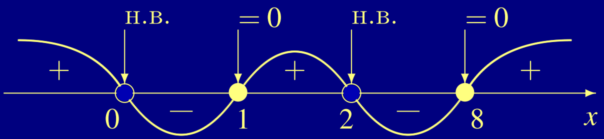
Отже, нерівність має 7 цілих розв'язків: $1;3;4;5;6;7;8$,
а їх сума $1+3+4+5+6+7+8=34$.

Відповідь: 34.

Приклад із ЗНО

Знаходимо множину розв'язків нерівності:

$$y = \frac{x^2-9x+8}{x(x-2)}$$



x^2-9x+8	+	+	−	−	+
x	−	+	+	+	+
$x-2$	−	−	−	+	+

$$\frac{x^2-9x+8}{x(x-2)} \leq 0 \Longleftrightarrow x \in (0;1] \cup (2;8].$$

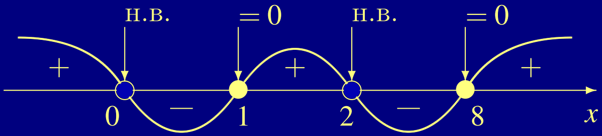
Отже, нерівність має 7 цілих розв'язків: $1;3;4;5;6;7;8$, а їх сума $1+3+4+5+6+7+8=34$.

Відповідь: 34.

Приклад із ЗНО

Знаходимо множину розв'язків нерівності:

$$y = \frac{x^2-9x+8}{x(x-2)}$$



x^2-9x+8	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
x	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$

$$\frac{x^2-9x+8}{x(x-2)} \le 0 \Longleftrightarrow x \in (0;1] \cup (2;8]\,.$$

Отже, нерівність має 7 цілих розв'язків: $1;3;4;5;6;7;8$, а їх сума $1+3+4+5+6+7+8=34$.

Відповідь: 34.