Стереометрія-3: Знаходження кутів піраміди. Вписана в піраміду куля

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 25

Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Основні методи розв'язання геометричних задач

Продовжимо вивчення задач про знаходження основних параметрів правильної трикутної піраміди.
Нагадаємо, що в правильній піраміді, як правило, за заданими двома основними параметрами, один з яких не є кутом, можна знайти будь-який інший з основних параметрів. При цьому використовуються два основних методи розв'язання геометричних задач:

- метод послідовного розв'язання кількох стандартних планіметричних задач (див. Урок 7);
- метод введення допоміжної невідомої (див. Урок 19).

Крім того, за заданим одним з основних кутів правильної піраміди можна знайти будь-який інший з цих кутів.
Нагадаємо основні кути правильної піраміди:

Основні методи розв'язання геометричних задач

Продовжимо вивчення задач про знаходження основних параметрів правильної трикутної піраміди.

Нагадаємо, що в правильній піраміді, як правило, за заданими двома основними параметрами, один з яких не є кутом, можна знайти будь-який інший з основних параметрів. При цьому використовуються два основних методи розв'язання геометричних задач:

- метод послідовного розв'язання кількох стандартних планіметричних задач (див. Урок 7);
- метод введення допоміжної невідомої (див. Урок 19).

Крім того, за заданим одним з основних кутів правильної піраміди можна знайти будь-який інший з цих кутів.

Нагадаємо основні кути правильної піраміди:

Основні методи розв'язання геометричних задач

Продовжимо вивчення задач про знаходження основних параметрів правильної трикутної піраміди.
Нагадаємо, що в правильній піраміді, як правило, за заданими двома основними параметрами, один з яких не є кутом, можна знайти будь-який інший з основних параметрів. При цьому використовуються два основних методи розв'язання геометричних задач:

- метод послідовного розв'язання кількох стандартних планіметричних задач (див. Урок 7);
- метод введення допоміжної невідомої (див. Урок 19).

Крім того, за заданим одним з основних кутів правильної піраміди можна знайти будь-який інший з цих кутів.
Нагадаємо основні кути правильної піраміди:

Основні методи розв'язання геометричних задач

Продовжимо вивчення задач про знаходження основних параметрів правильної трикутної піраміди.
Нагадаємо, що в правильній піраміді, як правило, за заданими двома основними параметрами, один з яких не є кутом, можна знайти будь-який інший з основних параметрів. При цьому використовуються два основних методи розв'язання геометричних задач:

- метод послідовного розв'язання кількох стандартних планіметричних задач (див. Урок 7);
- метод введення допоміжної невідомої (див. Урок 19).

Крім того, за заданим одним з основних кутів правильної піраміди можна знайти будь-який інший з цих кутів.

Нагадаємо основні кути правильної піраміди:

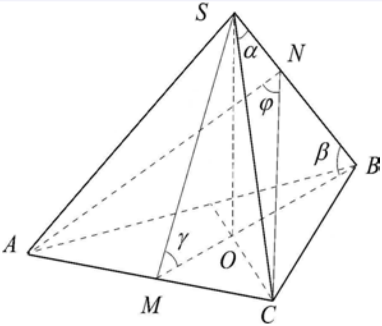
Основні методи розв'язання геометричних задач

Продовжимо вивчення задач про знаходження основних параметрів правильної трикутної піраміди.
Нагадаємо, що в правильній піраміді, як правило, за заданими двома основними параметрами, один з яких не є кутом, можна знайти будь-який інший з основних параметрів. При цьому використовуються два основних методи розв'язання геометричних задач:

- метод послідовного розв'язання кількох стандартних планіметричних задач (див. Урок 7);
- метод введення допоміжної невідомої (див. Урок 19).

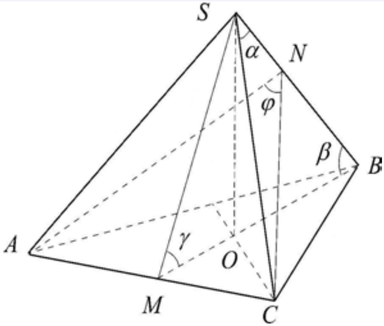
Крім того, за заданим одним з основних кутів правильної піраміди можна знайти будь-який інший з цих кутів.
Нагадаємо основні кути правильної піраміди:

Кути правильної трикутної піраміди



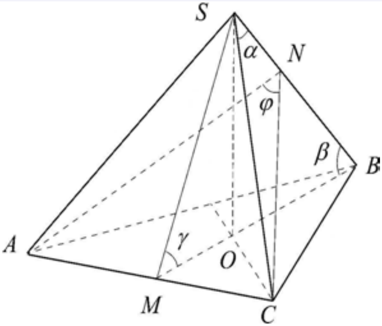
- α — плоский кут при вершині ($\alpha = \angle CSB = \angle ASB = \angle ASC$),
- β — кут нахилу бічного ребра до площини основи ($\beta = \angle SBO = \angle SCO = \angle SAO$, де O – центр основи),
- γ — двогранний кут при ребрі основи (лінійний кут одного з цих двогранних кутів $\angle SMO = \gamma$, де M – середина AC),
- φ — двогранний кут при бічному ребрі (лінійний кут одного з цих двогранних кутів утворюється перпендикулярами AN і CN, проведеними на бічне ребро SB, які у правильної піраміди мають спільну точку N)

Кути правильної трикутної піраміди



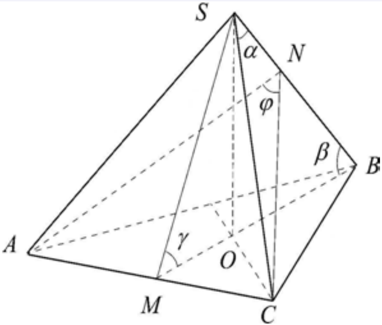
- α — плоский кут при вершині ($\alpha = \angle CSB = \angle ASB = \angle ASC$),
- β — кут нахилу бічного ребра до площини основи ($\beta = \angle SBO = \angle SCO = \angle SAO$, де O – центр основи),
- γ — двогранний кут при ребрі основи (лінійний кут одного з цих двогранних кутів $\angle SMO = \gamma$, де M – середина AC),
- φ — двогранний кут при бічному ребрі (лінійний кут одного з цих двогранних кутів утворюється перпендикулярами AN і CN, проведеними на бічне ребро SB, які у правильної піраміди мають спільну точку N)

Кути правильної трикутної піраміди



- α — плоский кут при вершині ($\alpha = \angle CSB = \angle ASB = \angle ASC$),
- β — кут нахилу бічного ребра до площини основи ($\beta = \angle SBO = \angle SCO = \angle SAO$, де O – центр основи),
- γ — двогранний кут при ребрі основи (лінійний кут одного з цих двогранних кутів $\angle SMO = \gamma$, де M – середина AC),
- φ — двогранний кут при бічному ребрі (лінійний кут одного з цих двогранних кутів утворюється перпендикулярами AN і CN, проведеними на бічне ребро SB, які у правильної піраміди мають спільну точку N)

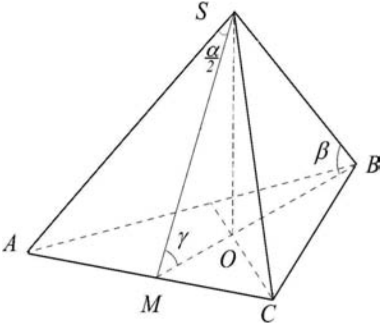
Кути правильної трикутної піраміди



- α — плоский кут при вершині ($\alpha = \angle CSB = = \angle ASB = \angle ASC$),
- β — кут нахилу бічного ребра до площини основи ($\beta = \angle SBO = \angle SCO = = \angle SAO$, де O – центр основи),
- γ — двогранний кут при ребрі основи (лінійний кут одного з цих двогранних кутів $\angle SMO = \gamma$, де M – середина AC),
- φ — двогранний кут при бічному ребрі (лінійний кут одного з цих двогранних кутів утворюється перпендикулярами AN і CN, проведеними на бічне ребро SB, які у правильної піраміди мають спільну точку N)

Кути правильної трикутної піраміди

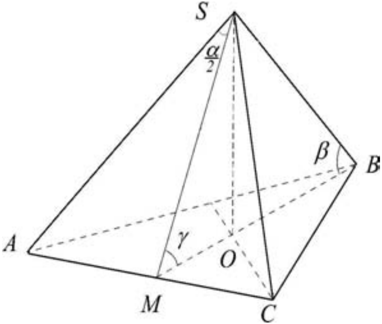
Відмітимо також деякі кути піраміди, зв'язані очевидними співвідношеннями з вказаними основними кутами.



- плоский кут бокової грані при вершині основи піраміди: $\angle SAC = \angle SCA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$,
- кут між боковим ребром і висотою піраміди: $\angle BSO = 90^\circ - \beta$,
- кут між апофемою і висотою піраміди: $\angle MSO = 90^\circ - \gamma$.

Кути правильної трикутної піраміди

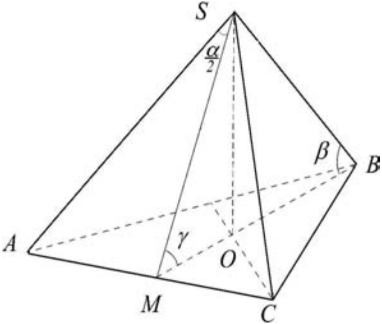
Відмітимо також деякі кути піраміди, зв'язані очевидними співвідношеннями з вказаними основними кутами.



- плоский кут бокової грані при вершині основи піраміди: $\angle SAC = \angle SCA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$,
- кут між боковим ребром і висотою піраміди: $\angle BSO = 90^\circ - \beta$,
- кут між апофемою і висотою піраміди: $\angle MSO = 90^\circ - \gamma$.

Кути правильної трикутної піраміди

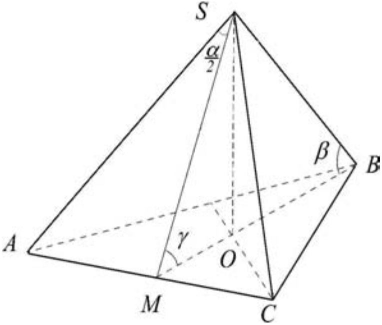
Відмітимо також деякі кути піраміди, зв'язані очевидними співвідношеннями з вказаними основними кутами.



- плоский кут бокової грані при вершині основи піраміди: $\angle SAC = \angle SCA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$,
- кут між боковим ребром і висотою піраміди: $\angle BSO = 90^\circ - \beta$,
- кут між апофемою і висотою піраміди: $\angle MSO = 90^\circ - \gamma$.

Кути правильної трикутної піраміди

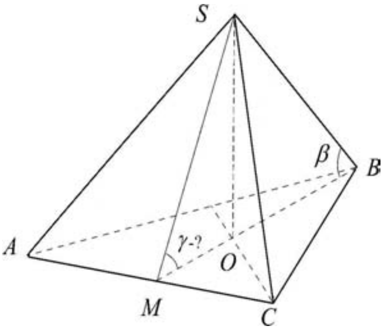
Відмітимо також деякі кути піраміди, зв'язані очевидними співвідношеннями з вказаними основними кутами.



- плоский кут бокової грані при вершині основи піраміди: $\angle SAC = \angle SCA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$,
- кут між боковим ребром і висотою піраміди: $\angle BSO = 90^\circ - \beta$,
- кут між апофемою і висотою піраміди: $\angle MSO = 90^\circ - \gamma$.

Знаходження кутів піраміди за заданим кутом

Розглянемо задачу про знаходження кутів правильної піраміди за заданим кутом.

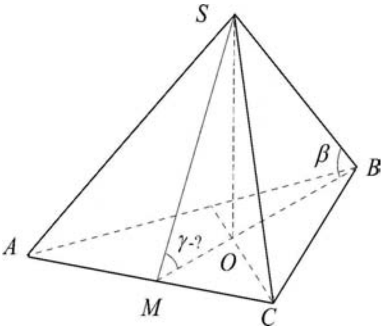


П р и к л а д 1. В правильній трикутній піраміді β – кут нахилу бічного ребра до площини основи. Знайти двогранний кут при ребрі основи піраміди.

Р о з в’я з а н н я. Зазначимо, що в задачі не можна виділити жодного повністю визначеного трикутника. Отже, задача розв’язується методом введення допоміжної невідомої.

Знаходження кутів піраміди за заданим кутом

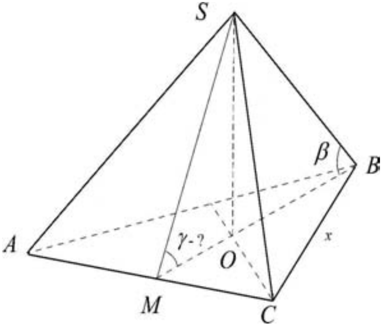
Розглянемо задачу про знаходження кутів правильної піраміди за заданим кутом.



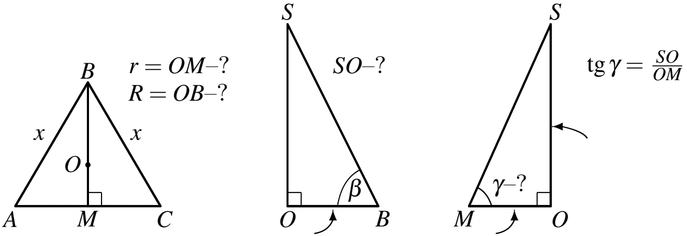
П р и к л а д 1. В правильній трикутній піраміді β – кут нахилу бічного ребра до площини основи. Знайти двогранний кут при ребрі основи піраміди.

Р о з в' я з а н н я. Зазначимо, що в задачі не можна виділити жодного повністю визначеного трикутника. Отже, задача розв'язується методом введення допоміжної невідомої.

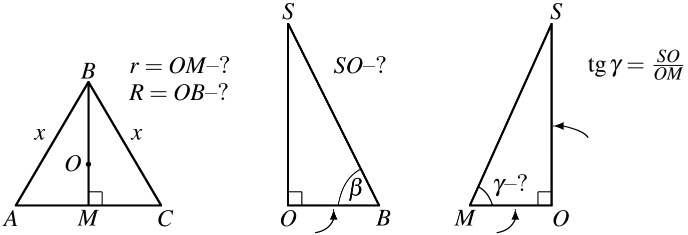
Знаходження кутів піраміди за заданим кутом



Нехай сторона основи піраміди $BC = x$. Лінійний кут $\gamma = \angle SMO$ знайдемо в прямокутному $\triangle SOM$, в якому $\angle SOM = 90°$. З цією метою виразимо через x катети цього трикутника OM і SO, для чого також потрібно спочатку виразити OB в $\triangle ABC$.



Знаходження кутів піраміди за заданим кутом



Отже:

1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ виражаємо r і R:

$OM = r = \frac{\sqrt{3}}{6}x,\qquad OB = R = \frac{\sqrt{3}}{3}x;$

2) в прямокутному $\triangle SOB$ виражаємо катет SO:

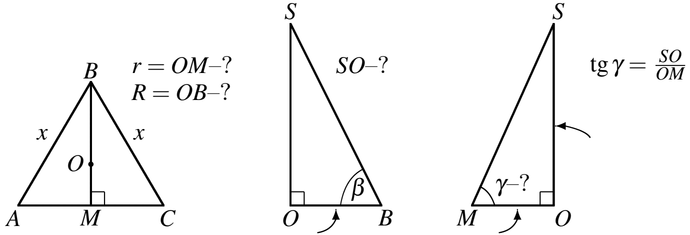
$\operatorname{tg}\beta = \frac{SO}{OB}$, звідки $SO = OB \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}x\operatorname{tg}\beta$;

3) нарешті, при знаходженні кута γ допоміжна невідома x скорочується:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{SO}{MO} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}x\operatorname{tg}\beta}{\frac{\sqrt{3}}{6}x} = 2\operatorname{tg}\beta\text{, отже, }\ \gamma = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\beta).$$

Відповідь: $\gamma = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\beta)$.

Знаходження кутів піраміди за заданим кутом



Отже:

1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ виражаємо r і R:

$OM = r = \frac{\sqrt{3}}{6}x$, $\quad OB = R = \frac{\sqrt{3}}{3}x$;

2) в прямокутному $\triangle SOB$ виражаємо катет SO:

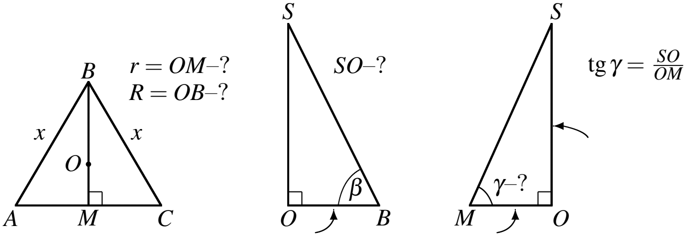
$\operatorname{tg}\beta = \frac{SO}{OB}$, звідки $SO = OB \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}x \operatorname{tg}\beta$;

3) нарешті, при знаходженні кута γ допоміжна невідома x скорочується:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{SO}{MO} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}x \operatorname{tg}\beta}{\frac{\sqrt{3}}{6}x} = 2\operatorname{tg}\beta \text{, отже, } \gamma = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\beta).$$

Відповідь: $\gamma = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\beta)$.

Знаходження кутів піраміди за заданим кутом



Отже:

1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ виражаємо r і R:

$OM = r = \frac{\sqrt{3}}{6}x$, $\qquad OB = R = \frac{\sqrt{3}}{3}x$;

2) в прямокутному $\triangle SOB$ виражаємо катет SO:

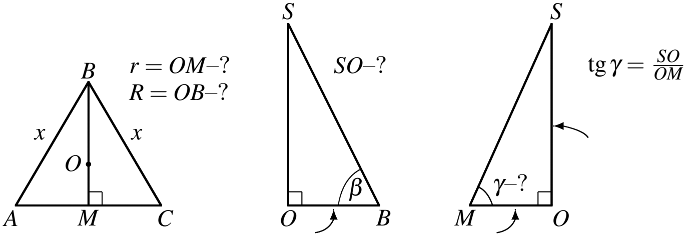
$\operatorname{tg}\beta = \frac{SO}{OB}$, звідки $SO = OB \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}x\operatorname{tg}\beta$;

3) нарешті, при знаходженні кута γ допоміжна невідома x скорочується:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{SO}{MO} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}x\operatorname{tg}\beta}{\frac{\sqrt{3}}{6}x} = 2\operatorname{tg}\beta\text{, отже, } \gamma = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\beta).$$

Відповідь: $\gamma = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\beta)$.

Знаходження кутів піраміди за заданим кутом



Отже:

1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ виражаємо r і R:

$OM = r = \frac{\sqrt{3}}{6}x$, $\quad OB = R = \frac{\sqrt{3}}{3}x$;

2) в прямокутному $\triangle SOB$ виражаємо катет SO:

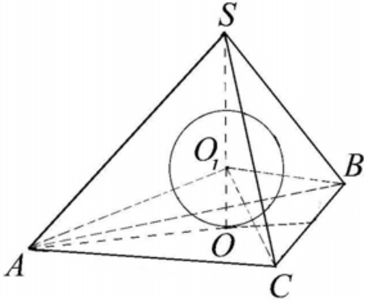
$\operatorname{tg}\beta = \frac{SO}{OB}$, звідки $SO = OB \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}x \operatorname{tg}\beta$;

3) нарешті, при знаходженні кута γ допоміжна невідома x скорочується:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{SO}{MO} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}x \operatorname{tg}\beta}{\frac{\sqrt{3}}{6}x} = 2\operatorname{tg}\beta\text{, отже, } \gamma = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\beta).$$

Відповідь: $\gamma = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\beta)$.

Вписана в піраміду куля



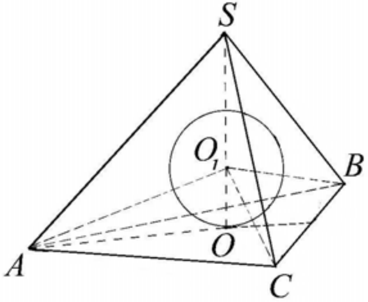
Центр вписаної в довільну піраміду кулі рівновіддалений від усіх граней піраміди. Тому радіус $r_к$ вписаної кулі можна знайти за формулою

$$r_к = \frac{3V}{S_п}, \qquad (1)$$

де V – об'єм і $S_п$ – повна поверхня піраміди.

Для доведення цієї формули достатньо, з'єднавши центр вписаної кулі з вершинами піраміди, подати об'єм піраміди у вигляді суми об'ємів отриманих пірамід з вершиною в центрі кулі, основами яких є грані піраміди, а висотами – радіуси вписаної кулі (наприклад, у піраміді O_1ABC висотою є радіус кулі O_1O, див. мал.). При цьому будемо мати $V = \frac{1}{3}S_0r_к + \frac{1}{3}S_1r_к + \frac{1}{3}S_2r_к + \frac{1}{3}S_3r_к = \frac{1}{3}S_пr_к$ (тут S_0, S_1, S_2, S_3 – площі граней піраміди), звідки випливає формула (1).

Вписана в піраміду куля



Центр вписаної в довільну піраміду кулі рівновіддалений від усіх граней піраміди. Тому радіус $r_к$ вписаної кулі можна знайти за формулою

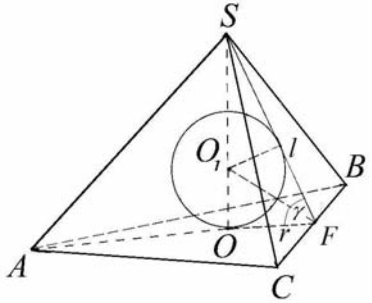
$$r_к = \frac{3V}{S_п}\,, \qquad (1)$$

де V – об'єм і $S_п$ – повна поверхня піраміди.

Для доведення цієї формули достатньо, з'єднавши центр вписаної кулі з вершинами піраміди, подати об'єм піраміди у вигляді суми об'ємів отриманих пірамід з вершиною в центрі кулі, основами яких є грані піраміди, а висотами – радіуси вписаної кулі (наприклад, у піраміди O_1ABC висотою є радіус кулі O_1O, див. мал.). При цьому будемо мати $V = \frac{1}{3}S_0r_к + \frac{1}{3}S_1r_к + \frac{1}{3}S_2r_к + \frac{1}{3}S_3r_к = \frac{1}{3}S_пr_к$ (тут S_0, S_1, S_2, S_3 – площі граней піраміди), звідки випливає формула (1).

Вписана в піраміду куля

Якщо в основі піраміди лежить опуклий многокутник і вершина піраміди віддалена від сторін основи на одну і ту ж відстань l, то усі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під одним і тим же кутом γ. При цьому



в піраміду можна вписати кулю (радіуса $r_к$), центр якої лежить на висоті піраміди, в основу піраміди можна вписати коло (радіуса r), центр якого є основою висоти піраміди, і

- $r_к = r\,\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2}$,
- $H = r\,\mathrm{tg}\,\gamma = \sqrt{l^2 - r^2}$,
- $S_{біч} = \frac{1}{2} P\,l$,

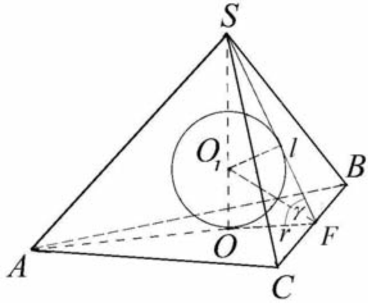
$SF = l\,, \quad O_1O = r_к\,,$

$OF = r\,, \quad \angle O_1FO = \frac{\gamma}{2}$

де H – висота, $S_{біч}$ – бічна поверхня, P – периметр основи піраміди.

Вписана в піраміду куля

Якщо в основі піраміди лежить опуклий многокутник і вершина піраміди віддалена від сторін основи на одну і ту ж відстань l, то усі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під одним і тим же кутом γ. При цьому



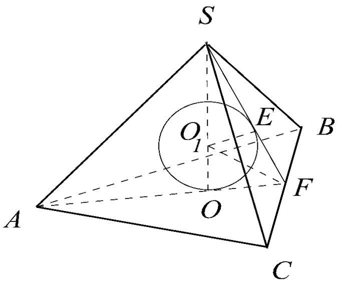
$SF = l\,,\quad O_1O = r_\text{к}\,,$
$OF = r\,,\quad \angle O_1FO = \frac{\gamma}{2}$

в піраміду можна вписати кулю (радіуса $r_\text{к}$), центр якої лежить на висоті піраміди, в основу піраміди можна вписати коло (радіуса r), центр якого є основою висоти піраміди, і

- $r_\text{к} = r\,\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2}\,,$
- $H = r\,\mathrm{tg}\,\gamma = \sqrt{l^2 - r^2}\,,$
- $S_\text{біч} = \frac{1}{2}Pl\,,$

де H – висота, $S_\text{біч}$ – бічна поверхня, P – периметр основи піраміди.

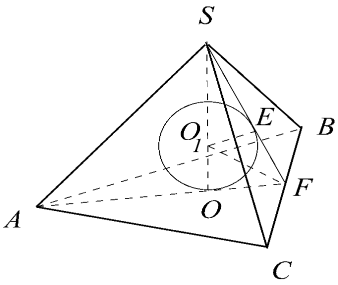
Приклад



Приклад 2. В правильній трикутній піраміді a – сторона основи і β – кут нахилу бічного ребра до площини основи. Знайти радіус кулі, вписаної в піраміду.

Розв'язання (1-й спосіб). Центр O_1 вписаної в піраміду кулі рівновіддалений від усіх граней піраміди і, отже, є точкою перетину усіх площин, які ділять навпіл двогранні кути піраміди. При цьому у правильної піраміди точка O_1 є точкою перетину висоти SO піраміди і бісектриси кута SFO, утвореного апофемою SF і її проекцією FO на основу піраміди (див. мал.). Отже, $r_к = r \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$, де $r = FO$ і γ – двогранний кут при ребрі основи (тобто $\gamma = \angle SFO$).

Приклад



Приклад 2. В правильній трикутній піраміді a – сторона основи і β – кут нахилу бічного ребра до площини основи. Знайти радіус кулі, вписаної в піраміду.

Розв'язання (1-й спосіб). Центр O_1 вписаної в піраміду кулі рівновіддалений від усіх граней піраміди і, отже, є точкою перетину усіх площин, які ділять навпіл двогранні кути піраміди. При цьому у правильної піраміди точка O_1 є точкою перетину висоти SO піраміди і бісектриси кута SFO, утвореного апофемою SF і її проекцією FO на основу піраміди (див. мал.). Отже, $r_{\text{к}} = r \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$, де $r = FO$ і γ – двогранний кут при ребрі основи (тобто $\gamma = \angle SFO$).

Приклад

Оскільки $r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$, то розв'язання задачі зводиться до вираження кута γ через заданий кут β, тобто до задачі, розглянутої в Прикладі 1, де отримано $\gamma = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\beta)$.

Враховуючи, що $0 < \gamma < 90^\circ$ і $\operatorname{tg}\gamma = 2\operatorname{tg}\beta$, отриуємо

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{\frac{1}{\cos\gamma}-1}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}-1}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{2\operatorname{tg}\beta}.$$

Отже,

$$r_{\text{к}} = r\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}a\,\frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{2\operatorname{tg}\beta} = \frac{\sqrt{3}}{12}a\,\frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Розв'язання (2-й спосіб). Радіус $r_{\text{к}}$ вписаної кулі можна знайти за формулою $r_{\text{к}} = \frac{3V}{S_{\text{п}}}$, де V – об'єм і $S_{\text{п}}$ – повлна поверхня піраміди. Отже, маємо

$$r_{\text{к}} = \frac{3V}{S_0+S_{\text{бок}}} = \frac{S_0H}{S_0+\frac{1}{2}Pl} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2H}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{3}{2}al} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2H}{\frac{\sqrt{3}}{4}a(a+2\sqrt{3}l)} = \frac{aH}{a+2\sqrt{3}l}.$$

Отже, для знаходження $r_{\text{к}}$ необхідно знайти висоту H і апофему l піраміди.

Приклад

Оскільки $r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$, то розв'язання задачі зводиться до вираження кута γ через заданий кут β, тобто до задачі, розглянутої в Прикладі 1, де отримано $\gamma = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\beta)$.

Враховуючи, що $0 < \gamma < 90^\circ$ і $\operatorname{tg}\gamma = 2\operatorname{tg}\beta$, отриуємо

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{\frac{1}{\cos\gamma}-1}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}-1}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{2\operatorname{tg}\beta}.$$

Отже,

$$r_К = r\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}a\frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{2\operatorname{tg}\beta} = \frac{\sqrt{3}}{12}a\frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Р о з в' я з а н н я (2-й спосіб). Радіус $r_К$ вписаної кулі можна знайти за формулою $r_К = \frac{3V}{S_П}$, де V – об'єм і $S_П$ – повлна поверхня піраміди. Отже, маємо

$$r_К = \frac{3V}{S_0+S_{бок}} = \frac{S_0H}{S_0+\frac{1}{2}Pl} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2H}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{3}{2}al} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2H}{\frac{\sqrt{3}}{4}a(a+2\sqrt{3}l)} = \frac{aH}{a+2\sqrt{3}l}.$$

Отже, для знаходження $r_К$ необхідно знайти висоту H і апофему l піраміди.

Приклад

Оскільки $r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$, то розв'язання задачі зводиться до вираження кута γ через заданий кут β, тобто до задачі, розглянутої в Прикладі 1, де отримано $\gamma = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\beta)$.

Враховуючи, що $0 < \gamma < 90^\circ$ і $\operatorname{tg}\gamma = 2\operatorname{tg}\beta$, отриуємо

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{\frac{1}{\cos\gamma}-1}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}-1}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{2\operatorname{tg}\beta}.$$

Отже,

$$r_{\text{к}} = r\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}a\frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{2\operatorname{tg}\beta} = \frac{\sqrt{3}}{12}a\frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Розв'язання (2-й спосіб). Радіус $r_{\text{К}}$ вписаної кулі можна знайти за формулою $r_{\text{К}} = \frac{3V}{S_{\text{П}}}$, де V – об'єм і $S_{\text{п}}$ – повлна поверхня піраміди. Отже, маємо

$$r_{\text{К}} = \frac{3V}{S_0+S_{\text{бок}}} = \frac{S_0H}{S_0+\frac{1}{2}Pl} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2H}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{3}{2}al} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2H}{\frac{\sqrt{3}}{4}a(a+2\sqrt{3}l)} = \frac{aH}{a+2\sqrt{3}l}.$$

Отже, для знаходження $r_{\text{К}}$ необхідно знайти висоту H і апофему l піраміди.

Приклад

Оскільки $r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$, то розв'язання задачі зводиться до вираження кута γ через заданий кут β, тобто до задачі, розглянутої в Прикладі 1, де отримано $\gamma = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\beta)$.

Враховуючи, що $0 < \gamma < 90^\circ$ і $\operatorname{tg}\gamma = 2\operatorname{tg}\beta$, отриуємо

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{\frac{1}{\cos\gamma}-1}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}-1}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{2\operatorname{tg}\beta}.$$

Отже,

$$r_{\text{К}} = r\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}a\frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{2\operatorname{tg}\beta} = \frac{\sqrt{3}}{12}a\frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Розв'язання (2-й спосіб). Радіус $r_{\text{К}}$ вписаної кулі можна знайти за формулою $r_{\text{К}} = \frac{3V}{S_{\text{П}}}$, де V – об'єм і $S_{\text{п}}$ – повлна поверхня піраміди. Отже, маємо

$$r_{\text{К}} = \frac{3V}{S_0+S_{\text{бок}}} = \frac{S_0H}{S_0+\frac{1}{2}Pl} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2H}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{3}{2}al} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2H}{\frac{\sqrt{3}}{4}a(a+2\sqrt{3}l)} = \frac{aH}{a+2\sqrt{3}l}.$$

Отже, для знаходження $r_{\text{К}}$ необхідно знайти висоту H і апофему l піраміди.

Приклад

Оскільки $r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$, то розв'язання задачі зводиться до вираження кута γ через заданий кут β, тобто до задачі, розглянутої в Прикладі 1, де отримано $\gamma = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\beta)$.

Враховуючи, що $0 < \gamma < 90^\circ$ і $\operatorname{tg}\gamma = 2\operatorname{tg}\beta$, отриуємо

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{\frac{1}{\cos\gamma}-1}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}-1}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{2\operatorname{tg}\beta}.$$

Отже,

$$r_{\text{к}} = r\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}a\,\frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{2\operatorname{tg}\beta} = \frac{\sqrt{3}}{12}a\,\frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Розв'язання (2-й спосіб). Радіус $r_{\text{к}}$ вписаної кулі можна знайти за формулою $r_{\text{к}} = \frac{3V}{S_{\text{П}}}$, де V – об'єм і $S_{\text{п}}$ – повлна поверхня піраміди. Отже, маємо

$$r_{\text{к}} = \frac{3V}{S_0+S_{\text{бок}}} = \frac{S_0 H}{S_0+\frac{1}{2}Pl} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 H}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{3}{2}al} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 H}{\frac{\sqrt{3}}{4}a\,(a+2\sqrt{3}\,l)} = \frac{aH}{a+2\sqrt{3}\,l}.$$

Отже, для знаходження $r_{\text{к}}$ необхідно знайти висоту H і апофему l піраміди.

Приклад

Оскільки $r=\frac{\sqrt{3}}{6}a$, то розв'язання задачі зводиться до вираження кута γ через заданий кут β, тобто до задачі, розглянутої в Прикладі 1, де отримано $\gamma=\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\beta)$.

Враховуючи, що $0<\gamma<90^\circ$ і $\operatorname{tg}\gamma=2\operatorname{tg}\beta$, отриуємо

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma}=\frac{\frac{1}{\cos\gamma}-1}{\operatorname{tg}\gamma}=\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}-1}{\operatorname{tg}\gamma}=\frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{2\operatorname{tg}\beta}.$$

Отже,

$$r_{\text{к}}=r\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}a\,\frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{2\operatorname{tg}\beta}=\frac{\sqrt{3}}{12}a\,\frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Розв'язання (2-й спосіб). Радіус $r_{\text{к}}$ вписаної кулі можна знайти за формулою $r_{\text{к}}=\frac{3V}{S_{\text{п}}}$, де V – об'єм і $S_{\text{п}}$ – повлна поверхня піраміди. Отже, маємо

$$r_{\text{к}}=\frac{3V}{S_0+S_{\text{бок}}}=\frac{S_0H}{S_0+\frac{1}{2}Pl}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2H}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{3}{2}al}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2H}{\frac{\sqrt{3}}{4}a(a+2\sqrt{3}l)}=\frac{aH}{a+2\sqrt{3}l}.$$

Отже, для знаходження $r_{\text{к}}$ необхідно знайти висоту H і апофему l піраміди.

Приклад

Оскільки $r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$, то розв'язання задачі зводиться до вираження кута γ через заданий кут β, тобто до задачі, розглянутої в Прикладі 1, де отримано $\gamma = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\beta)$.

Враховуючи, що $0 < \gamma < 90^\circ$ і $\operatorname{tg}\gamma = 2\operatorname{tg}\beta$, отриуємо

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{\frac{1}{\cos\gamma}-1}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}-1}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{2\operatorname{tg}\beta}.$$

Отже,

$$r_{\text{к}} = r\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}a\,\frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{2\operatorname{tg}\beta} = \frac{\sqrt{3}}{12}a\,\frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Розв'язання (2-й спосіб). Радіус $r_{\text{к}}$ вписаної кулі можна знайти за формулою $r_{\text{к}} = \frac{3V}{S_{\text{п}}}$, де V – об'єм і $S_{\text{п}}$ – повлна поверхня піраміди. Отже, маємо

$$r_{\text{к}} = \frac{3V}{S_0+S_{\text{бок}}} = \frac{S_0H}{S_0+\frac{1}{2}Pl} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2H}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{3}{2}al} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2H}{\frac{\sqrt{3}}{4}a\,(a+2\sqrt{3}\,l)} = \frac{aH}{a+2\sqrt{3}\,l}.$$

Отже, для знаходження $r_{\text{к}}$ необхідно знайти висоту H і апофему l піраміди.

Приклад

Оскільки $r = \frac{\sqrt{3}}{6} a$, то розв'язання задачі зводиться до вираження кута γ через заданий кут β, тобто до задачі, розглянутої в Прикладі 1, де отримано $\gamma = \operatorname{arctg}(2 \operatorname{tg} \beta)$.

Враховуючи, що $0 < \gamma < 90^\circ$ і $\operatorname{tg} \gamma = 2 \operatorname{tg} \beta$, отриуємо

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{1 - \cos \gamma}{\sin \gamma} = \frac{\frac{1}{\cos \gamma} - 1}{\operatorname{tg} \gamma} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma} - 1}{\operatorname{tg} \gamma} = \frac{\sqrt{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \beta} - 1}{2 \operatorname{tg} \beta}.$$

Отже,

$$r_{\text{к}} = r \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} a \frac{\sqrt{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \beta} - 1}{2 \operatorname{tg} \beta} = \frac{\sqrt{3}}{12} a \frac{\sqrt{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \beta} - 1}{\operatorname{tg} \beta}.$$

Розв'язання (2-й спосіб). Радіус $r_{\text{к}}$ вписаної кулі можна знайти за формулою $r_{\text{к}} = \frac{3V}{S_{\text{п}}}$, де V – об'єм і $S_{\text{п}}$ – повлна поверхня піраміди. Отже, маємо

$$r_{\text{к}} = \frac{3V}{S_0 + S_{\text{бок}}} = \frac{S_0 H}{S_0 + \frac{1}{2} P l} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 H}{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + \frac{3}{2} a l} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 H}{\frac{\sqrt{3}}{4} a (a + 2\sqrt{3} l)} = \frac{aH}{a + 2\sqrt{3} l}.$$

Отже, для знаходження $r_{\text{к}}$ необхідно знайти висоту H і апофему l піраміди.

Приклад

Оскільки $r=\frac{\sqrt{3}}{6}a$, то розв'язання задачі зводиться до вираження кута γ через заданий кут β, тобто до задачі, розглянутої в Прикладі 1, де отримано $\gamma=\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\beta)$.

Враховуючи, що $0<\gamma<90^\circ$ і $\operatorname{tg}\gamma=2\operatorname{tg}\beta$, отриуємо

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma}=\frac{\frac{1}{\cos\gamma}-1}{\operatorname{tg}\gamma}=\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}-1}{\operatorname{tg}\gamma}=\frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{2\operatorname{tg}\beta}.$$

Отже,

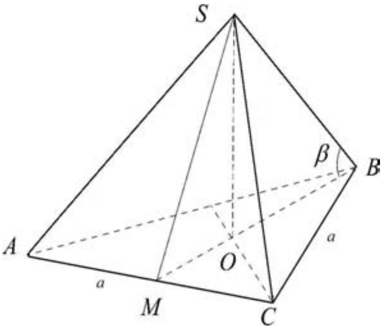
$$r_{\text{к}}=r\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}a\,\frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{2\operatorname{tg}\beta}=\frac{\sqrt{3}}{12}a\,\frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Розв'язання (2-й спосіб). Радіус $r_{\text{к}}$ вписаної кулі можна знайти за формулою $r_{\text{к}}=\frac{3V}{S_{\text{п}}}$, де V – об'єм і $S_{\text{п}}$ – повлна поверхня піраміди. Отже, маємо

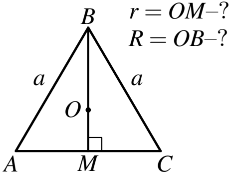
$$r_{\text{к}}=\frac{3V}{S_0+S_{\text{бок}}}=\frac{S_0H}{S_0+\frac{1}{2}Pl}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2H}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{3}{2}al}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2H}{\frac{\sqrt{3}}{4}a\,(a+2\sqrt{3}\,l)}=\frac{aH}{a+2\sqrt{3}\,l}.$$

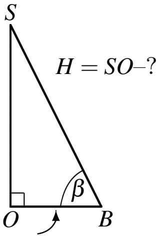
Отже, для знаходження $r_{\text{к}}$ необхідно знайти висоту H і апофему l піраміди.

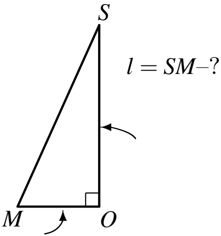
Приклад



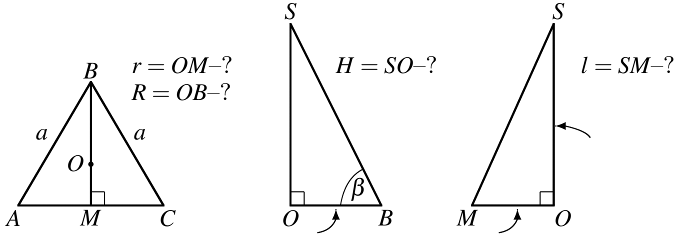
Знайти висоту $H = SO$ і апофему $l = SM$ можна в результаті послідовного розв'язання наступних трьох стандартних планіметричних задач:







Приклад



Отже:

1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ виражаємо r і R:

$OM = r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$, $\quad OB = R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$;

2) в прямокутному $\triangle SOB$ виражаємо катет SO:

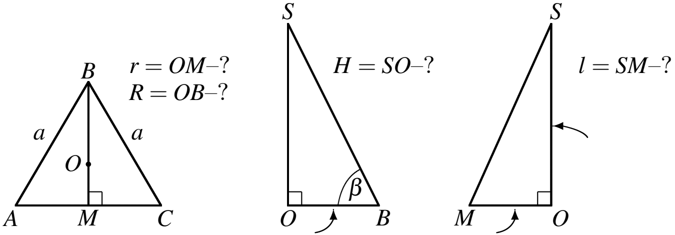
$\operatorname{tg}\beta = \frac{SO}{OB}$, звідки $H = SO = OB \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}a\operatorname{tg}\beta$;

3) в прямокутному трикутнику SOM знаходимо гіпотенузу SM:

$$l = SM = \sqrt{H^2 + r^2} = \sqrt{\frac{1}{3}a^2\operatorname{tg}^2\beta + \frac{1}{12}a^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{12}a^2(4\operatorname{tg}^2\beta + 1)} = \frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta + 1}.$$

Приклад



Отже:

1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ виражаємо r і R:

$OM = r = \frac{\sqrt{3}}{6}\,a\,, \qquad OB = R = \frac{\sqrt{3}}{3}\,a\,;$

2) в прямокутному $\triangle SOB$ виражаємо катет SO:

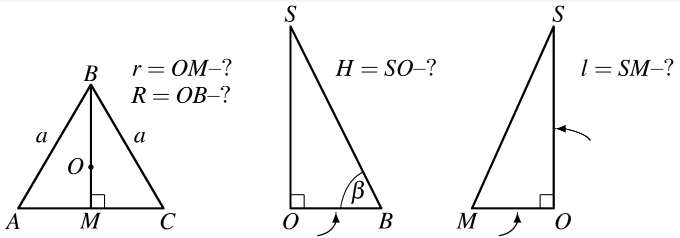
$\operatorname{tg}\beta = \frac{SO}{OB}$, звідки $H = SO = OB \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}\,a\operatorname{tg}\beta\,;$

3) в прямокутному трикутнику SOM знаходимо гіпотенузу SM:

$l = SM = \sqrt{H^2 + r^2} = \sqrt{\frac{1}{3}\,a^2\operatorname{tg}^2\beta + \frac{1}{12}\,a^2} =$

$= \sqrt{\frac{1}{12}\,a^2\,(4\operatorname{tg}^2\beta + 1)} = \frac{a}{2\sqrt{3}}\,\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta + 1}\,.$

Приклад



Отже:

1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ виражаємо r і R:

$OM = r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$, $\quad OB = R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$;

2) в прямокутному $\triangle SOB$ виражаємо катет SO:

$\operatorname{tg}\beta = \frac{SO}{OB}$, звідки $H = SO = OB \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}a\operatorname{tg}\beta$;

3) в прямокутному трикутнику SOM знаходимо гіпотенузу SM:

$$l = SM = \sqrt{H^2 + r^2} = \sqrt{\frac{1}{3}a^2\operatorname{tg}^2\beta + \frac{1}{12}a^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{12}a^2(4\operatorname{tg}^2\beta + 1)} = \frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta + 1}.$$

Приклад

Нарешті, для радіуса $r_{\text{к}}$ отримуємо

$$r_{\text{к}} = \frac{aH}{a+2\sqrt{3}l} = \frac{a\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}a\operatorname{tg}\beta}{a+a\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{a\operatorname{tg}\beta}{1+\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}}\,.$$

Щоб отримати вираз $r_{\text{к}}$ у тому ж вигляді, що і при 1-ому способі розв'язання, виконаємо тотожні перетворення:

$$r_{\text{к}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{a\operatorname{tg}\beta\left(\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}-1\right)}{\left(\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}+1\right)\left(\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}-1\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{a\operatorname{tg}\beta\left(\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}-1\right)}{4\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{\sqrt{3}}{12}a\,\frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{\operatorname{tg}\beta}\,.$$

Відповідь: $r_{\text{к}} = \dfrac{\sqrt{3}}{12}a\,\dfrac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{\operatorname{tg}\beta}$.

Приклад

Нарешті, для радіуса $r_\text{к}$ отримуємо

$$r_\text{к} = \frac{aH}{a+2\sqrt{3}\,l} = \frac{a\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\,a\operatorname{tg}\beta}{a+a\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{a\operatorname{tg}\beta}{1+\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}}\,.$$

Щоб отримати вираз $r_\text{к}$ у тому ж вигляді, що і при 1-ому способі розв'язання, виконаємо тотожні перетворення:

$$r_\text{к} = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{a\operatorname{tg}\beta\left(\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}-1\right)}{\left(\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}+1\right)\left(\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}-1\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{a\operatorname{tg}\beta\left(\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}-1\right)}{4\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{\sqrt{3}}{12}\,a\,\frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{\operatorname{tg}\beta}\,.$$

Відповідь: $r_\text{к} = \dfrac{\sqrt{3}}{12}\,a\,\dfrac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{\operatorname{tg}\beta}\,.$

Приклад

Нарешті, для радіуса $r_{\text{к}}$ отримуємо

$$r_{\text{к}} = \frac{aH}{a+2\sqrt{3}\,l} = \frac{a\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}a\operatorname{tg}\beta}{a+a\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{a\operatorname{tg}\beta}{1+\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}}\,.$$

Щоб отримати вираз $r_{\text{к}}$ у тому ж вигляді, що і при 1-ому способі розв'язання, виконаємо тотожні перетворення:

$$r_{\text{к}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{a\operatorname{tg}\beta\left(\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}-1\right)}{\left(\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}+1\right)\left(\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}-1\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{a\operatorname{tg}\beta\left(\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}-1\right)}{4\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{\sqrt{3}}{12}a\frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{\operatorname{tg}\beta}\,.$$

Відповідь: $r_{\text{к}} = \frac{\sqrt{3}}{12}a\frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{\operatorname{tg}\beta}\,.$

Приклад

Нарешті, для радіуса $r_\text{к}$ отримуємо

$$r_\text{к} = \frac{aH}{a+2\sqrt{3}\,l} = \frac{a\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\,a\operatorname{tg}\beta}{a+a\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{a\operatorname{tg}\beta}{1+\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}}\,.$$

Щоб отримати вираз $r_\text{к}$ у тому ж вигляді, що і при 1-ому способі розв'язання, виконаємо тотожні перетворення:

$$r_\text{к} = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{a\operatorname{tg}\beta\left(\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}-1\right)}{\left(\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}+1\right)\left(\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}-1\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{a\operatorname{tg}\beta\left(\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}-1\right)}{4\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{\sqrt{3}}{12}\,a\,\frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{\operatorname{tg}\beta}\,.$$

Відповідь: $r_\text{к} = \dfrac{\sqrt{3}}{12}\,a\,\dfrac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{\operatorname{tg}\beta}\,.$

Приклад

Нарешті, для радіуса $r_к$ отримуємо

$$r_к = \frac{aH}{a+2\sqrt{3}l} = \frac{a\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}a\operatorname{tg}\beta}{a+a\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{a\operatorname{tg}\beta}{1+\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}}.$$

Щоб отримати вираз $r_к$ у тому ж вигляді, що і при 1-ому способі розв'язання, виконаємо тотожні перетворення:

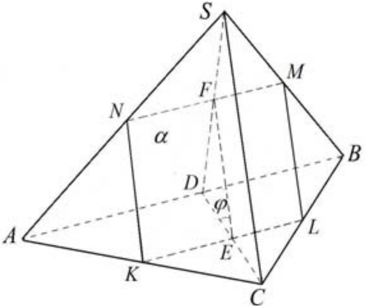
$$r_к = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{a\operatorname{tg}\beta\left(\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}-1\right)}{\left(\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}+1\right)\left(\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}-1\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{a\operatorname{tg}\beta\left(\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}-1\right)}{4\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{\sqrt{3}}{12}a\frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Відповідь: $r_к = \dfrac{\sqrt{3}}{12}a\dfrac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{\operatorname{tg}\beta}.$

Приклади із ЗНО

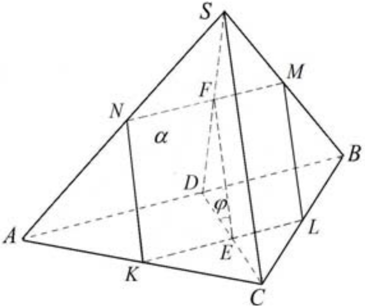
Приклад 3 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.). У правильній трикутній піраміді $SABC$ з основою ABC бічне ребро вдвічі більше за сторону основи. Точки K і L є серединами ребер AC і BC відповідно. Через пряму KL, паралельно до ребра SC, проведено площину α. Знайдіть кут φ між площиною α і площиною (ABC).



Розв'язання. Перерізом піраміди площиною α є чотирикутник $KLMN$, де KN і LM – середні лінії відповідно трикутників SAC і SBC. Тому MN також є середньою лінією трикутника SAB.

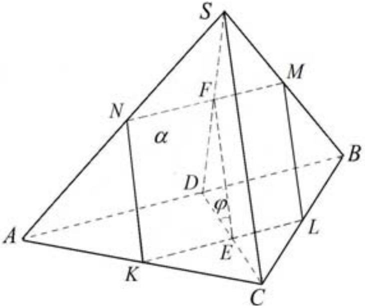
Приклади із ЗНО

Приклад 3 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.). У правильній трикутній піраміді $SABC$ з основою ABC бічне ребро вдвічі більше за сторону основи. Точки K і L є серединами ребер AC і BC відповідно. Через пряму KL, паралельно до ребра SC, проведено площину α. Знайдіть кут φ між площиною α і площиною (ABC).



Розв'язання. Перерізом піраміди площиною α є чотирикутник $KLMN$, де KN і LM – середні лінії відповідно трикутників SAC і SBC. Тому MN також є середньою лінією трикутника SAB.

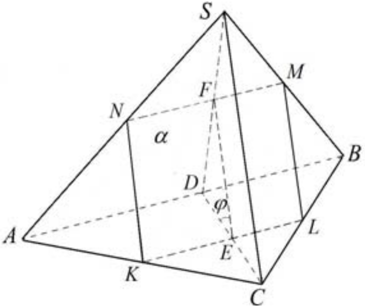
Приклади із ЗНО



Нехай E – середина KL, яка, очевидно, належить також висоті CD основи. В трикутнику SCD розглянемо середню лінію EF. Оскільки F – середина апофеми SD, то F належить також середній лінії MN трикутника SAB.

Оскільки $AB \perp CD$ і $AB \perp SD$, то пряма AB перпендикулярна до площини (SCD). Середня лінія $KL \parallel AB$, тому $KL \perp (SCD)$. Отже, $KL \perp EF$. Оскільки також $ED \perp KL$ – лінії перетину площин α і (ABC), то $\angle FED$ – лінійний кут двогранного кута, утвореного площинами α і (ABC), тобто $\angle FED = \varphi$ – шуканий кут. Оскільки середня лінія $EF \parallel SC$, то $\angle FED = \angle SCD$, тобто шуканий кут φ дорівнює куту нахилу бічного ребра до площини основи.

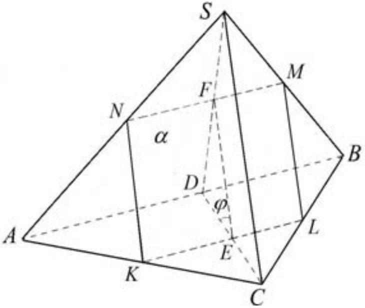
Приклади із ЗНО



Нехай E – середина KL, яка, очевидно, належить також висоті CD основи. В трикутнику SCD розглянемо середню лінію EF. Оскільки F – середина апофеми SD, то F належить також середній лінії MN трикутника SAB.

Оскільки $AB \perp CD$ і $AB \perp SD$, то пряма AB перпендикулярна до площини (SCD). Середня лінія $KL \parallel AB$, тому $KL \perp (SCD)$. Отже, $KL \perp EF$. Оскільки також $ED \perp KL$ – лінії перетину площин α і (ABC), то $\angle FED$ – лінійний кут двогранного кута, утвореного площинами α і (ABC), тобто $\angle FED = \varphi$ – шуканий кут. Оскільки середня лінія $EF \parallel SC$, то $\angle FED = \angle SCD$, тобто шуканий кут φ дорівнює куту нахилу бічного ребра до площини основи.

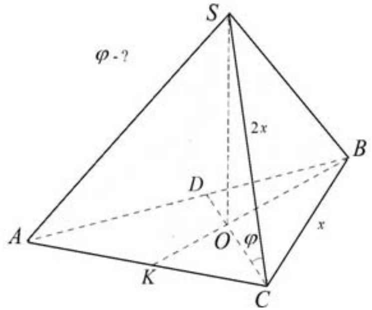
Приклади із ЗНО



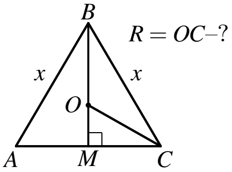
Нехай E – середина KL, яка, очевидно, належить також висоті CD основи. В трикутнику SCD розглянемо середню лінію EF. Оскільки F – середина апофеми SD, то F належить також середній лінії MN трикутника SAB.

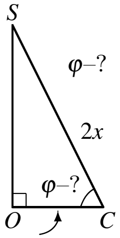
Оскільки $AB \perp CD$ і $AB \perp SD$, то пряма AB перпендикулярна до площини (SCD). Середня лінія $KL \parallel AB$, тому $KL \perp (SCD)$. Отже, $KL \perp EF$. Оскільки також $ED \perp KL$ – лінії перетину площин α і (ABC), то $\angle FED$ – лінійний кут двогранного кута, утвореного площинами α і (ABC), тобто $\angle FED = \varphi$ – шуканий кут. Оскільки середня лінія $EF \parallel SC$, то $\angle FED = \angle SCD$, тобто шуканий кут φ дорівнює куту нахилу бічного ребра до площини основи.

Приклади із ЗНО



Нехай сторона основи піраміди $BC = x$. Тоді $SC = 2x$. Кут $\varphi = \angle SCD$ знайдемо в прямокутному трикутнику SOC, де SO – висота піраміди, для чого виразимо спочатку OC через x в рівносторонньому трикутнику ABC.





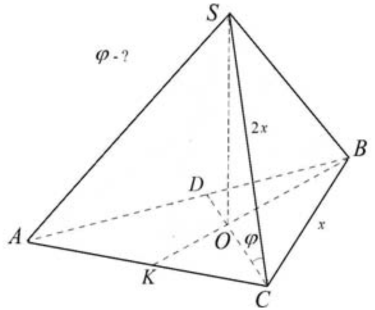
Отже, $OC = R = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ і

$$\cos\varphi = \frac{OC}{SC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}x}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

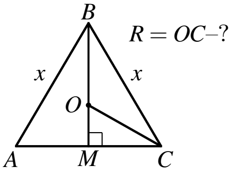
Тому $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$.

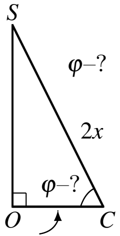
Відповідь: $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Приклади із ЗНО



Нехай сторона основи піраміди $BC = x$. Тоді $SC = 2x$. Кут $\varphi = \angle SCD$ знайдемо в прямокутному трикутнику SOC, де SO – висота піраміди, для чого виразимо спочатку OC через x в рівносторонньому трикутнику ABC.





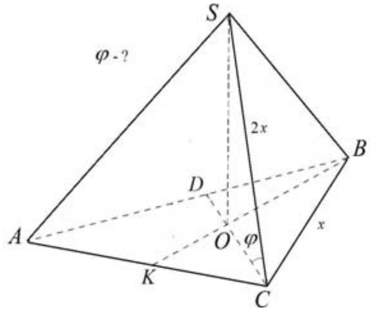
Отже, $OC = R = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ і

$\cos\varphi = \frac{OC}{SC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}x}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

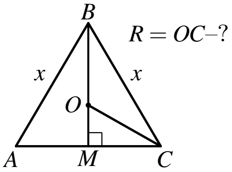
Тому $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$.

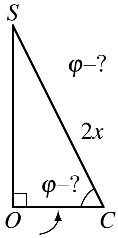
Відповідь: $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Приклади із ЗНО



Нехай сторона основи піраміди $BC = x$. Тоді $SC = 2x$. Кут $\varphi = \angle SCD$ знайдемо в прямокутному трикутнику SOC, де SO – висота піраміди, для чого виразимо спочатку OC через x в рівносторонньому трикутнику ABC.





Отже, $OC = R = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ і

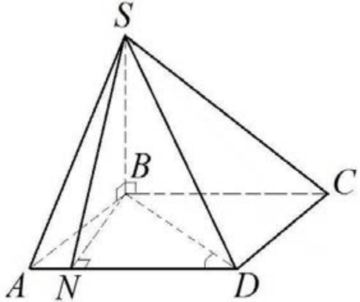
$$\cos\varphi = \frac{OC}{SC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}x}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Тому $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Відповідь: $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Приклади із ЗНО

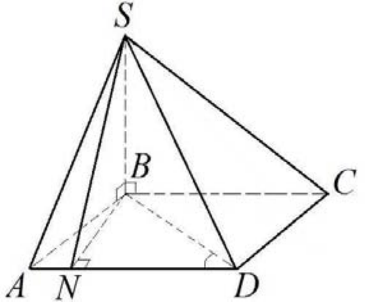
Приклад 4 (Пробне тестування ЗНО, 2017 р.). Основою піраміди *SABCD* є паралелограм *ABCD* з гострим кутом *A*. Ребро *SB* перпендикулярне до прямих *AB* і *BC*. Проекцією ребра *SD* на площину основи піраміди є відрізок довжиною 10 см, який утворює зі стороною *AD* кут 30°. Визначте кут між площинами (*SAD*) і (*ABC*), якщо $SD = 15$ см.



Розв'язання. Розглянемо висоту *BN* паралелограма *ABCD*. За теоремою про три перпендикуляри $SN \perp AD$. Тому $\angle SNB$ – лінійний кут двогранного кута, утвореного площинами (*SAD*) і (*ABC*), тобто $\angle SNB$ – шуканий кут.

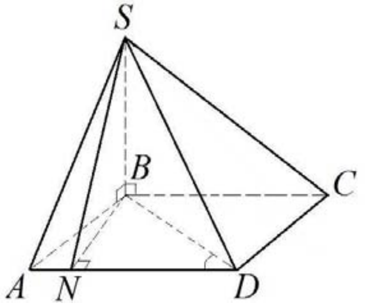
Приклади із ЗНО

Приклад 4 (Пробне тестування ЗНО, 2017 р.). Основою піраміди $SABCD$ є паралелограм $ABCD$ з гострим кутом A. Ребро SB перпендикулярне до прямих AB і BC. Проекцією ребра SD на площину основи піраміди є відрізок довжиною 10 см, який утворює зі стороною AD кут $30°$. Визначте кут між площинами (SAD) і (ABC), якщо $SD = 15$ см.

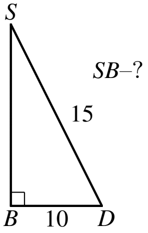


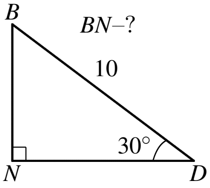
Розв'язання. Розглянемо висоту BN паралелограма $ABCD$. За теоремою про три перпендикуляри $SN \perp AD$. Тому $\angle SNB$ – лінійний кут двогранного кута, утвореного площинами (SAD) і (ABC), тобто $\angle SNB$ – шуканий кут.

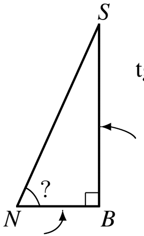
Приклади із ЗНО



Ребро SB перпендикулярне до площини основи піраміди, тому проекцією ребра SD на цю площину є відрізок $BD = 10$ см. Тому, після знаходження SB і BN відповідно в прямокутних трикутниках SBD і BND знайдемо шуканий $\angle SNB$.

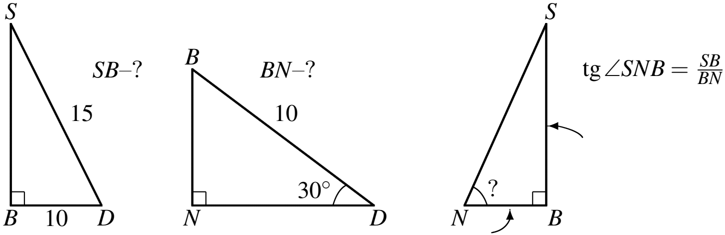






$\operatorname{tg}\angle SNB = \frac{SB}{BN}$

Приклади із ЗНО



Отже, за теоремою Піфагора

$$SB = \sqrt{SD^2 - BD^2} = \sqrt{15^2 - 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}\,.$$

В прямокутному $\triangle BND$ виражаємо катет BN:

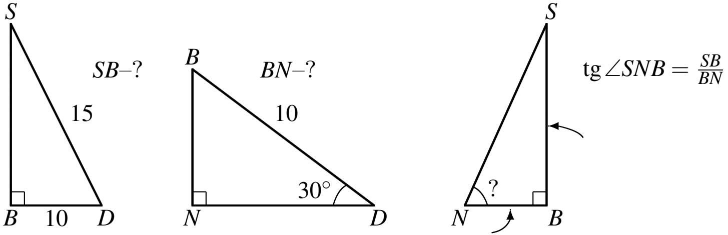
$\sin 30^\circ = \frac{BN}{BD}$, звідки $BN = BD \cdot \sin 30^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$.

Нарешті, $\operatorname{tg} \angle SNB = \frac{SB}{BN} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$, звідки

$\angle SNB = \operatorname{arctg} \sqrt{5}$.

Відповідь: $\operatorname{arctg} \sqrt{5}$.

Приклади із ЗНО



Отже, за теоремою Піфагора

$SB = \sqrt{SD^2 - BD^2} = \sqrt{15^2 - 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}\,.$

В прямокутному $\triangle BND$ виражаємо катет BN:

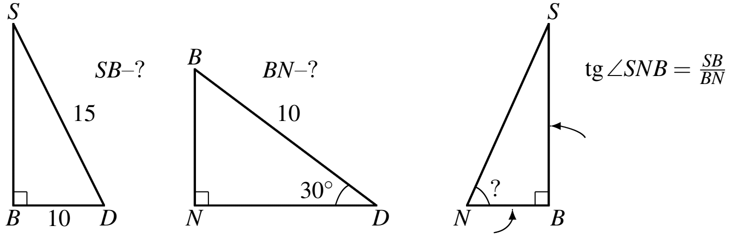
$\sin 30^\circ = \frac{BN}{BD}$, звідки $BN = BD \cdot \sin 30^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5\,.$

Нарешті, $\operatorname{tg} \angle SNB = \frac{SB}{BN} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$, звідки

$\angle SNB = \operatorname{arctg} \sqrt{5}\,.$

Відповідь: $\operatorname{arctg} \sqrt{5}\,.$

Приклади із ЗНО



Отже, за теоремою Піфагора

$SB = \sqrt{SD^2 - BD^2} = \sqrt{15^2 - 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}\,.$

В прямокутному $\triangle BND$ виражаємо катет BN:

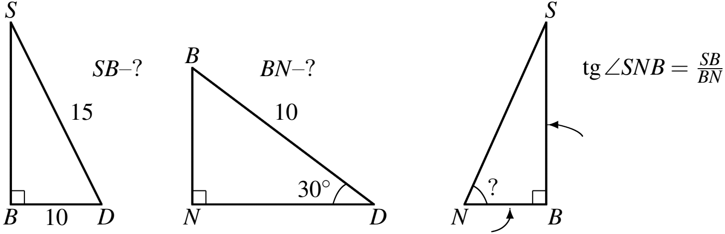
$\sin 30^\circ = \frac{BN}{BD}$, звідки $BN = BD \cdot \sin 30^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5\,.$

Нарешті, $\operatorname{tg} \angle SNB = \frac{SB}{BN} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$, звідки

$\angle SNB = \operatorname{arctg}\sqrt{5}\,.$

Відповідь: $\operatorname{arctg}\sqrt{5}\,.$

Приклади із ЗНО



Отже, за теоремою Піфагора

$SB = \sqrt{SD^2 - BD^2} = \sqrt{15^2 - 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

В прямокутному $\triangle BND$ виражаємо катет BN:

$\sin 30^\circ = \frac{BN}{BD}$, звідки $BN = BD \cdot \sin 30^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$.

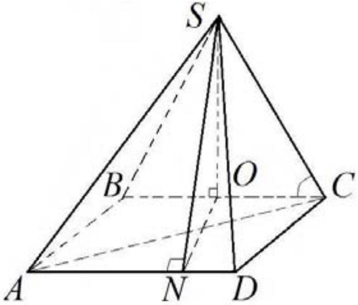
Нарешті, $\operatorname{tg} \angle SNB = \frac{SB}{BN} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$, звідки

$\angle SNB = \operatorname{arctg} \sqrt{5}$.

Відповідь: $\operatorname{arctg} \sqrt{5}$.

Приклади із ЗНО

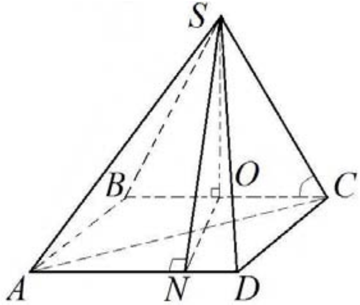
Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2016 р.). Основою піраміди $SABC$ є ромб $ABCD$, більша діагональ якого $AC = 30$. Грань SBC є рівнобедреним трикутником ($SB = SC$) і перпендикулярна до площини основи піраміди. Ребро SC нахилено до площини основи піраміди під кутом $30°$. Визначте кут між площинами (SAD) і (ABC), якщо висота піраміди дорівнює 5.



Розв'язання. Висота SO трикутника SBC є висотою піраміди. Опустимо перпендикуляр SN на пряму AD. За теоремою про три перпендикуляри $ON \perp AD$. Тому $\angle SNO$ – лінійний кут двогранного кута, утвореного площинами (SAD) і (ABC), тобто $\angle SNO$ – шуканий кут.

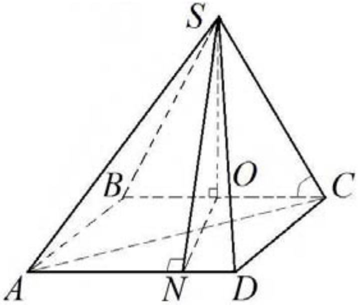
Приклади із ЗНО

П р и к л а д 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2016 р.). Основою піраміди $SABC$ є ромб $ABCD$, більша діагональ якого $AC = 30$. Грань SBC є рівнобедреним трикутником ($SB = SC$) і перпендикулярна до площини основи піраміди. Ребро SC нахилено до площини основи піраміди під кутом $30°$. Визначте кут між площинами (SAD) і (ABC), якщо висота піраміди дорівнює 5.

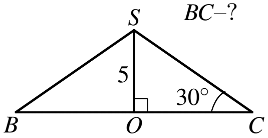


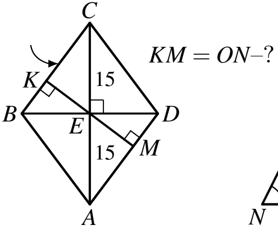
Р о з в'я з а н н я. Висота SO трикутника SBC є висотою піраміди. Опустимо перпендикуляр SN на пряму AD. За теоремою про три перпендикуляри $ON \perp AD$. Тому $\angle SNO$ – лінійний кут двогранного кута, утвореного площинами (SAD) і (ABC), тобто $\angle SNO$ – шуканий кут.

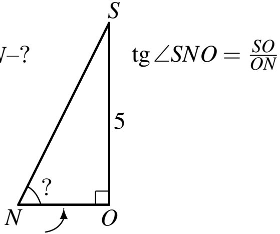
Приклади із ЗНО



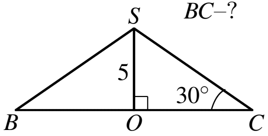
Для знаходження шуканого $\angle SNO$ необхідно обчислити висоту ON ромба $ABCD$, яка дорівнює також довжині відрізка KM, що проходить через центр ромба – точку E. Для цього спочатку необхідно знайти основу BC рівностороннього трикутника SBC.

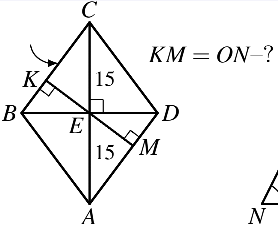


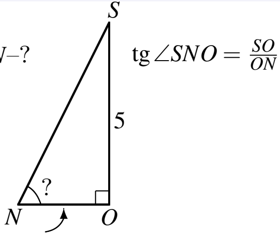




Приклади із ЗНО



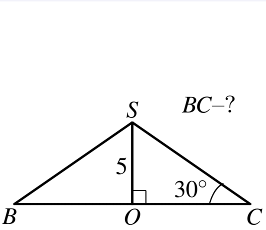


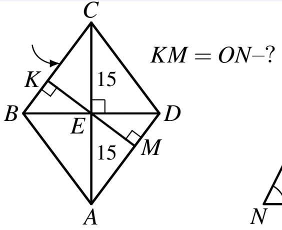


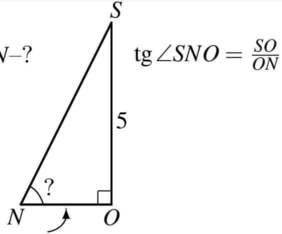
Отже, в прямокутному $\triangle SOC$ маємо співвідношення:
$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{SO}{OC}$, звідки $OC = \frac{SO}{\operatorname{tg} 30^\circ} = SO \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = 5\sqrt{3}$ і
$BC = 2 \cdot OC = 10\sqrt{3}$.

В прямокутному $\triangle BEC$ за теоремою Піфагора знаходимо
$BE = \sqrt{BC^2 - CE^2} = \sqrt{(10\sqrt{3})^2 - 15^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ і,
записуючи співвідношення $\frac{KE}{BE} = \sin\angle CBE = \frac{CE}{BC}$, отримуємо
$KE = \frac{BE \cdot CE}{BC} = \frac{5\sqrt{3} \cdot 15}{10\sqrt{3}} = 7{,}5$; звідки $ON = KM = 2 \cdot KE = 15$.
Нарешті, $\operatorname{tg}\angle SNO = \frac{SO}{ON} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, звідки $\angle SNO = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.
Відповідь: $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

Приклади із ЗНО







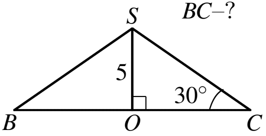
Отже, в прямокутному $\triangle SOC$ маємо співвідношення:
$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{SO}{OC}$, звідки $OC = \frac{SO}{\operatorname{tg} 30^\circ} = SO \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = 5\sqrt{3}$ і
$BC = 2 \cdot OC = 10\sqrt{3}$.

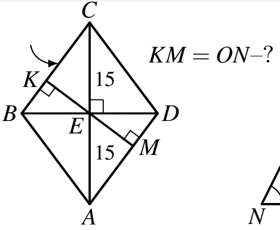
В прямокутному $\triangle BEC$ за теоремою Піфагора знаходимо
$BE = \sqrt{BC^2 - CE^2} = \sqrt{(10\sqrt{3})^2 - 15^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ і,
записуючи співвідношення $\frac{KE}{BE} = \sin\angle CBE = \frac{CE}{BC}$, отримуємо
$KE = \frac{BE \cdot CE}{BC} = \frac{5\sqrt{3} \cdot 15}{10\sqrt{3}} = 7,5$; звідки $ON = KM = 2 \cdot KE = 15$.

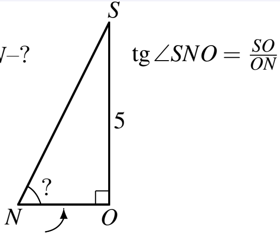
Нарешті, $\operatorname{tg}\angle SNO = \frac{SO}{ON} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, звідки $\angle SNO = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

Відповідь: $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

Приклади із ЗНО







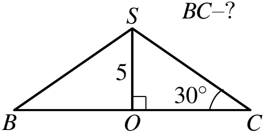
Отже, в прямокутному $\triangle SOC$ маємо співвідношення:
$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{SO}{OC}$, звідки $OC = \frac{SO}{\operatorname{tg} 30^\circ} = SO \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = 5\sqrt{3}$ і
$BC = 2 \cdot OC = 10\sqrt{3}$.

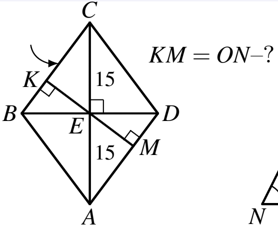
В прямокутному $\triangle BEC$ за теоремою Піфагора знаходимо
$BE = \sqrt{BC^2 - CE^2} = \sqrt{(10\sqrt{3})^2 - 15^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ і,
записуючи співвідношення $\frac{KE}{BE} = \sin\angle CBE = \frac{CE}{BC}$, отримуємо
$KE = \frac{BE \cdot CE}{BC} = \frac{5\sqrt{3} \cdot 15}{10\sqrt{3}} = 7,5$; звідки $ON = KM = 2 \cdot KE = 15$.

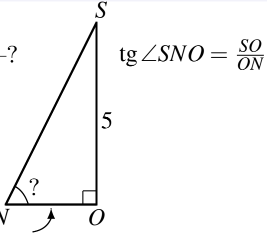
Нарешті, $\operatorname{tg}\angle SNO = \frac{SO}{ON} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, звідки $\angle SNO = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

Відповідь: $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

Приклади із ЗНО



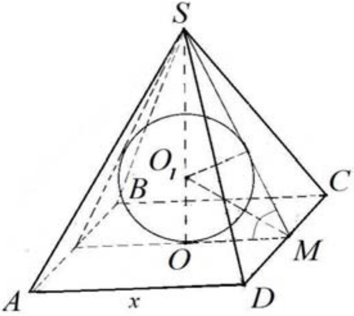




Отже, в прямокутному $\triangle SOC$ маємо співвідношення:
$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{SO}{OC}$, звідки $OC = \frac{SO}{\operatorname{tg} 30^\circ} = SO \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = 5\sqrt{3}$ і
$BC = 2 \cdot OC = 10\sqrt{3}$.
В прямокутному $\triangle BEC$ за теоремою Піфагора знаходимо
$BE = \sqrt{BC^2 - CE^2} = \sqrt{(10\sqrt{3})^2 - 15^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ і,
записуючи співвідношення $\frac{KE}{BE} = \sin\angle CBE = \frac{CE}{BC}$, отримуємо
$KE = \frac{BE \cdot CE}{BC} = \frac{5\sqrt{3} \cdot 15}{10\sqrt{3}} = 7,5$; звідки $ON = KM = 2 \cdot KE = 15$.
Нарешті, $\operatorname{tg}\angle SNO = \frac{SO}{ON} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, звідки $\angle SNO = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.
Відповідь: $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Пробне тестування ЗНО, 2010 р.).
У правильну чотирикутну піраміду вписано сферу, площа якої дорівнює 36π см^2. Бічна грань піраміди нахилена до площини її основи під кутом 60°. Знайдіть об'єм піраміди (у см^3).

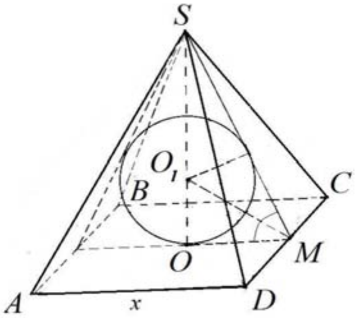


Розв'язання. Нехай сторона основи піраміди $AD = x$. У правильної піраміди центр вписаної кулі O_1 є точкою перетину висоти SO піраміди і бісектриси заданного $\angle SMO = 60^\circ$, утвореного апофемою SM та її проекцією MO на основу піраміди. Отже, радіус вписаної кулі

$$r_\text{к} = MO \cdot \operatorname{tg}\frac{\angle SMO}{2} = \frac{x}{2}\operatorname{tg}30^\circ = \frac{x}{2\sqrt{3}}.$$

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Пробне тестування ЗНО, 2010 р.).
У правильну чотирикутну піраміду вписано сферу, площа якої дорівнює 36π см^2. Бічна грань піраміди нахилена до площини її основи під кутом 60°. Знайдіть об'єм піраміди (у см^3).



Розв'язання. Нехай сторона основи піраміди $AD = x$. У правильної піраміди центр вписаної кулі O_1 є точкою перетину висоти SO піраміди і бісектриси заданного $\angle SMO = 60^\circ$, утвореного апофемою SM та її проекцією MO на основу піраміди. Отже, радіус вписаної кулі

$$r_к = MO \cdot \mathrm{tg}\,\frac{\angle SMO}{2} = \frac{x}{2}\,\mathrm{tg}\,30^\circ = \frac{x}{2\sqrt{3}}\,.$$

Приклади із ЗНО

Виражаючи площу вписаної сфери за формулою $S_{\text{сф}} = 4\pi (r_{\text{к}})^2$, отримуємо рівняння

$4\pi \left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)^2 = 36\pi \iff \left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)^2 = 9$, звідки

$\frac{x}{2\sqrt{3}} = 3 \iff x = 6\sqrt{3}$ (см).

Тепер для обчислення об'єму піраміди, знайдемо висоту піраміди SO з прямокутного $\triangle SOM$:

$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{SO}{MO}$, звідки

$SO = MO \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 9$ (см).

Нарешті, обчислюємо об'єм піраміди за формулою $V = \frac{1}{3} S_0 \cdot SO$, де

$S_0 = x^2 = (6\sqrt{3})^2 = 108$ (см^2) – площа основи піраміди.

Отже, отримуємо $V = \frac{1}{3} \cdot 108 \cdot 9 = 324$ (см^3).

Відповідь: 324.

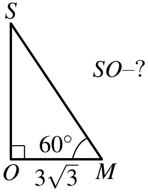
Приклади із ЗНО

Виражаючи площу вписаної сфери за формулою
$S_{\text{сф}} = 4\pi\,(r_{\text{к}})^2$, отримуємо рівняння

$4\pi\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)^2 = 36\pi \iff \left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)^2 = 9$, звідки

$\frac{x}{2\sqrt{3}} = 3 \iff x = 6\sqrt{3}$ (см).

Тепер для обчислення об'єму піраміди, знайдемо висоту піраміди SO з прямокутного $\triangle SOM$:



$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{SO}{MO}$, звідки

$SO = MO \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 9$ (см).

Нарешті, обчислюємо об'єм піраміди за формулою $V = \frac{1}{3}\, S_0 \cdot SO$, де

$S_0 = x^2 = (6\sqrt{3})^2 = 108$ (см^2) – площа основи піраміди.

Отже, отримуємо $V = \frac{1}{3} \cdot 108 \cdot 9 = 324$ (см^3).

Відповідь: 324.

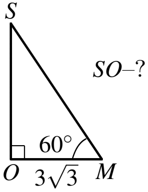
Приклади із ЗНО

Виражаючи площу вписаної сфери за формулою $S_{\text{сф}} = 4\pi\,(r_{\text{к}})^2$, отримуємо рівняння

$4\pi\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)^2 = 36\pi \iff \left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)^2 = 9$, звідки

$\frac{x}{2\sqrt{3}} = 3 \iff x = 6\sqrt{3}$ (см).

Тепер для обчислення об'єму піраміди, знайдемо висоту піраміди SO з прямокутного $\triangle SOM$:



$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{SO}{MO}$, звідки

$SO = MO \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 9$ (см).

Нарешті, обчислюємо об'єм піраміди за формулою $V = \frac{1}{3} S_0 \cdot SO$, де

$S_0 = x^2 = (6\sqrt{3})^2 = 108$ (см^2) – площа основи піраміди.

Отже, отримуємо $V = \frac{1}{3} \cdot 108 \cdot 9 = 324$ (см^3).

Відповідь: 324.

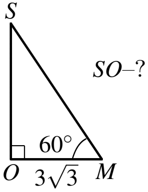
Приклади із ЗНО

Виражаючи площу вписаної сфери за формулою $S_{\text{сф}} = 4\pi\,(r_{\text{к}})^2$, отримуємо рівняння

$4\pi\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)^2 = 36\pi \iff \left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)^2 = 9$, звідки

$\frac{x}{2\sqrt{3}} = 3 \iff x = 6\sqrt{3}$ (см).

Тепер для обчислення об'єму піраміди, знайдемо висоту піраміди SO з прямокутного $\triangle SOM$:



$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{SO}{MO}$, звідки

$SO = MO \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 9$ (см).

Нарешті, обчислюємо об'єм піраміди за формулою $V = \frac{1}{3} S_0 \cdot SO$, де

$S_0 = x^2 = (6\sqrt{3})^2 = 108$ (см^2) – площа основи піраміди.

Отже, отримуємо $V = \frac{1}{3}\cdot 108\cdot 9 = 324$ (см^3).

Відповідь: 324.