Елементи аналітичної геометрії на площині

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 23

Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Координатний метод в геометрії

Введенням координат встановлюється зв'язок між геометрією і алгеброю.

Розглянемо геометрію на координатній площині.

Однією з найбільш уживаних є декартова прямокутна система координат.

Точка площини, яка є геометричним об'єктом, ототожнюється з парою (x_0, y_0) її координат – чисел x_0 і y_0, тобто стає алгебраїчним об'єктом.

Усі геометричні фігури описуються деякими рівняннями або нерівностями.

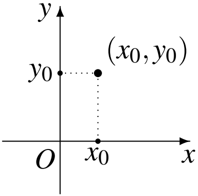
- При цьому точка (x, y) належить геометричній фігурі, якщо її координати x і y задовольняють ті умови (рівняння, нерівності), які задають цю фігуру.

Координатний метод в геометрії

Введенням координат встановлюється зв'язок між геометрією і алгеброю.

Розглянемо геометрію на координатній площині.

Однією з найбільш уживаних є декартова прямокутна система координат.



Точка площини, яка є геометричним об'єктом, ототожнюється з парою (x_0, y_0) її координат – чисел x_0 і y_0, тобто стає алгебраїчним об'єктом.

Усі геометричні фігури описуються деякими рівняннями або нерівностями.

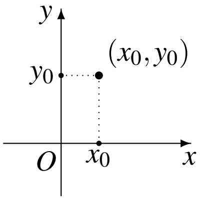
- При цьому точка (x, y) належить геометричній фігурі, якщо її координати x і y задовольняють ті умови (рівняння, нерівності), які задають цю фігуру.

Координатний метод в геометрії

Введенням координат встановлюється зв'язок між геометрією і алгеброю.

Розглянемо геометрію на координатній площині.

Однією з найбільш уживаних є декартова прямокутна система координат.



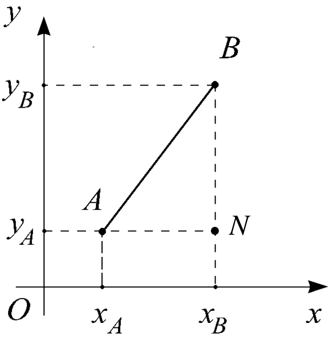
Точка площини, яка є геометричним об'єктом, ототожнюється з парою (x_0, y_0) її координат – чисел x_0 і y_0, тобто стає алгебраїчним об'єктом.

Усі геометричні фігури описуються деякими рівняннями або нерівностями.

- При цьому точка (x, y) належить геометричній фігурі, якщо її координати x і y задовольняють ті умови (рівняння, нерівності), які задають цю фігуру.

Відстань між точками

Нехай на площині в декартовій прямокутній системі координат xOy задано точки $A(x_A, y_A)$ і $B(x_B, y_B)$.

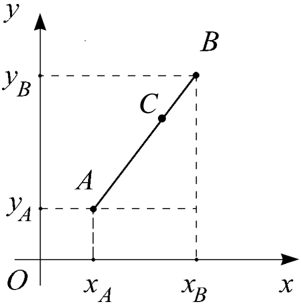


Відстань між точками A і B (тобто довжина відрізка AB) виражається формулою

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}},$$

яка є очевидним наслідком теореми Піфагора для трикутника ANB.

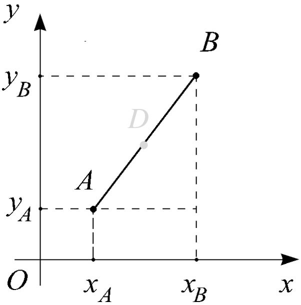
Поділ відрізка



Точка C відрізка AB, яка ділить його в заданому відношенні λ $\left(\text{тобто } \lambda = \frac{AC}{CB}\right)$, має координати

$$x_C = \frac{\lambda x_B + x_A}{\lambda + 1}, \quad y_C = \frac{\lambda y_B + y_A}{\lambda + 1}$$

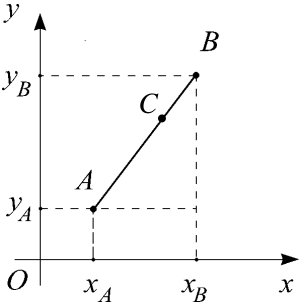
(доведення цих формул див. у прикладі 7).



Зокрема, при $\lambda = 1$ отримуємо координати середини відрізка AB — точки D:

$$\boxed{x_D = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_D = \frac{y_A + y_B}{2}.}$$

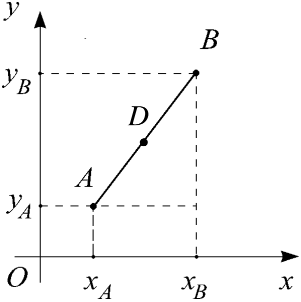
Поділ відрізка



Точка C відрізка AB, яка ділить його в заданому відношенні λ $\left(\text{тобто } \lambda = \frac{AC}{CB}\right)$, має координати

$$x_C = \frac{\lambda x_B + x_A}{\lambda + 1}, \quad y_C = \frac{\lambda y_B + y_A}{\lambda + 1}$$

(доведення цих формул див. у прикладі 7).



Зокрема, при $\lambda = 1$ отримуємо координати середини відрізка AB — точки D:

$$\boxed{x_D = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_D = \frac{y_A + y_B}{2}.}$$

Рівняння прямої

Рівняння прямої має вигляд $ax+by+c=0$, де a, b, c — деякі числа, і, принаймні, хоча б одне з чисел a,b не дорівнює нулю.

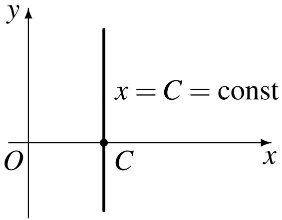
- Якщо $b=0$, то $a\neq 0$ і рівняння прямої $ax+c=0$ переписується у вигляді $x=-\frac{c}{a}=\text{const}$.

Пряма $x=C$ паралельна осі Oy при будь-якому значенні сталої $C\neq 0$ і співпадає з віссю Oy при $C=0$.

Рівняння прямої

Рівняння прямої має вигляд $ax+by+c=0$, де a, b, c — деякі числа, і, принаймні, хоча б одне з чисел a, b не дорівнює нулю.

- Якщо $b=0$, то $a\neq 0$ і рівняння прямої $ax+c=0$ переписується у вигляді $x=-\frac{c}{a}=\text{const}$.



Пряма $x=C$ паралельна осі Oy при будь-якому значенні сталої $C\neq 0$ і співпадає з віссю Oy при $C=0$.

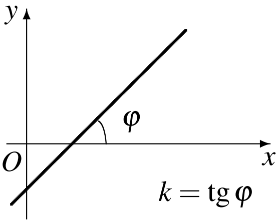
Рівняння прямої

- Якщо $b \neq 0$, то рівнянню прямої $ax+by+c=0$ після ділення обох частин рівності на b можна надати вигляду $y=kx+m$, при цьому число k називають кутовим коефіцієнтом прямої.

Кутовий коефіцієнт прямої дорівнює тангенсу кута, який відлічується від додатнього напрямку осі Ox до прямої в додатньому напрямку, тобто проти руху годинникової стрілки.

Рівняння прямої

- Якщо $b \neq 0$, то рівнянню прямої $ax + by + c = 0$ після ділення обох частин рівності на b можна надати вигляду $y = kx + m$, при цьому число k називають кутовим коефіцієнтом прямої.

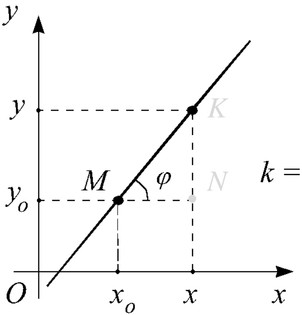


Кутовий коефіцієнт прямої дорівнює тангенсу кута, який відлічується від додатнього напрямку осі Ox до прямої в додатньому напрямку, тобто проти руху годинникової стрілки.

Рівняння прямої (кутовий коефіцієнт і точка)

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k,, яка проходить через точку $M(x_0, y_0)$, має вигляд

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)}.$$



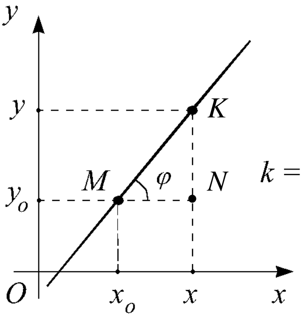
$$k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Це рівняння легко отримуємо як наслідок означення тангенса кута φ в трикутнику KNM.

Рівняння прямої (кутовий коефіцієнт і точка)

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k,, яка проходить через точку $M(x_0, y_0)$, має вигляд

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)}\,.$$



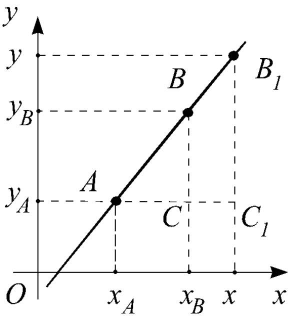
$$k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Це рівняння легко отримуємо як наслідок означення тангенса кута φ в трикутнику KNM.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Рівняння прямої, що проходить через точки $A(x_A, y_A)$ і $B(x_B, y_B)$ у випадку, коли пряма AB не паралельна координатним осям Ox, Oy і не співпадає з ними, є наслідком подібності трикутників ABC і AB_1C_1 і записується у вигляді

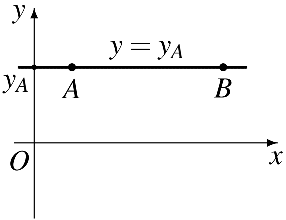
$$\boxed{\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{x-x_A}{x_B-x_A}}.$$



$$\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{x-x_A}{x_B-x_A}$$

Рівняння прямої (частинні випадки)

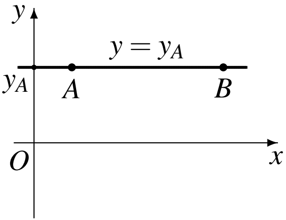
Якщо пряма AB паралельна осі Ox або співпадає з Ox, то її рівняння має вигляд $y = y_A$,



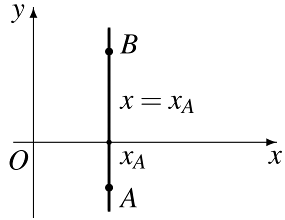
а якщо вона паралельна осі Oy або співпадає з Oy, то рівняння прямої записується у вигляді $x = x_A$.

Рівняння прямої (частинні випадки)

Якщо пряма AB паралельна осі Ox або співпадає з Ox, то її рівняння має вигляд $y = y_A$,



а якщо вона паралельна осі Oy або співпадає з Oy, то рівняння прямої записується у вигляді $x = x_A$.



Розміщення двох прямих

Щоб знайти спільні точки прямих l_1: $a_1x+b_1y+c_1=0$ і l_2: $a_2x+b_2y+c_2=0$, необхідно розв'язати систему

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0. \end{cases} \tag{1}$$

При цьому можливі три випадки (розглянемо їх у припущенні, що $a_2, b_2, c_2 \neq 0$):

1) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

В цьому випадку система (1) має єдиний розв'язок (позначимо його $(x_0,\ y_0)$), а прямі l_1 і l_2 перетинаються в точці (x_0, y_0);

2) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

В цьому випадку система (1) не має розв'язків і $l_1 \parallel l_2$;

3) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

В цьому випадку система (1) має нескінченну множину розв'язків, а прямі l_1 і l_2 при цьому співпадають.

Умови паралельності і перпендикулярності прямих

Нехай тепер задані прямі
$l_1\colon y = k_1x + m_1$ і $l_2\colon y = k_2x + m_2$.
Умови паралельності і перпендикулярності прямих
l_1 і l_2 мають вигляд:

$$\boxed{l_1 \parallel l_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2, \\ m_1 \neq m_2, \end{cases} \qquad l_1 \perp l_2 \Longleftrightarrow k_1k_2 = -1}\,.$$

Приклад 1. Записати рівняння прямих, які проходять через точку $M(3;-2)$ відповідно паралельно і перпендикулярно до прямої $l\colon y = 4x + 3$.

Розв'язання. Нехай пряма l_1 проходить через точку M і $l_1 \parallel l$. Тоді за умовою паралельності прямих її кутовий коефіцієнт k_{l_1} дорівнює кутовому коефіцієнту k_l прямої l, тобто $k_{l_1} = 4$. Рівняння прямої l_1 запишемо за формулою $y - y_M = k_{l_1}(x - x_M)$, а саме:

$$y - (-2) = 4(x - 3) \iff y = 4x - 14\,.$$

Умови паралельності і перпендикулярності прямих

Нехай тепер задані прямі
$l_1\colon y = k_1 x + m_1$ і $l_2\colon y = k_2 x + m_2$.
Умови паралельності і перпендикулярності прямих
l_1 і l_2 мають вигляд:

$$\boxed{l_1 \parallel l_2 \iff \begin{cases} k_1 = k_2, \\ m_1 \neq m_2, \end{cases} \qquad l_1 \perp l_2 \iff k_1 k_2 = -1}\,.$$

П р и к л а д 1. Записати рівняння прямих, які проходять через точку $M(3;-2)$ відповідно паралельно і перпендикулярно до прямої $l\colon y = 4x + 3$.

Р о з в' я з а н н я. Нехай пряма l_1 проходить через точку M і $l_1 \parallel l$. Тоді за умовою паралельності прямих її кутовий коефіцієнт k_{l_1} дорівнює кутовому коефіцієнту k_l прямої l, тобто $k_{l_1} = 4$. Рівняння прямої l_1 запишемо за формулою $y - y_M = k_{l_1}(x - x_M)$, а саме:

$$y - (-2) = 4(x - 3) \iff y = 4x - 14.$$

Умови паралельності і перпендикулярності прямих

Нехай тепер задані прямі
$l_1\colon y = k_1x + m_1$ і $l_2\colon y = k_2x + m_2$.
Умови паралельності і перпендикулярності прямих
l_1 і l_2 мають вигляд:

$$\boxed{l_1 \parallel l_2 \iff \begin{cases} k_1 = k_2, \\ m_1 \neq m_2, \end{cases} \qquad l_1 \perp l_2 \iff k_1k_2 = -1}\,.$$

П р и к л а д 1. Записати рівняння прямих, які проходять через точку $M(3;-2)$ відповідно паралельно і перпендикулярно до прямої $l\colon y = 4x + 3$.

Р о з в' я з а н н я. Нехай пряма l_1 проходить через точку M і $l_1 \parallel l$. Тоді за умовою паралельності прямих її кутовий коефіцієнт k_{l_1} дорівнює кутовому коефіцієнту k_l прямої l, тобто $k_{l_1} = 4$. Рівняння прямої l_1 запишемо за формулою $y - y_M = k_{l_1}(x - x_M)$, а саме:

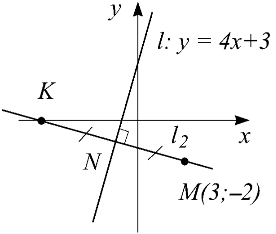
$$y - (-2) = 4(x - 3) \iff y = 4x - 14\,.$$

Умови паралельності і перпендикулярності прямих

Пряма l_2, яка проходить через точку M і така, що $l_2 \perp l$, в силу умови перпендикулярності прямих має кутовий коефіцієнт $k_{l_2} = -\frac{1}{k_l} = -\frac{1}{4}$. Її рівняння отримуємо ха формулою $y - y_M = k_{l_2}(x - x_M)$, а саме: $y - (-2) = -\frac{1}{4}(x - 3) \iff y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$.

Відповідь: $l \parallel l_1$: $y = 4x - 14$; $l \perp l_2$: $y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$.

Приклад 2. Знайти координати точки K, яка симетрична точці $M(3;-2)$ відносно прямої l: $y = 4x + 3$.



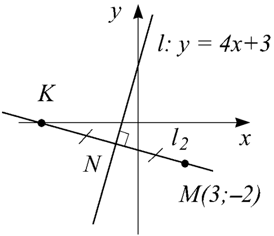
Розв'язання. Точка K лежить на прямій l_2, яка проходить через точку M і перпендикулярна до прямої l (див. мал.). Рівняння прямої l_2 має вигляд $y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$ (див. попередній приклад).

Умови паралельності і перпендикулярності прямих

Пряма l_2, яка проходить через точку M і така, що $l_2 \perp l$, в силу умови перпендикулярності прямих має кутовий коефіцієнт $k_{l_2} = -\frac{1}{k_l} = -\frac{1}{4}$. Її рівняння отримуємо ха формулою $y - y_M = k_{l_2}(x - x_M)$, а саме:
$y - (-2) = -\frac{1}{4}(x-3) \iff y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$.

Відповідь: $l \parallel l_1$: $y = 4x - 14$; $\quad l \perp l_2$: $y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$.

Приклад 2. Знайти координати точки K, яка симетрична точці $M(3;-2)$ відносно прямої l: $y = 4x + 3$.



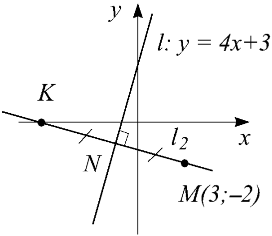
Розв'язання. Точка K лежить на прямій l_2, яка проходить через точку M і перпендикулярна до прямої l (див. мал.). Рівняння прямої l_2 має вигляд $y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$ (див. попередній приклад).

Умови паралельності і перпендикулярності прямих

Пряма l_2, яка проходить через точку M і така, що $l_2 \perp l$, в силу умови перпендикулярності прямих має кутовий коефіцієнт $k_{l_2} = -\frac{1}{k_l} = -\frac{1}{4}$. Її рівняння отримуємо ха формулою $y - y_M = k_{l_2}(x - x_M)$, а саме:
$y - (-2) = -\frac{1}{4}(x - 3) \iff y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$.

Відповідь: $l \parallel l_1$: $y = 4x - 14$; $l \perp l_2$: $y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$.

Приклад 2. Знайти координати точки K, яка симетрична точці $M(3;-2)$ відносно прямої l: $y = 4x + 3$.



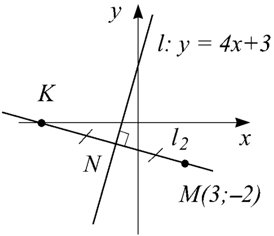
Розв'язання. Точка K лежить на прямій l_2, яка проходить через точку M і перпендикулярна до прямої l (див. мал.). Рівняння прямої l_2 має вигляд $y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$ (див. попередній приклад).

Умови паралельності і перпендикулярності прямих

Пряма l_2, яка проходить через точку M і така, що $l_2 \perp l$, в силу умови перпендикулярності прямих має кутовий коефіцієнт $k_{l_2} = -\frac{1}{k_l} = -\frac{1}{4}$. Її рівняння отримуємо ха формулою $y - y_M = k_{l_2}(x - x_M)$, а саме:
$y - (-2) = -\frac{1}{4}(x-3) \iff y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$.

Відповідь: $l \parallel l_1$: $y = 4x - 14$; $l \perp l_2$: $y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$.

Приклад 2. Знайти координати точки K, яка симетрична точці $M(3;-2)$ відносно прямої l: $y = 4x + 3$.



Розв'язання. Точка K лежить на прямій l_2, яка проходить через точку M і перпендикулярна до прямої l (див. мал.). Рівняння прямої l_2 має вигляд $y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$ (див. попередній приклад).

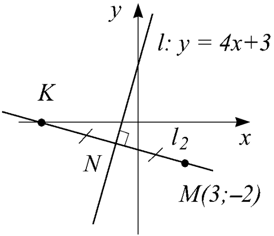
Умови паралельності і перпендикулярності прямих

Тепер знаходимо координати точки перетину прямих $l: y = 4x + 3$ і $l_2: y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y = 4x + 3, \\ y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}, \end{cases} \iff \begin{cases} y = 4x + 3, \\ 4x + 3 = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y = 4x + 3, \\ x = -1. \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1, \\ y = -1. \end{cases}$$

У такий спосіб знайдено точку $N(-1;-1)$ – точку перетину прямих l і l_2.



Враховуючи, що N – середина відрізка MK, і використовуючи формули координат середини відрізка, знаходимо координати точки $K(x_K, y_K)$:

$$\begin{cases} \frac{x_K+3}{2} = -1, \\ \frac{y_K-2}{2} = -1, \end{cases} \iff \begin{cases} x_K = -5, \\ y_K = 0. \end{cases}$$

Відповідь: $K(-5;0)$.

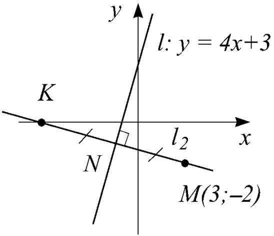
Умови паралельності і перпендикулярності прямих

Тепер знаходимо координати точки перетину прямих $l: y = 4x + 3$ і $l_2: y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y = 4x+3, \\ y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 4x+3, \\ 4x+3 = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}, \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = 4x+3, \\ x = -1. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = -1. \end{cases}$$

У такий спосіб знайдено точку $N(-1;-1)$ – точку перетину прямих l і l_2.



Враховуючи, що N – середина відрізка MK, і використовуючи формули координат середини відрізка, знаходимо координати точки $K(x_K, y_K)$:

$$\begin{cases} \frac{x_K+3}{2} = -1, \\ \frac{y_K-2}{2} = -1, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_K = -5, \\ y_K = 0. \end{cases}$$

Відповідь: $K(-5;0)$.

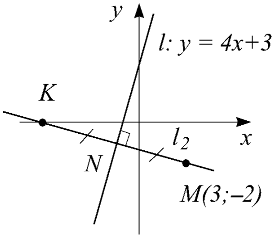
Умови паралельності і перпендикулярності прямих

Тепер знаходимо координати точки перетину прямих $l: y = 4x+3$ і $l_2: y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y = 4x+3, \\ y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}, \end{cases} \iff \begin{cases} y = 4x+3, \\ 4x+3 = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y = 4x+3, \\ x = -1. \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1, \\ y = -1. \end{cases}$$

У такий спосіб знайдено точку $N(-1;-1)$ – точку перетину прямих l і l_2.



Враховуючи, що N – середина відрізка MK, і використовуючи формули координат середини відрізка, знаходимо координати точки $K(x_K, y_K)$:

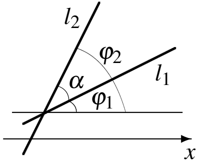
$$\begin{cases} \frac{x_K+3}{2} = -1, \\ \frac{y_K-2}{2} = -1, \end{cases} \iff \begin{cases} x_K = -5, \\ y_K = 0. \end{cases}$$

Відповідь: $K(-5;0)$.

Кут між прямими

Якщо $k_1 \neq k_2$ і $k_1 \cdot k_2 \neq -1$, то гострий кут α між прямими l_1: $y = k_1 x + m_1$ і l_2: $y = k_2 x + m_2$ обчислюється за формулою

$$\operatorname{tg}\alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|,$$

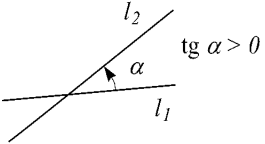


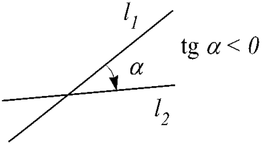
яка є наслідком аналогічної формули для тангенса різниці кутів:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2},$$

де $k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1$ и $k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$.

Інколи корисно розрізняти напрямок відліку гострого кута α.
Якщо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} > 0$, то відлік гострого кута α здійснюється від прямої l_1 до прямої l_2 в додатньому напрямку, а якщо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} < 0$, – то у від'ємному:





Відстань від точки до прямої і відстань між паралельними прямими

Наведемо тепер формули для знаходження відстані від точки до прямої, а також відстані між паралельними прямими.

Відстань $\rho(M,l)$ від точки $M(x_0,y_0)$ до прямої $l\colon ax+by+c=0$ знаходиться за формулою

$$\rho(M,l)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

частинним випадком якої при $l\colon y=kx+m$ є формула

$$\rho(M,l)=\frac{|y_0-kx_0-m|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Відстань $d(l_1,l_2)$ між паралельними прямими $l_1\colon y=kx+m_1$ і $l_2\colon y=kx+m_2$ знаходиться за формулою

$$d(l_1,l_2)=\frac{|m_1-m_2|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Відстань від точки до прямої і відстань між паралельними прямими

Наведемо тепер формули для знаходження відстані від точки до прямої, а також відстані між паралельними прямими.

Відстань $\rho(M,l)$ від точки $M(x_0,y_0)$ до прямої $l\colon ax+by+c=0$ знаходиться за формулою

$$\rho(M,l)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

частинним випадком якої при $l\colon y=kx+m$ є формула

$$\rho(M,l)=\frac{|y_0-kx_0-m|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Відстань $d(l_1,l_2)$ між паралельними прямими $l_1\colon y=kx+m_1$ і $l_2\colon y=kx+m_2$ знаходиться за формулою

$$d(l_1,l_2)=\frac{|m_1-m_2|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Відстань від точки до прямої і відстань між паралельними прямими

Наведемо тепер формули для знаходження відстані від точки до прямої, а також відстані між паралельними прямими.

Відстань $\rho(M,l)$ від точки $M(x_0,y_0)$ до прямої $l\colon ax+by+c=0$ знаходиться за формулою

$$\rho(M,l)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

частинним випадком якої при $l\colon y=kx+m$ є формула

$$\rho(M,l)=\frac{|y_0-kx_0-m|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Відстань $d(l_1,l_2)$ між паралельними прямими $l_1\colon y=kx+m_1$ і $l_2\colon y=kx+m_2$ знаходиться за формулою

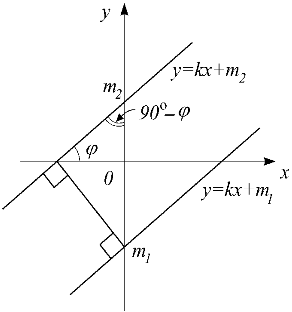
$$d(l_1,l_2)=\frac{|m_1-m_2|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Відстань між паралельними прямими

Для доведення формули

$$d(l_1,l_2)=\frac{|m_1-m_2|}{\sqrt{k^2+1}} \qquad (2)$$

позначимо через φ гострий кут, який утворюють прямі l_1 і l_2

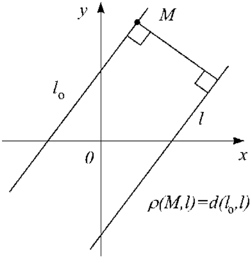


з віссю Ox. Тоді відстань між паралельними прямими l_1 і l_2 – це довжина спільного перпендикуляра до цих прямих, який є катетом, протилежним куту $90^\circ-\varphi$, в прямокутному трикутнику з гіпотенузою $|m_1-m_2|$ (див. мал.). Тому

$$d(l_1,l_2)=|m_1-m_2|\sin(90^\circ-\varphi)=$$

$$=|m_1-m_2|\cos\varphi=\frac{|m_1-m_2|}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi+1}}=\frac{|m_1-m_2|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Відстань від точки до прямої

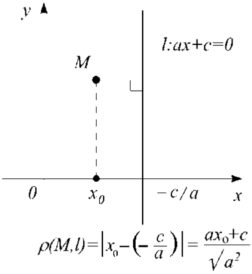


Для доведення формули

$$\rho(M,l) = \frac{|y_0 - kx_0 - m|}{\sqrt{k^2+1}} \qquad (3)$$

спочатку запишемо рівняння прямої $l_0 \parallel l$, що проходить через точку $M(x_0, y_0)$ (див. мал.): $y - y_0 = k(x - x_0) \iff y = kx + y_0 - kx_0$.

Тепер в силу рівності $\rho(M,l) = d(l_0,l)$ з формули (2) випливає формула (3).

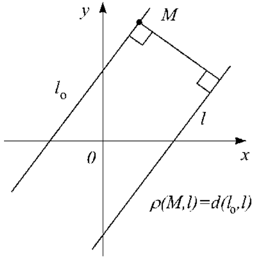


Нарешті, формула

$$\rho(M,l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (4)$$

при $b \neq 0$ рівносильна формулі (3), а при $b = 0$ істинність формули (4) легко перевіряється, оскільки в цьому випадку відстань $\rho(M,l)$ дорівнює модулю різниці між абсцисою точки M і абсцисою точок прямої l (див. мал.).

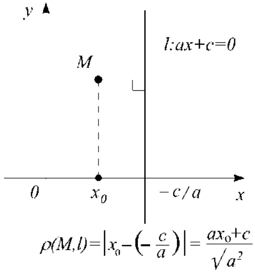
Відстань від точки до прямої



Для доведення формули

$$\rho(M,l) = \frac{|y_0 - kx_0 - m|}{\sqrt{k^2+1}} \qquad (3)$$

спочатку запишемо рівняння прямої $l_0 \parallel l$, що проходить через точку $M(x_0,y_0)$ (див. мал.): $y - y_0 = k(x - x_0) \iff y = kx + y_0 - kx_0$.
Тепер в силу рівності $\rho(M,l) = d(l_0,l)$ з формули (2) випливає формула (3).



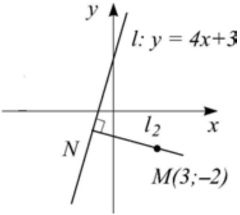
Нарешті, формула

$$\rho(M,l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (4)$$

при $b \neq 0$ рівносильна формулі (3), а при $b = 0$ істинність формули (4) легко перевіряється, оскільки в цьому випадку відстань $\rho(M,l)$ дорівнює модулю різниці між абсцисою точки M і абсцисою точок прямої l (див. мал.).

Відстань від точки до прямої

Приклад 3. Знайти відстань від точки $M(3;-2)$ до прямої l: $y=4x+3$.



Розв'язання. Шукана відстань дорівнює довжині перпендикуляра MN, проведеного з точки M до прямої l. Точку $N(-1;-1)$ знайдено в прикладі 2. Отже,

$$\rho(M,l)=MN=\sqrt{(-1-3)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{17}.$$

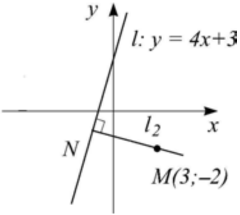
Розв'язання (2-й спосіб). Знаходимо шукану відстань за формулою (3):

$$\rho(M,l)=\frac{|-2-4\cdot 3-3|}{\sqrt{4^2+1}}=\sqrt{17}.$$

Відповідь: $\rho(M,l)=\sqrt{17}$.

Відстань від точки до прямої

Приклад 3. Знайти відстань від точки $M(3;-2)$ до прямої l: $y = 4x + 3$.



Розв'язання. Шукана відстань дорівнює довжині перпендикуляра MN, проведеного з точки M до прямої l. Точку $N(-1;-1)$ знайдено в прикладі 2. Отже,

$$\rho(M,l) = MN = \sqrt{(-1-3)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{17}.$$

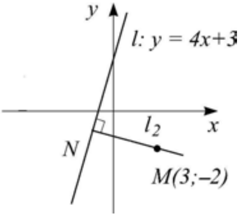
Розв'язання (2-й спосіб). Знаходимо шукану відстань за формулою (3):

$$\rho(M,l) = \frac{|-2-4\cdot 3-3|}{\sqrt{4^2+1}} = \sqrt{17}.$$

Відповідь: $\rho(M,l) = \sqrt{17}$.

Відстань від точки до прямої

Приклад 3. Знайти відстань від точки $M(3;-2)$ до прямої l: $y = 4x + 3$.



Розв'язання. Шукана відстань дорівнює довжині перпендикуляра MN, проведеного з точки M до прямої l. Точку $N(-1;-1)$ знайдено в прикладі 2. Отже,

$$\rho(M,l) = MN = \sqrt{(-1-3)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{17}.$$

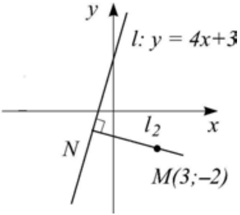
Розв'язання (2-й спосіб). Знаходимо шукану відстань за формулою (3):

$$\rho(M,l) = \frac{|-2-4\cdot 3-3|}{\sqrt{4^2+1}} = \sqrt{17}.$$

Відповідь: $\rho(M,l) = \sqrt{17}$.

Відстань від точки до прямої

Приклад 3. Знайти відстань від точки $M(3;-2)$ до прямої l: $y = 4x + 3$.



Розв'язання. Шукана відстань дорівнює довжині перпендикуляра MN, проведеного з точки M до прямої l. Точку $N(-1;-1)$ знайдено в прикладі 2. Отже,

$$\rho(M,l) = MN = \sqrt{(-1-3)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{17}\,.$$

Розв'язання (2-й спосіб). Знаходимо шукану відстань за формулою (3):

$$\rho(M,l) = \frac{|-2-4\cdot 3-3|}{\sqrt{4^2+1}} = \sqrt{17}\,.$$

Відповідь: $\rho(M,l) = \sqrt{17}$.

Рівняння кола

Рівняння кола радіуса R з центром в точці (x_0, y_0) має вигляд: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

- Відзначимо також, що рівняння $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=0$ задає в координатній площині точку $(x_0; y_0)$, а рівняння $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=c$, де $c<0$, не задає жодної геометричної фігури, оскільки $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=c<0 \Longleftrightarrow (x,y)\in\varnothing$.

Приклад 4. Знайти радіус і центр кола $x^2+y^2-6x+4y+12=0$.

Розв'язання. Виділяючи повні квадрати в лівій частині рівняння, отримуємо $x^2+y^2-6x+4y+12=0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x^2-6x+9+y^2+4y+4-9-4+12=0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=1$.

Отже, центром кола є точка $(3;-2)$, а радіус кола дорівнює 1.

Відповідь: центр – точка $(3;-2)$, радіус $R=1$.

Рівняння кола

Рівняння кола радіуса R з центром в точці (x_0, y_0) має вигляд: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

- Відзначимо також, що рівняння $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=0$ задає в координатній площині точку $(x_0;y_0)$, а рівняння $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=c$, де $c<0$, не задає жодної геометричної фігури, оскільки $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=c<0 \Longleftrightarrow (x,y)\in\varnothing$.

Приклад 4. Знайти радіус і центр кола $x^2+y^2-6x+4y+12=0$.

Розв'язання. Виділяючи повні квадрати в лівій частині рівняння, отримуємо $x^2+y^2-6x+4y+12=0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x^2-6x+9+y^2+4y+4-9-4+12=0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=1.$

Отже, центром кола є точка $(3;-2)$, а радіус кола дорівнює 1.

Відповідь: центр – точка $(3;-2)$, радіус $R=1$.

Рівняння кола

Рівняння кола радіуса R з центром в точці (x_0, y_0) має вигляд: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

- Відзначимо також, що рівняння $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=0$ задає в координатній площині точку $(x_0;y_0)$, а рівняння $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=c$, де $c<0$, не задає жодної геометричної фігури, оскільки $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=c<0 \Longleftrightarrow (x,y)\in\varnothing$.

Приклад 4. Знайти радіус і центр кола $x^2+y^2-6x+4y+12=0$.

Розв'язання. Виділяючи повні квадрати в лівій частині рівняння, отримуємо $x^2+y^2-6x+4y+12=0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x^2-6x+9+y^2+4y+4-9-4+12=0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=1.$

Отже, центром кола є точка $(3;-2)$, а радіус кола дорівнює 1.

Відповідь: центр – точка $(3;-2)$, радіус $R=1$.

Рівняння кола

Рівняння кола радіуса R з центром в точці (x_0, y_0) має вигляд: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

- Відзначимо також, що рівняння $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=0$ задає в координатній площині точку $(x_0;y_0)$, а рівняння $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=c$, де $c<0$, не задає жодної геометричної фігури, оскільки $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=c<0 \iff (x,y)\in\varnothing$.

Приклад 4. Знайти радіус і центр кола $x^2+y^2-6x+4y+12=0$.

Розв'язання. Виділяючи повні квадрати в лівій частині рівняння, отримуємо $x^2+y^2-6x+4y+12=0 \iff$
$\iff x^2-6x+9+y^2+4y+4-9-4+12=0 \iff$
$\iff (x-3)^2+(y+2)^2=1$.

Отже, центром кола є точка $(3;-2)$, а радіус кола дорівнює 1.

Відповідь: центр – точка $(3;-2)$, радіус $R=1$.

Рівняння кола

Рівняння кола радіуса R з центром в точці (x_0, y_0) має вигляд: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

- Відзначимо також, що рівняння $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=0$ задає в координатній площині точку $(x_0; y_0)$, а рівняння $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=c$, де $c<0$, не задає жодної геометричної фігури, оскільки $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=c<0 \Longleftrightarrow (x,y)\in\varnothing$.

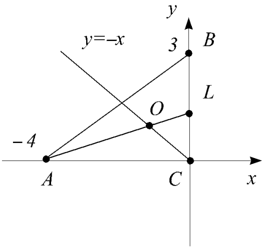
П р и к л а д 4. Знайти радіус і центр кола $x^2+y^2-6x+4y+12=0$.

Р о з в' я з а н н я. Виділяючи повні квадрати в лівій частині рівняння, отримуємо $x^2+y^2-6x+4y+12=0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x^2-6x+9+y^2+4y+4-9-4+12=0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=1.$
Отже, центром кола є точка $(3;-2)$, а радіус кола дорівнює 1.

В і д п о в і д ь: центр – точка $(3;-2)$, радіус $R=1$.

Задача

Приклад 5. Задано точки $A(-4;0)$, $B(0;3)$, $C(0;0)$. Записати рівняння бісектриси AL трикутника ABC. Знайти координати центра O кола, вписанного в трикутник ABC .



Розв'язання. Знайдемо довжини відрізків AB, BC, AC: $BC = 3$, $AC = 4$, тому $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

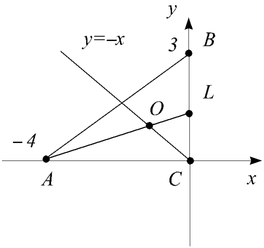
За основною властивістю бісектриси AL трикутника ABC (див. мал.) маємо: $CL : LB = AC : AB = 4 : 5$, тобто точка L ділить відрізок CB у відношенні $\lambda = 4/5$.

Тому координати точки L знаходимо за формулами

$$x_L = \frac{\lambda x_B + x_C}{\lambda + 1} = 0\,, \qquad y_L = \frac{\lambda y_B + y_C}{\lambda + 1} = \frac{\frac{4}{5}\cdot 3 + 0}{\frac{4}{5} + 1} = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{9}{5}} = \frac{4}{3}\,.$$

Задача

Приклад 5. Задано точки $A(-4;0)$, $B(0;3)$, $C(0;0)$. Записати рівняння бісектриси AL трикутника ABC. Знайти координати центра O кола, вписанного в трикутник ABC.



Розв'язання. Знайдемо довжини відрізків AB, BC, AC: $BC = 3$, $AC = 4$, тому $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

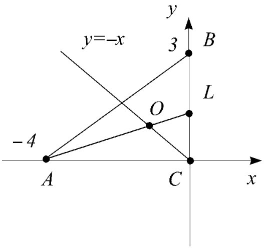
За основною властивістю бісектриси AL трикутника ABC (див. мал.) маємо: $CL : LB = AC : AB = 4 : 5$, тобто точка L ділить відрізок CB у відношенні $\lambda = 4/5$.

Тому координати точки L знаходимо за формулами

$$x_L = \frac{\lambda x_B + x_C}{\lambda + 1} = 0, \quad y_L = \frac{\lambda y_B + y_C}{\lambda + 1} = \frac{\frac{4}{5} \cdot 3 + 0}{\frac{4}{5} + 1} = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{9}{5}} = \frac{4}{3}.$$

Задача

Приклад 5. Задано точки $A(-4;0)$, $B(0;3)$, $C(0;0)$. Записати рівняння бісектриси AL трикутника ABC. Знайти координати центра O кола, вписанного в трикутник ABC.



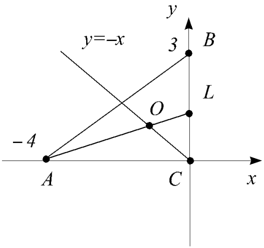
Розв'язання. Знайдемо довжини відрізків AB, BC, AC: $BC = 3$, $AC = 4$, тому $AB = \sqrt{4^2+3^2} = 5$.
За основною властивістю бісектриси AL трикутника ABC (див. мал.) маємо: $CL : LB = AC : AB = 4 : 5$, тобто точка L ділить відрізок CB у відношенні $\lambda = 4/5$.

Тому координати точки L знаходимо за формулами

$$x_L = \frac{\lambda x_B + x_C}{\lambda + 1} = 0, \quad y_L = \frac{\lambda y_B + y_C}{\lambda + 1} = \frac{\frac{4}{5}\cdot 3 + 0}{\frac{4}{5}+1} = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{9}{5}} = \frac{4}{3}.$$

Задача

Приклад 5. Задано точки $A(-4;0)$, $B(0;3)$, $C(0;0)$. Записати рівняння бісектриси AL трикутника ABC. Знайти координати центра O кола, вписанного в трикутник ABC .



Розв'язання. Знайдемо довжини відрізків AB, BC, AC: $BC = 3$, $AC = 4$, тому $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.
За основною властивістю бісектриси AL трикутника ABC (див. мал.) маємо: $CL : LB = AC : AB = 4 : 5$, тобто точка L ділить відрізок CB у відношенні $\lambda = 4/5$.

Тому координати точки L знаходимо за формулами

$$x_L = \frac{\lambda x_B + x_C}{\lambda + 1} = 0\,, \quad y_L = \frac{\lambda y_B + y_C}{\lambda + 1} = \frac{\frac{4}{5} \cdot 3 + 0}{\frac{4}{5} + 1} = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{9}{5}} = \frac{4}{3}\,.$$

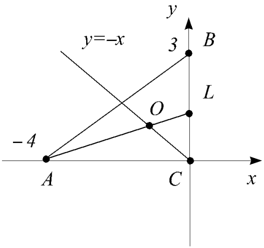
Задача

Тепер рівняння прямої AL запишемо за формулою

$$\frac{y-y_A}{y_L-y_A}=\frac{x-x_A}{x_L-x_A} \iff \frac{y-0}{\frac{4}{3}-0}=\frac{x-(-4)}{0-(-4)} \iff y=\frac{4}{3}\cdot\frac{x+4}{4} \iff$$

$$\iff y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}.$$

Оскільки центр O кола, вписанного в $\triangle ABC$, є точкою перетину бісектрис, то його



координати задовольняють систему

$$\begin{cases} y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}, \\ y=-x, \end{cases}$$

де $y=-x$ — рівняння бісектриси кута C (див. мал.).

Розв'язком системи є пара $(-1;-1)$.

Відповідь: AL: $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}$; $\quad O(-1;-1)$.

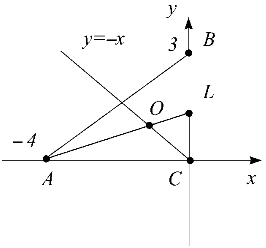
Задача

Тепер рівняння прямої AL запишемо за формулою

$$\frac{y-y_A}{y_L-y_A}=\frac{x-x_A}{x_L-x_A} \iff \frac{y-0}{\frac{4}{3}-0}=\frac{x-(-4)}{0-(-4)} \iff y=\frac{4}{3}\cdot\frac{x+4}{4} \iff$$

$$\iff y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}.$$

Оскільки центр O кола, вписанного в $\triangle ABC$, є точкою перетину бісектрис, то його



координати задовольняють систему

$$\begin{cases} y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}, \\ y=-x, \end{cases}$$

де $y=-x$ — рівняння бісектриси кута C (див. мал.).

Розв'язком системи є пара $(-1;-1)$.

Відповідь: AL: $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}$; $O(-1;-1)$.

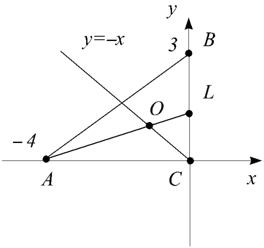
Задача

Тепер рівняння прямої AL запишемо за формулою

$$\frac{y-y_A}{y_L-y_A}=\frac{x-x_A}{x_L-x_A} \iff \frac{y-0}{\frac{4}{3}-0}=\frac{x-(-4)}{0-(-4)} \iff y=\frac{4}{3}\cdot\frac{x+4}{4} \iff$$

$$\iff y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}.$$

Оскільки центр O кола, вписанного в $\triangle ABC$, є точкою перетину бісектрис, то його



координати задовольняють систему

$$\begin{cases} y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}, \\ y=-x, \end{cases}$$

де $y=-x$ — рівняння бісектриси кута C (див. мал.).

Розв'язком системи є пара $(-1;-1)$.

Відповідь: AL: $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}$; $O(-1;-1)$.

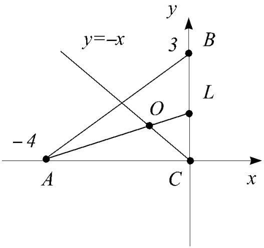
Задача

Тепер рівняння прямої AL запишемо за формулою

$$\frac{y-y_A}{y_L-y_A}=\frac{x-x_A}{x_L-x_A} \iff \frac{y-0}{\frac{4}{3}-0}=\frac{x-(-4)}{0-(-4)} \iff y=\frac{4}{3}\cdot\frac{x+4}{4} \iff$$

$$\iff y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}.$$

Оскільки центр O кола, вписанного в $\triangle ABC$, є точкою перетину бісектрис, то його



координати задовольняють систему

$$\begin{cases} y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}, \\ y=-x, \end{cases}$$

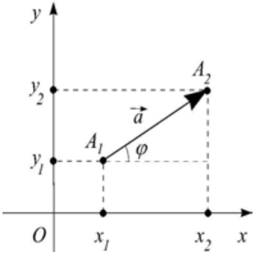
де $y=-x$ — рівняння бісектриси кута C (див. мал.).

Розв'язком системи є пара $(-1;-1)$.

В і д п о в і д ь: AL: $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}$; $O(-1;-1)$.

Елементи векторної алгебри на площині

Вектором $\vec{a}$ називається напрямлений відрізок, що сполучає точки A_1 і A_2, при цьому точка A_1 називається початком, а точка A_2 – кінцем цього вектора. Довжина відрізка A_1A_2 називається модулем вектора $\vec{a}$ і позначається $|\vec{a}|$ або a.

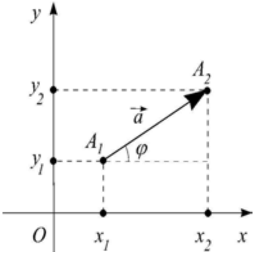


Напрямок вектора $\vec{a}$ визначається напрямним кутом φ, який напрямлений відрізок A_1A_2 утворює з додатнім напрямком осі Ox (див. мал.).

- Вектори називаються рівними, якщо вони мають рівні довжини і один і той самий напрямний кут.

Елементи векторної алгебри на площині

Вектором $\vec{a}$ називається напрямлений відрізок, що сполучає точки A_1 і A_2, при цьому точка A_1 називається початком, а точка A_2 – кінцем цього вектора. Довжина відрізка A_1A_2 називається модулем вектора $\vec{a}$ і позначається $|\vec{a}|$ або a.

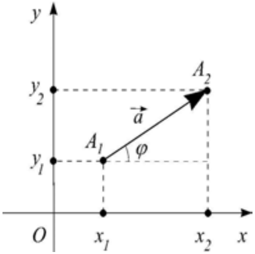


Напрямок вектора $\vec{a}$ визначається напрямним кутом φ, який напрямлений відрізок A_1A_2 утворює з додатнім напрямком осі Ox (див. мал.).

- Вектори називаються рівними, якщо вони мають рівні довжини і один і той самий напрямний кут.

Елементи векторної алгебри на площині

Вектором $\vec{a}$ називається напрямлений відрізок, що сполучає точки A_1 і A_2, при цьому точка A_1 називається початком, а точка A_2 – кінцем цього вектора. Довжина відрізка A_1A_2 називається модулем вектора $\vec{a}$ і позначається $|\vec{a}|$ або a.

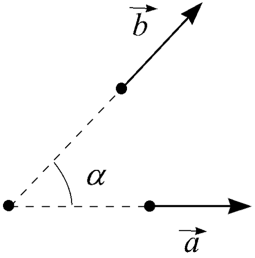


Напрямок вектора $\vec{a}$ визначається напрямним кутом φ, який напрямлений відрізок A_1A_2 утворює з додатнім напрямком осі Ox (див. мал.).

- Вектори називаються рівними, якщо вони мають рівні довжини і один і той самий напрямний кут.

Кут між векторами

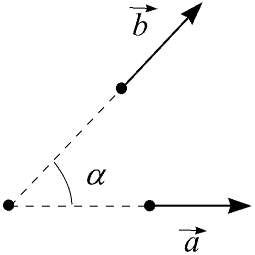
Кутом між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається найменший кут повороту α вектора $\vec{a}$ до його збігу з напрямком вектора $\vec{b}$ (див. мал.).



При цьому проекцією вектора $\vec{a}$ на напрямок вектора $\vec{b}$ називається число $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = a\cos\alpha$.

Кут між векторами

Кутом між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається найменший кут повороту α вектора $\vec{a}$ до його збігу з напрямком вектора $\vec{b}$ (див. мал.).

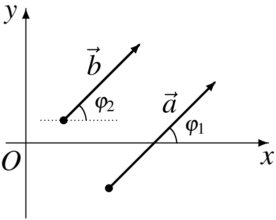


При цьому проекцією вектора $\vec{a}$ на напрямок вектора $\vec{b}$ називається число $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = a\cos\alpha$.

Кут між векторами

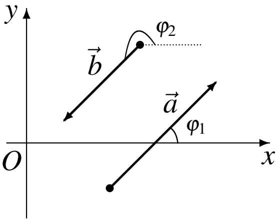
Нехай вектор $\vec{a}$ має напрямний кут φ_1, а вектор $\vec{b}$ – напрямний кут φ_2.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають однаково напрямленими, якщо $\varphi_1 = \varphi_2$, і протилежно напрямленими у випадку, коли $|\varphi_1 - \varphi_2| = \pi$.



$\varphi_1 = \varphi_2$

однаково напрямлені
(кут між $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 0)



$|\varphi_1 - \varphi_2| = \pi$

протилежно напрямлені
(кут між $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює π)

Множення вектора на скаляр

Векторна алгебра вивчає операції з векторами.

Означимо операцію множення вектора $\vec{a}$ на дійсне число λ.

- При $\lambda > 0$ добутком $\lambda\vec{a}$ є вектор, однаково напрямлений з вектором $\vec{a}$ і такий, що його довжина дорівнює λa.

- При $\lambda < 0$ добутком $\lambda\vec{a}$ є вектор, протилежно напрямлений з вектором $\vec{a}$ і такий, що його довжина дорівнює $|\lambda|a$.

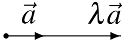
- При $\lambda = 0$ добутком $0\vec{a}$ є вектор нульової довжини, який називають нульовим вектором і позначають $\vec{0}$.

Множення вектора на скаляр

Векторна алгебра вивчає операції з векторами.

Означимо операцію множення вектора $\vec{a}$ на дійсне число λ.

- При $\lambda > 0$ добутком $\lambda\vec{a}$ є вектор, однаково напрямлений з вектором $\vec{a}$ і такий, що його довжина дорівнює λa.



- При $\lambda < 0$ добутком $\lambda\vec{a}$ є вектор, протилежно напрямлений з вектором $\vec{a}$ і такий, що його довжина дорівнює $|\lambda|a$.

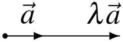
- При $\lambda = 0$ добутком $0\vec{a}$ є вектор нульової довжини, який називають нульовим вектором і позначають $\vec{0}$.

Множення вектора на скаляр

Векторна алгебра вивчає операції з векторами.

Означимо операцію множення вектора $\vec{a}$ на дійсне число λ.

- При $\lambda > 0$ добутком $\lambda\vec{a}$ є вектор, однаково напрямлений з вектором $\vec{a}$ і такий, що його довжина дорівнює λa.



- При $\lambda < 0$ добутком $\lambda\vec{a}$ є вектор, протилежно напрямлений з вектором $\vec{a}$ і такий, що його довжина дорівнює $|\lambda|a$.

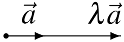
- При $\lambda = 0$ добутком $0\vec{a}$ є вектор нульової довжини, який називають нульовим вектором і позначають $\vec{0}$.

Множення вектора на скаляр

Векторна алгебра вивчає операції з векторами.

Означимо операцію множення вектора $\vec{a}$ на дійсне число λ.

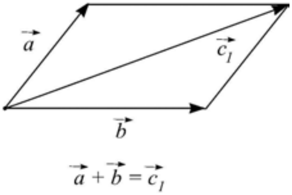
- При $\lambda > 0$ добутком $\lambda\vec{a}$ є вектор, однаково напрямлений з вектором $\vec{a}$ і такий, що його довжина дорівнює λa.



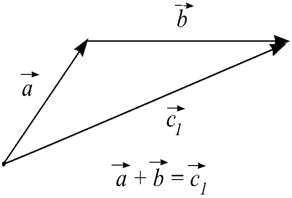
- При $\lambda < 0$ добутком $\lambda\vec{a}$ є вектор, протилежно напрямлений з вектором $\vec{a}$ і такий, що його довжина дорівнює $|\lambda|a$.

- При $\lambda = 0$ добутком $0\vec{a}$ є вектор нульової довжини, який називають нульовим вектором і позначають $\vec{0}$.

Сума векторів

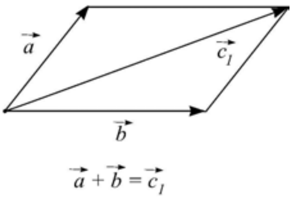


Для знаходження суми векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ зі спільним початком застосовують правило паралелограма: їх сумою називається векторна діагональ $\vec{c}_1$ паралелограма, побудованого на цих векторах (див. мал.).

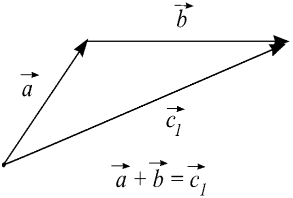


Для векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, розміщених послідовно (тобто так, що кінець вектора $\vec{a}$ є початком вектора $\vec{b}$), сума $\vec{c}_1 = \vec{a} + \vec{b}$ знаходиться за допомогою правила трикутника: початком вектора $\vec{c}_1$ є початок вектора $\vec{a}$, а кінцем вектора $\vec{c}_1$ – кінець вектора $\vec{b}$ (див. мал.).

Сума векторів

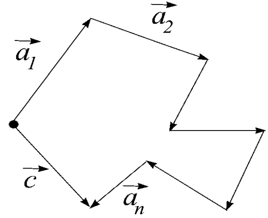


Для знаходження суми векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ зі спільним початком застосовують правило паралелограма: їх сумою називається векторна діагональ $\vec{c}_1$ паралелограма, побудованого на цих векторах (див. мал.).



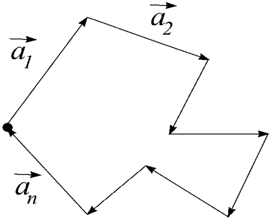
Для векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, розміщених послідовно (тобто так, що кінець вектора $\vec{a}$ є початком вектора $\vec{b}$), сума $\vec{c}_1 = \vec{a}+\vec{b}$ знаходиться за допомогою правила трикутника: початком вектора $\vec{c}_1$ є початок вектора $\vec{a}$, а кінцем вектора $\vec{c}_1$ – кінець вектора $\vec{b}$ (див. мал.).

Сума векторів



$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n = \vec{c}$$

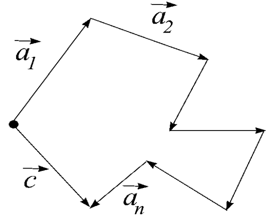
Для довільного числа векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, розміщених ланцюжком, сумою $\vec{c} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_n$ є вектор $\vec{c}$, який з'єднує початок вектора $\vec{a}_1$ і кінець вектора $\vec{a}_n$ (див. мал.).



$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n = \vec{0}$$

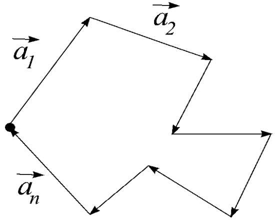
Сума замкненого ланцюжка векторів дорівнює нульовому вектору (див. мал.).

Сума векторів



$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n = \vec{c}$$

Для довільного числа векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, розміщених ланцюжком, сумою $\vec{c} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_n$ є вектор $\vec{c}$, який з'єднує початок вектора $\vec{a}_1$ і кінець вектора $\vec{a}_n$ (див. мал.).

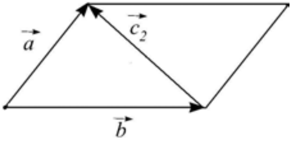


$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n = \vec{0}$$

Сума замкненого ланцюжка векторів дорівнює нульовому вектору (див. мал.).

Різниця векторів

Різницею $\vec{a}-\vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}_2$ такий, що $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}_2$.

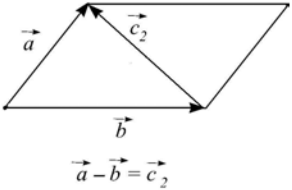


$\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}_2$

Для векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ зі спільним початком різницею $\vec{c}_2=\vec{a}-\vec{b}$ є векторна діагональ $\vec{c}_2$ паралелограма, яка з'єднує кінець вектора $\vec{b}$ і кінець вектора $\vec{a}$ (див. мал.).

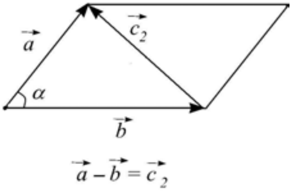
Різниця векторів

Різницею $\vec{a}-\vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}_2$ такий, що $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}_2$.

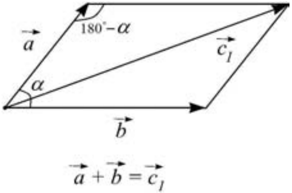


Для векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ зі спільним початком різницею $\vec{c}_2 = \vec{a} - \vec{b}$ є векторна діагональ $\vec{c}_2$ паралелограма, яка з'єднує кінець вектора $\vec{b}$ і кінець вектора $\vec{a}$ (див. мал.).

Модулі суми і різниці векторів

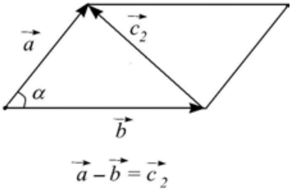


Довжина векторної діагоналі $\vec{c}_2$ є модулем різниці векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і знаходиться за теоремою косинусів:
$c_2 = |\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$,
де α – кут між $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

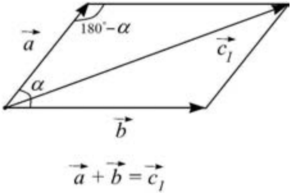


Аналогічно модулем суми векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є довжина іншої діагоналі паралелограма, побудованого на цих векторах, яка знаходиться за формулою
$c_1 = |\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$,
де α – кут між $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Модулі суми і різниці векторів



Довжина векторної діагоналі $\vec{c}_2$ є модулем різниці векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і знаходиться за теоремою косинусів: $c_2 = |\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$, де α – кут між $\vec{a}$ і $\vec{b}$.



Аналогічно модулем суми векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є довжина іншої діагоналі паралелограма, побудованого на цих векторах, яка знаходиться за формулою $c_1 = |\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$, де α – кут між $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

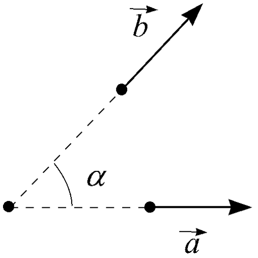
Властивості операцій додавання векторів і множення вектора на скаляр

Операції суми (різниці) векторів і множення вектора на число володіють наступними властивостями:

$$
\boxed{\begin{gathered}
\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}, \\
(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}), \\
\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}, \\
\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}, \\
\vec{a}m=m\vec{a}, \\
m(n\vec{a})=(mn)\vec{a}, \\
m\vec{a}+n\vec{a}=(m+n)\vec{a}, \\
m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}, \\
0\vec{a}=\vec{0}, \\
1\vec{a}=\vec{a}, \\
\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-1)\vec{b}.
\end{gathered}}
$$

Скалярний добуток векторів

Розглянемо операцію скалярного добутку векторів.



Скалярним добутком $\vec{a}\cdot\vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число (скаляр), яке визначається рівністю
$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\alpha$,
де α – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

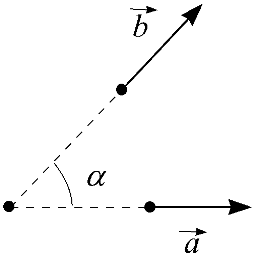
Зокрема, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні ($\vec{a}\perp\vec{b}$), то $\alpha = \pi/2$ і $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

Операція скалярного добутку має наступні властивості:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}, \qquad \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c},$$
$$(m\vec{a})\cdot(n\vec{b}) = mn(\vec{a}\cdot\vec{b}), \qquad \vec{a}\cdot\vec{a} = a^2 .$$

Скалярний добуток векторів

Розглянемо операцію скалярного добутку векторів.



Скалярним добутком $\vec{a}\cdot\vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число (скаляр), яке визначається рівністю
$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\alpha$,
де α – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

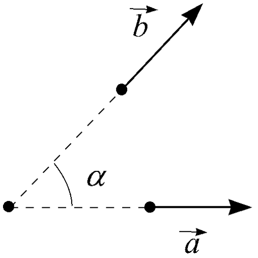
Зокрема, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні ($\vec{a}\perp\vec{b}$), то $\alpha=\pi/2$ і $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Операція скалярного добутку має наступні властивості:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}, \qquad \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c},$$
$$(m\vec{a})\cdot(n\vec{b})=mn(\vec{a}\cdot\vec{b}), \qquad \vec{a}\cdot\vec{a}=a^2 .$$

Скалярний добуток векторів

Розглянемо операцію скалярного добутку векторів.



Скалярним добутком $\vec{a}\cdot\vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число (скаляр), яке визначається рівністю $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\alpha$, де α – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Зокрема, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні ($\vec{a}\perp\vec{b}$), то $\alpha = \pi/2$ і $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

Операція скалярного добутку має наступні властивості:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}, \qquad \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c},$$
$$(m\vec{a})\cdot(n\vec{b}) = mn(\vec{a}\cdot\vec{b}), \qquad \vec{a}\cdot\vec{a} = a^2 .$$

Приклад

Приклад 6. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 120°, а їх модулі $a = 2$ і $b = 1$. Знайти:

а) скалярний добуток векторів $\vec{a} + 2\vec{b}$ і $\vec{b} - \vec{a}$;

б) кут між векторами $\vec{a} + 2\vec{b}$ і $\vec{b} - \vec{a}$;

в) проекцію вектора $\vec{b} - \vec{a}$ на напрямок вектора $\vec{a} + 2\vec{b}$.

Розв'язання. а) Використовуючи властивості і означення скалярного добутку, отримуємо

$$(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{a} = 2b^2 - a^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} =$$
$$= 2 \cdot 1^2 - 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot \cos 120° = 2 - 4 - 2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) = -1 .$$

б) За означенням скалярного добутку

$$(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = |\vec{a} + 2\vec{b}| \cdot |\vec{b} - \vec{a}| \cos \varphi ,$$

де φ – кут між векторами $\vec{a} + 2\vec{b}$ і $\vec{b} - \vec{a}$. Тому

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})}{|\vec{a} + 2\vec{b}| \cdot |\vec{b} - \vec{a}|} .$$

Приклад

Приклад 6. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $120°$, а їх модулі $a = 2$ і $b = 1$. Знайти:

а) скалярний добуток векторів $\vec{a} + 2\vec{b}$ і $\vec{b} - \vec{a}$;

б) кут між векторами $\vec{a} + 2\vec{b}$ і $\vec{b} - \vec{a}$;

в) проекцію вектора $\vec{b} - \vec{a}$ на напрямок вектора $\vec{a} + 2\vec{b}$.

Розв'язання. а) Використовуючи властивості і означення скалярного добутку, отримуємо

$$(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{a} = 2b^2 - a^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} =$$
$$= 2 \cdot 1^2 - 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot \cos 120° = 2 - 4 - 2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) = -1 .$$

б) За означенням скалярного добутку

$$(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = |\vec{a} + 2\vec{b}| \cdot |\vec{b} - \vec{a}| \cos \varphi ,$$

де φ – кут між векторами $\vec{a} + 2\vec{b}$ і $\vec{b} - \vec{a}$. Тому

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})}{|\vec{a} + 2\vec{b}| \cdot |\vec{b} - \vec{a}|} .$$

Приклад

Приклад 6. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 120°, а їх модулі $a=2$ і $b=1$. Знайти:

а) скалярний добуток векторів $\vec{a}+2\vec{b}$ і $\vec{b}-\vec{a}$;

б) кут між векторами $\vec{a}+2\vec{b}$ і $\vec{b}-\vec{a}$;

в) проекцію вектора $\vec{b}-\vec{a}$ на напрямок вектора $\vec{a}+2\vec{b}$.

Розв'язання. а) Використовуючи властивості і означення скалярного добутку, отримуємо

$$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = \vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{b}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{a} = 2b^2-a^2-\vec{a}\cdot\vec{b} =$$
$$= 2\cdot 1^2-2^2-2\cdot 1\cdot\cos 120^\circ = 2-4-2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) = -1\,.$$

б) За означенням скалярного добутку

$$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = |\vec{a}+2\vec{b}|\cdot|\vec{b}-\vec{a}|\cos\varphi\,,$$

де φ – кут між векторами $\vec{a}+2\vec{b}$ і $\vec{b}-\vec{a}$. Тому

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a})}{|\vec{a}+2\vec{b}|\cdot|\vec{b}-\vec{a}|}\,.$$

Приклад

Обчислимо $|\vec{a}+2\vec{b}|$ і $|\vec{b}-\vec{a}|$ (див. сторінку "Модулі суми і різниці векторів"):

$|\vec{a}+2\vec{b}| = \sqrt{a^2+(2b)^2+2a(2b)\cos 120^\circ} =$
$= \sqrt{2^2+2^2+2\cdot 2\cdot 2\cos 120^\circ} = 2;$

$|\vec{b}-\vec{a}| = \sqrt{b^2+a^2-2ba\cos 120^\circ} =$
$= \sqrt{1^2+2^2-2\cdot 1\cdot 2\cos 120^\circ} = \sqrt{7}.$

Тепер, використовуючи також обчислене вище значення скалярного добутку $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = -1$, знаходимо косинус кута φ між векторами $\vec{a}+2\vec{b}$ і $\vec{b}-\vec{a}$:

$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a})}{|\vec{a}+2\vec{b}|\cdot|\vec{b}-\vec{a}|} = \frac{-1}{2\sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{7}}{14}.$

Звідси випливає, що $\varphi = \arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{7}}{14}.$

в) Нарешті, отримуємо

$\text{Пр}_{\vec{a}+2\vec{b}}(\vec{b}-\vec{a}) = |\vec{b}-\vec{a}|\cos\varphi = \sqrt{7}\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right) = -1/2.$

Відповідь: а) -1; б) $\pi - \arccos\frac{\sqrt{7}}{14}$; в) $-1/2$.

Приклад

Обчислимо $|\vec{a}+2\vec{b}|$ і $|\vec{b}-\vec{a}|$ (див. сторінку "Модулі суми і різниці векторів"):

$|\vec{a}+2\vec{b}| = \sqrt{a^2+(2b)^2+2a(2b)\cos 120^\circ} =$
$= \sqrt{2^2+2^2+2\cdot 2\cdot 2\cos 120^\circ} = 2;$
$|\vec{b}-\vec{a}| = \sqrt{b^2+a^2-2ba\cos 120^\circ} =$
$= \sqrt{1^2+2^2-2\cdot 1\cdot 2\cos 120^\circ} = \sqrt{7}.$

Тепер, використовуючи також обчислене вище значення скалярного добутку $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = -1$, знаходимо косинус кута φ між векторами $\vec{a}+2\vec{b}$ і $\vec{b}-\vec{a}$:

$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a})}{|\vec{a}+2\vec{b}|\cdot|\vec{b}-\vec{a}|} = \frac{-1}{2\sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{7}}{14}.$

Звідси випливає, що $\varphi = \arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{7}}{14}.$

в) Нарешті, отримуємо

$\text{Пр}_{\vec{a}+2\vec{b}}(\vec{b}-\vec{a}) = |\vec{b}-\vec{a}|\cos\varphi = \sqrt{7}\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right) = -1/2.$

Відповідь: а) -1; б) $\pi-\arccos\frac{\sqrt{7}}{14}$; в) $-1/2$.

Приклад

Обчислимо $|\vec{a}+2\vec{b}|$ і $|\vec{b}-\vec{a}|$ (див. сторінку "Модулі суми і різниці векторів"):

$|\vec{a}+2\vec{b}| = \sqrt{a^2+(2b)^2+2a(2b)\cos 120^\circ} =$

$= \sqrt{2^2+2^2+2\cdot 2\cdot 2\cos 120^\circ} = 2;$

$|\vec{b}-\vec{a}| = \sqrt{b^2+a^2-2ba\cos 120^\circ} =$

$= \sqrt{1^2+2^2-2\cdot 1\cdot 2\cos 120^\circ} = \sqrt{7}.$

Тепер, використовуючи також обчислене вище значення скалярного добутку $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = -1$, знаходимо косинус кута φ між векторами $\vec{a}+2\vec{b}$ і $\vec{b}-\vec{a}$:

$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a})}{|\vec{a}+2\vec{b}|\cdot|\vec{b}-\vec{a}|} = \frac{-1}{2\sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{7}}{14}.$

Звідси випливає, що $\varphi = \arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{7}}{14}.$

в) Нарешті, отримуємо

$\text{Пр}_{\vec{a}+2\vec{b}}(\vec{b}-\vec{a}) = |\vec{b}-\vec{a}|\cos\varphi = \sqrt{7}\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right) = -1/2.$

Відповідь: а) -1; б) $\pi - \arccos\frac{\sqrt{7}}{14}$; в) $-1/2$.

Приклад

Обчислимо $|\vec{a}+2\vec{b}|$ і $|\vec{b}-\vec{a}|$ (див. сторінку "Модулі суми і різниці векторів"):

$|\vec{a}+2\vec{b}| = \sqrt{a^2+(2b)^2+2a(2b)\cos 120^\circ} =$
$= \sqrt{2^2+2^2+2\cdot 2\cdot 2\cos 120^\circ} = 2;$
$|\vec{b}-\vec{a}| = \sqrt{b^2+a^2-2ba\cos 120^\circ} =$
$= \sqrt{1^2+2^2-2\cdot 1\cdot 2\cos 120^\circ} = \sqrt{7}.$

Тепер, використовуючи також обчислене вище значення скалярного добутку $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = -1$, знаходимо косинус кута φ між векторами $\vec{a}+2\vec{b}$ і $\vec{b}-\vec{a}$:

$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a})}{|\vec{a}+2\vec{b}|\cdot|\vec{b}-\vec{a}|} = \frac{-1}{2\sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{7}}{14}.$

Звідси випливає, що $\varphi = \arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{7}}{14}.$

в) Нарешті, отримуємо

$\text{Пр}_{\vec{a}+2\vec{b}}(\vec{b}-\vec{a}) = |\vec{b}-\vec{a}|\cos\varphi = \sqrt{7}\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right) = -1/2.$

Відповідь: а) -1; б) $\pi-\arccos\frac{\sqrt{7}}{14}$; в) $-1/2$.

Приклад

Обчислимо $|\vec{a}+2\vec{b}|$ і $|\vec{b}-\vec{a}|$ (див. сторінку "Модулі суми і різниці векторів"):

$|\vec{a}+2\vec{b}| = \sqrt{a^2+(2b)^2+2a(2b)\cos 120^\circ} =$
$= \sqrt{2^2+2^2+2\cdot 2\cdot 2\cos 120^\circ} = 2;$
$|\vec{b}-\vec{a}| = \sqrt{b^2+a^2-2ba\cos 120^\circ} =$
$= \sqrt{1^2+2^2-2\cdot 1\cdot 2\cos 120^\circ} = \sqrt{7}.$

Тепер, використовуючи також обчислене вище значення скалярного добутку $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = -1$, знаходимо косинус кута φ між векторами $\vec{a}+2\vec{b}$ і $\vec{b}-\vec{a}$:

$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a})}{|\vec{a}+2\vec{b}|\cdot|\vec{b}-\vec{a}|} = \frac{-1}{2\sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{7}}{14}.$

Звідси випливає, що $\varphi = \arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{7}}{14}.$

в) Нарешті, отримуємо

$\text{Пр}_{\vec{a}+2\vec{b}}(\vec{b}-\vec{a}) = |\vec{b}-\vec{a}|\cos\varphi = \sqrt{7}\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right) = -1/2.$

Відповідь: а) -1; б) $\pi-\arccos\frac{\sqrt{7}}{14}$; в) $-1/2$.

Одиничні вектори (орти)

Вектор $\vec{e}$ з одиничним модулем $|\vec{e}|=1$ називається одиничним вектором або ортом.

Одиничний вектор $\vec{e}=\frac{\vec{a}}{a}$ при $a\neq 0$ визначає напрямок вектора $\vec{a}$.

Будь-який вектор $\vec{a}$ може бути представлений за допомогою орта $\vec{e}$ власного напрямку у вигляді $\vec{a}=a\vec{e}$.

Через $\vec{e}_x$ і $\vec{e}_y$ позначимо орти додатніх напрямків координатних осей Ox і Oy відповідно (див. мал.).

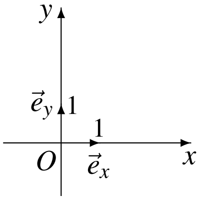
Часто використовуються також і такі позначення: $\vec{i}\equiv\vec{e}_x$ і $\vec{j}\equiv\vec{e}_y$.

Одиничні вектори (орти)

Вектор $\vec{e}$ з одиничним модулем $|\vec{e}| = 1$ називається одиничним вектором або ортом.

Одиничний вектор $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{a}$ при $a \neq 0$ визначає напрямок вектора $\vec{a}$.

Будь-який вектор $\vec{a}$ може бути представлений за допомогою орта $\vec{e}$ власного напрямку у вигляді $\vec{a} = a\vec{e}$.



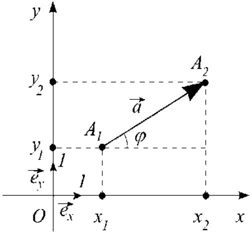
Через $\vec{e}_x$ і $\vec{e}_y$ позначимо орти додатніх напрямків координатних осей Ox і Oy відповідно (див. мал.).

Часто використовуються також і такі позначення: $\vec{i} \equiv \vec{e}_x$ і $\vec{j} \equiv \vec{e}_y$.

Координати вектора

Проекції вектора $\vec{a}$ на осі Ox і Oy позначимо через a_x і a_y відповідно. Вони виражаються рівностями

$a_x = a\cos\varphi = x_2 - x_1, \quad a_y = a\sin\varphi = y_2 - y_1$



і називаються також координатами вектора $\vec{a}$.

Тут φ – напрямний кут, $A_1(x_1, y_1)$ – початок і $A_2(x_2, y_2)$ – кінець вектора $\vec{a}$ (див. мал.).

- Будь-який вектор $\vec{a}$ подається у вигляді суми $\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y$, де a_x и a_y – координати вектора $\vec{a}$.

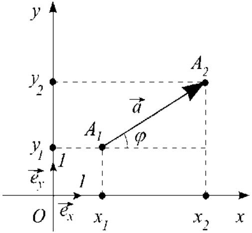
Використовуються також записи вектора $\vec{a} = (a_x, a_y)$ або $\vec{a}(a_x, a_y)$ з зазначенням його координат. Нульовий вектор має нульові координати, тобто $\vec{0} = (0;0)$.

Очевидно, що рівні вектори мають рівні відповідні координати.

Координати вектора

Проекції вектора $\vec{a}$ на осі Ox і Oy позначимо через a_x і a_y відповідно. Вони виражаються рівностями

$a_x = a\cos\varphi = x_2 - x_1, \quad a_y = a\sin\varphi = y_2 - y_1$



і називаються також координатами вектора $\vec{a}$.

Тут φ – напрямний кут, $A_1(x_1, y_1)$ – початок і $A_2(x_2, y_2)$ – кінець вектора $\vec{a}$ (див. мал.).

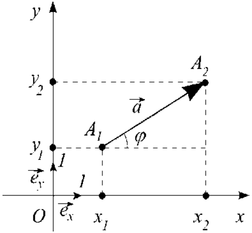
- Будь-який вектор $\vec{a}$ подається у вигляді суми $\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y$, де a_x и a_y – координати вектора $\vec{a}$.

Використовуються також записи вектора $\vec{a} = (a_x, a_y)$ або $\vec{a}(a_x, a_y)$ з зазначенням його координат. Нульовий вектор має нульові координати, тобто $\vec{0} = (0;0)$.

Очевидно, що рівні вектори мають рівні відповідні координати.

Координати вектора

Проекції вектора $\vec{a}$ на осі Ox і Oy позначимо через a_x і a_y відповідно. Вони виражаються рівностями
$a_x = a\cos\varphi = x_2 - x_1, \quad a_y = a\sin\varphi = y_2 - y_1$

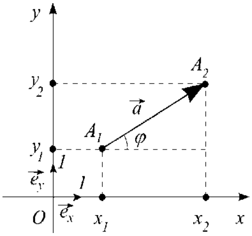


і називаються також координатами вектора $\vec{a}$.
Тут φ – напрямний кут, $A_1(x_1,y_1)$ – початок і $A_2(x_2,y_2)$ – кінець вектора $\vec{a}$ (див. мал.).

- Будь-який вектор $\vec{a}$ подається у вигляді суми $\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y$, де a_x и a_y – координати вектора $\vec{a}$.

Використовуються також записи вектора $\vec{a} = (a_x, a_y)$ або $\vec{a}(a_x, a_y)$ з зазначенням його координат. Нульовий вектор має нульові координати, тобто $\vec{0} = (0;0)$.
Очевидно, що рівні вектори мають рівні відповідні координати.

Модуль вектора и напрямний кут в координатах



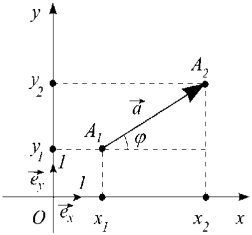
Координати a_x і a_y ненульового вектора $\vec{a}$ визначають його модуль $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ і напрямний кут φ, який в загальному випадку є розв'язком системи

$$\begin{cases} \sin\varphi = a_y/a, \\ \cos\varphi = a_x/a. \end{cases}$$

Наслідком цієї системи при $a_x \neq 0$ є рівність $\operatorname{tg}\varphi = a_y/a_x$, а напрямний кут φ виражається співвідношеннями

$$\varphi = \left[\begin{array}{ll} \operatorname{arctg}\dfrac{a_y}{a_x} & \text{при } a_x > 0, \\ \pi/2 & \text{при } a_x = 0 \text{ и } a_y > 0, \\ -\pi/2 & \text{при } a_x = 0 \text{ и } a_y < 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{a_y}{a_x} & \text{при } a_x < 0. \end{array} \right.$$

Модуль вектора и напрямний кут в координатах



Координати a_x і a_y ненульового вектора $\vec{a}$ визначають його модуль $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ і напрямний кут φ, який в загальному випадку є розв'язком системи

$$\begin{cases} \sin\varphi = a_y/a, \\ \cos\varphi = a_x/a. \end{cases}$$

Наслідком цієї системи при $a_x \neq 0$ є рівність $\operatorname{tg}\varphi = a_y/a_x$, а напрямний кут φ виражається співвідношеннями

$$\varphi = \left[\begin{array}{ll} \operatorname{arctg}\dfrac{a_y}{a_x} & \text{при } a_x > 0, \\ \pi/2 & \text{при } a_x = 0 \text{ и } a_y > 0, \\ -\pi/2 & \text{при } a_x = 0 \text{ и } a_y < 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{a_y}{a_x} & \text{при } a_x < 0. \end{array}\right.$$

Сума (різниця) векторів і добуток вектора на скаляр в координатах

Координати суми (або різниці) векторів $\vec{a} = (a_x, a_y)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y)$ виражаються через координати цих векторів:

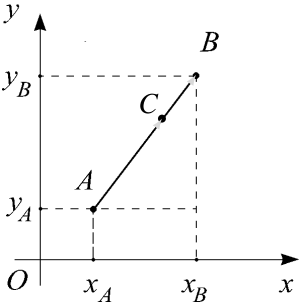
$$\boxed{\vec{a}+\vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y)\,, \qquad \vec{a}-\vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y)\,.}$$

При множенні вектора $\vec{a} = (a_x, a_y)$ на число λ отримуємо вектор

$$\boxed{\lambda\vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y)\,.}$$

Операції з векторами в координатах

Приклад 7. Знайти координати точки C відрізка AB, для якої $\frac{AC}{CB} = \lambda$, якщо $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$.



Розв'язання. Запишемо спочатку вирази $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AB}$ через $\overrightarrow{CB}$. Оскільки вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{CB}$ є однаково напрямленими і за умовою $AC = \lambda \cdot CB$, то $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB}$.

Тепер справедливі рівності $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} =$ $= (\lambda + 1)\overrightarrow{CB}$.

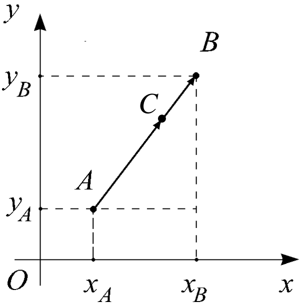
Із записаних виразів випливають співвідношення $\overrightarrow{CB} = \frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}$.

Запишем рівності відповідних координат векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}$, тобто

$x_C - x_A = \frac{\lambda}{\lambda+1}(x_B - x_A)$ і $y_C - y_A = \frac{\lambda}{\lambda+1}(y_B - y_A)$.

Операції з векторами в координатах

Приклад 7. Знайти координати точки C відрізка AB, для якої $\frac{AC}{CB} = \lambda$, якщо $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$.



Розв'язання. Запишемо спочатку вирази $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AB}$ через $\overrightarrow{CB}$. Оскільки вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{CB}$ є однаково напрямленими і за умовою $AC = \lambda \cdot CB$, то $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB}$.

Тепер справедливі рівності $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} = (\lambda + 1)\overrightarrow{CB}$.

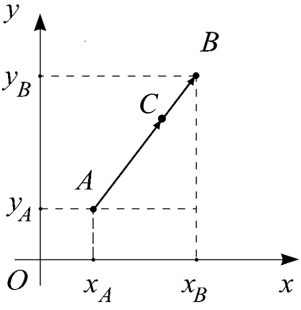
Із записаних виразів випливають співвідношення $\overrightarrow{CB} = \frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}$.

Запишем рівності відповідних координат векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}$, тобто

$x_C - x_A = \frac{\lambda}{\lambda+1}(x_B - x_A)$ і $y_C - y_A = \frac{\lambda}{\lambda+1}(y_B - y_A)$.

Операції з векторами в координатах

Приклад 7. Знайти координати точки C відрізка AB, для якої $\frac{AC}{CB} = \lambda$, якщо $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$.



Розв'язання. Запишемо спочатку вирази $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AB}$ через $\overrightarrow{CB}$. Оскільки вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{CB}$ є однаково напрямленими і за умовою $AC = \lambda \cdot CB$, то $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB}$.

Тепер справедливі рівності $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} = (\lambda + 1)\overrightarrow{CB}$.

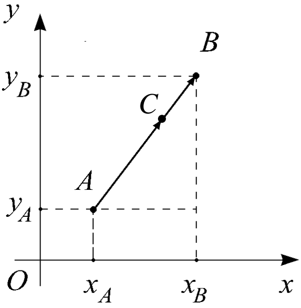
Із записаних виразів випливають співвідношення $\overrightarrow{CB} = \frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}$.

Запишем рівності відповідних координат векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}$, тобто

$x_C - x_A = \frac{\lambda}{\lambda+1}(x_B - x_A)$ і $y_C - y_A = \frac{\lambda}{\lambda+1}(y_B - y_A)$.

Операції з векторами в координатах

Приклад 7. Знайти координати точки C відрізка AB, для якої $\frac{AC}{CB} = \lambda$, якщо $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$.



Розв'язання. Запишемо спочатку вирази $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AB}$ через $\overrightarrow{CB}$. Оскільки вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{CB}$ є однаково напрямленими і за умовою $AC = \lambda \cdot CB$, то $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB}$.

Тепер справедливі рівності $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} = (\lambda + 1)\overrightarrow{CB}$.

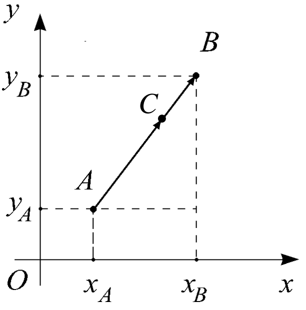
Із записаних виразів випливають співвідношення $\overrightarrow{CB} = \frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}$.

Запишем рівності відповідних координат векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}$, тобто

$x_C - x_A = \frac{\lambda}{\lambda+1}(x_B - x_A)$ і $y_C - y_A = \frac{\lambda}{\lambda+1}(y_B - y_A)$.

Операції з векторами в координатах

П р и к л а д 7. Знайти координати точки C відрізка AB, для якої $\frac{AC}{CB} = \lambda$, якщо $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$.



Р о з в' я з а н н я. Запишемо спочатку вирази $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AB}$ через $\overrightarrow{CB}$. Оскільки вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{CB}$ є однаково напрямленими і за умовою $AC = \lambda \cdot CB$, то $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB}$.

Тепер справедливі рівності $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} = = (\lambda + 1)\overrightarrow{CB}$.

Із записаних виразів випливають співвідношення $\overrightarrow{CB} = \frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}$.

Запишем рівності відповідних координат векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}$, тобто

$x_C - x_A = \frac{\lambda}{\lambda+1}(x_B - x_A)$ і $y_C - y_A = \frac{\lambda}{\lambda+1}(y_B - y_A)$.

Операції з векторами в координатах

Нарешті, виражаючи в отриманих рівностях

$x_C - x_A = \frac{\lambda}{\lambda+1}(x_B - x_A)$ і $y_C - y_A = \frac{\lambda}{\lambda+1}(y_B - y_A)$

координати x_C і y_C, отримуємо

$x_C = x_A + \frac{\lambda}{\lambda+1}(x_B - x_A) = \frac{(\lambda+1)x_A + \lambda x_B - \lambda x_A}{\lambda+1} = \frac{\lambda x_B + x_A}{\lambda+1}$

і аналогічно

$y_C = \frac{\lambda y_B + y_A}{\lambda+1}$.

Відповідь: $x_C = \dfrac{\lambda x_B + x_A}{\lambda+1}, \quad y_C = \dfrac{\lambda y_B + y_A}{\lambda+1}$.

Операції з векторами в координатах

Нарешті, виражаючи в отриманих рівностях

$x_C - x_A = \frac{\lambda}{\lambda+1}(x_B - x_A)$ і $y_C - y_A = \frac{\lambda}{\lambda+1}(y_B - y_A)$

координати x_C і y_C, отримуємо

$x_C = x_A + \frac{\lambda}{\lambda+1}(x_B - x_A) = \frac{(\lambda+1)x_A + \lambda x_B - \lambda x_A}{\lambda+1} = \frac{\lambda x_B + x_A}{\lambda+1}$

і аналогічно

$y_C = \frac{\lambda y_B + y_A}{\lambda+1}$.

Відповідь: $x_C = \dfrac{\lambda x_B + x_A}{\lambda+1}, \quad y_C = \dfrac{\lambda y_B + y_A}{\lambda+1}$.

Скалярний добуток векторів в координатах

Використовуючи властивості скалярного добутку, виражаємо скалярний добуток векторів $\vec{a} = (a_x, a_y)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y)$ через координати цих векторів:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y)(b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y) =$$

$$= a_x b_x \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x + a_x b_y \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y + a_y b_x \vec{e}_y \cdot \vec{e}_x + a_y b_y \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = a_x b_x + a_y b_y \,.$$

Отже,

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y \,.}$$

Використовуючи означення скалярного добутку і встановлені формули для скалярного добутку і модуля вектора в координатах, отримуємо наступний вираз для косинуса кута α між векторами $\vec{a} = (a_x, a_y)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y)$:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} \,.$$

Перпендикулярність і колінеарність векторів

Умова перпендикулярності векторів $\vec{a} = (a_x, a_y)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y)$ має вигляд

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff a_x b_x + a_y b_y = 0\,.} \tag{5}$$

Однаково напрямлені або протилежно напрямлені вектори називають також колінеарними (або паралельними) векторами (позначимо $\vec{a} \parallel \vec{b}$).
Умова колінеарності має вигляд

$$\boxed{\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = \pm ab\,.} \tag{6}$$

При не рівних нулю координатах векторів $\vec{a} = (a_x, a_y)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y)$ відповідні координати колінеарних векторів пропорційні, тобто $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y}$.

Оскільки для $\vec{b} = \vec{0} = (0;0)$ виконуються обидві умови (5) і (6), то нульовий вектор $\vec{0}$ є одночасно і перпендикулярним і колінеарним будь-якому вектору $\vec{a}$.

Перпендикулярність і колінеарність векторів

Умова перпендикулярності векторів $\vec{a} = (a_x, a_y)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y)$ має вигляд

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff a_x b_x + a_y b_y = 0\,.} \tag{5}$$

Однаково напрямлені або протилежно напрямлені вектори називають також колінеарними (або паралельними) векторами (позначимо $\vec{a} \parallel \vec{b}$).

Умова колінеарності має вигляд

$$\boxed{\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = \pm ab\,.} \tag{6}$$

При не рівних нулю координатах векторів $\vec{a} = (a_x, a_y)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y)$ відповідні координати колінеарних векторів пропорційні, тобто $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y}$.

Оскільки для $\vec{b} = \vec{0} = (0;0)$ виконуються обидві умови (5) і (6), то нульовий вектор $\vec{0}$ є одночасно і перпендикулярним і колінеарним будь-якому вектору $\vec{a}$.

Перпендикулярність і колінеарність векторів

Умова перпендикулярності векторів $\vec{a} = (a_x, a_y)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y)$ має вигляд

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff a_x b_x + a_y b_y = 0\,.} \qquad (5)$$

Однаково напрямлені або протилежно напрямлені вектори називають також колінеарними (або паралельними) векторами (позначимо $\vec{a} \parallel \vec{b}$).

Умова колінеарності має вигляд

$$\boxed{\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = \pm ab\,.} \qquad (6)$$

При не рівних нулю координатах векторів $\vec{a} = (a_x, a_y)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y)$ відповідні координати колінеарних векторів пропорційні, тобто $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y}$.

Оскільки для $\vec{b} = \vec{0} = (0;0)$ виконуються обидві умови (5) і (6), то нульовий вектор $\vec{0}$ є одночасно і перпендикулярним і колінеарним будь-якому вектору $\vec{a}$.

Перпендикулярність векторів

Приклад 8. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $120°$, а їх модулі $a = 2$ і $b = 1$. При якому значенні λ вектор $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ є перпендикулярним до вектора $\vec{a}$?

Розв'язання. Враховуючи умову перпендикулярності і властивості скалярного добутку векторів, отримуємо

$$(\vec{a}+\lambda\vec{b}) \perp \vec{a} \iff (\vec{a}+\lambda\vec{b})\cdot\vec{a} = 0 \iff \vec{a}\cdot\vec{a}+\lambda\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \iff$$
$$\iff a^2+\lambda ab\cos 120° = 0 \iff 2^2+\lambda\cdot 2\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \iff$$
$$\iff \lambda = 4.$$

Відповідь: $\lambda = 4$.

Перпендикулярність векторів

Приклад 8. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 120°, а їх модулі $a = 2$ і $b = 1$. При якому значенні λ вектор $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ є перпендикулярним до вектора $\vec{a}$?

Розв'язання. Враховуючи умову перпендикулярності і властивості скалярного добутку векторів, отримуємо

$$(\vec{a}+\lambda\vec{b}) \perp \vec{a} \iff (\vec{a}+\lambda\vec{b})\cdot\vec{a} = 0 \iff \vec{a}\cdot\vec{a}+\lambda\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \iff$$
$$\iff a^2 + \lambda ab\cos 120^\circ = 0 \iff 2^2 + \lambda\cdot 2\cdot 1\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 0 \iff$$
$$\iff \lambda = 4.$$

Відповідь: $\lambda = 4$.

Перпендикулярність векторів

Приклад 8. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 120°, а їх модулі $a = 2$ і $b = 1$. При якому значенні λ вектор $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ є перпендикулярним до вектора $\vec{a}$?

Розв'язання. Враховуючи умову перпендикулярності і властивості скалярного добутку векторів, отримуємо

$$(\vec{a}+\lambda\vec{b}) \perp \vec{a} \iff (\vec{a}+\lambda\vec{b})\cdot\vec{a} = 0 \iff \vec{a}\cdot\vec{a}+\lambda\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \iff$$

$$\iff a^2+\lambda ab\cos 120^\circ = 0 \iff 2^2+\lambda\cdot 2\cdot 1\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 4.$$

Відповідь: $\lambda = 4$.

Колінеарність векторів

П р и к л а д 9. При якому значенні λ вектори $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ і $\vec{b} = \lambda\vec{p} - 6\vec{q}$ колінеарні, якщо $\vec{p}$ і $\vec{q}$ – одиничні перпендикулярні вектори?

Р о з в’ я з а н н я. Введемо в розгляд декартову систему координат xOy, розмістивши вісь Ox в напрямку вектора $\vec{p}$ і вісь Oy – в напрямку вектора $\vec{q}$ (див. мал.)

Тоді вектор $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ має координати $(2;3)$, тобто $\vec{a} = (2;3)$.

Аналогічно для вектора $\vec{b} = \lambda\vec{p} - 6\vec{q}$ маємо $\vec{b} = (\lambda;-6)$.

За умовою колінеарності векторів

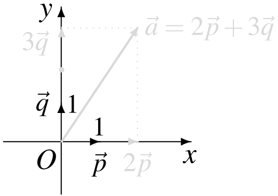
$$\vec{b} \parallel \vec{a} \iff \frac{\lambda}{2} = \frac{-6}{3} \iff \frac{\lambda}{2} = -2 \iff \lambda = -4.$$

В і д п о в і д ь: $\lambda = -4$.

Колінеарність векторів

П р и к л а д 9. При якому значенні λ вектори $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ і $\vec{b} = \lambda\vec{p} - 6\vec{q}$ колінеарні, якщо $\vec{p}$ і $\vec{q}$ – одиничні перпендикулярні вектори?

Р о з в' я з а н н я. Введемо в розгляд декартову систему координат xOy, розмістивши вісь Ox в напрямку вектора p і вісь Oy – в напрямку вектора $\vec{q}$ (див. мал.)



Тоді вектор $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ має координати $(2;3)$, тобто $\vec{a} = (2;3)$.

Аналогічно для вектора $\vec{b} = \lambda\vec{p} - 6\vec{q}$ маємо $\vec{b} = (\lambda;-6)$.

За умовою колінеарності векторів

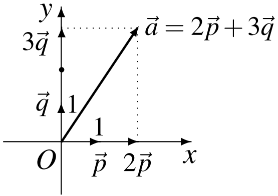
$\vec{b} \parallel \vec{a} \iff \frac{\lambda}{2} = \frac{-6}{3} \iff \frac{\lambda}{2} = -2 \iff \lambda = -4$.

В і д п о в і д ь: $\lambda = -4$.

Колінеарність векторів

П р и к л а д 9. При якому значенні λ вектори $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ і $\vec{b} = \lambda\vec{p} - 6\vec{q}$ колінеарні, якщо $\vec{p}$ і $\vec{q}$ – одиничні перпендикулярні вектори?

Р о з в' я з а н н я. Введемо в розгляд декартову систему координат xOy, розмістивши вісь Ox в напрямку вектора $\vec{p}$ і вісь Oy – в напрямку вектора $\vec{q}$ (див. мал.)



Тоді вектор $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ має координати $(2;3)$, тобто $\vec{a} = (2;3)$.

Аналогічно для вектора $\vec{b} = \lambda\vec{p} - 6\vec{q}$ маємо $\vec{b} = (\lambda;-6)$.

За умовою колінеарності векторів

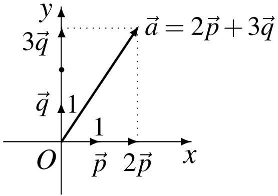
$\vec{b} \parallel \vec{a} \iff \frac{\lambda}{2} = \frac{-6}{3} \iff \frac{\lambda}{2} = -2 \iff \lambda = -4.$

В і д п о в і д ь: $\lambda = -4$.

Колінеарність векторів

П р и к л а д 9. При якому значенні λ вектори $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ і $\vec{b} = \lambda\vec{p} - 6\vec{q}$ колінеарні, якщо $\vec{p}$ і $\vec{q}$ – одиничні перпендикулярні вектори?

Р о з в' я з а н н я. Введемо в розгляд декартову систему координат xOy, розмістивши вісь Ox в напрямку вектора p і вісь Oy – в напрямку вектора $\vec{q}$ (див. мал.)



Тоді вектор $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ має координати $(2;3)$, тобто $\vec{a} = (2;3)$.

Аналогічно для вектора $\vec{b} = \lambda\vec{p} - 6\vec{q}$ маємо $\vec{b} = (\lambda;-6)$.

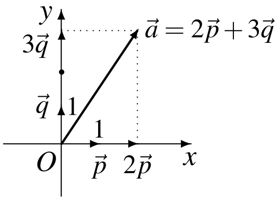
За умовою колінеарності векторів $\vec{b} \parallel \vec{a} \iff \frac{\lambda}{2} = \frac{-6}{3} \iff \frac{\lambda}{2} = -2 \iff \lambda = -4.$

В і д п о в і д ь: $\lambda = -4.$

Колінеарність векторів

Приклад 9. При якому значенні λ вектори $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ і $\vec{b} = \lambda\vec{p} - 6\vec{q}$ колінеарні, якщо $\vec{p}$ і $\vec{q}$ – одиничні перпендикулярні вектори?

Розв'язання. Введемо в розгляд декартову систему координат xOy, розмістивши вісь Ox в напрямку вектора $\vec{p}$ і вісь Oy – в напрямку вектора $\vec{q}$ (див. мал.)



Тоді вектор $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ має координати $(2;3)$, тобто $\vec{a} = (2;3)$.

Аналогічно для вектора $\vec{b} = \lambda\vec{p} - 6\vec{q}$ маємо $\vec{b} = (\lambda;-6)$.

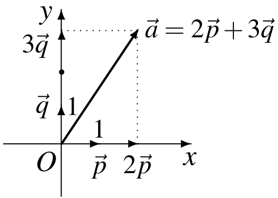
За умовою колінеарності векторів
$\vec{b} \parallel \vec{a} \iff \frac{\lambda}{2} = \frac{-6}{3} \iff \frac{\lambda}{2} = -2 \iff \lambda = -4$.

Відповідь: $\lambda = -4$.

Колінеарність векторів

Приклад 9. При якому значенні λ вектори $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ і $\vec{b} = \lambda\vec{p} - 6\vec{q}$ колінеарні, якщо $\vec{p}$ і $\vec{q}$ – одиничні перпендикулярні вектори?

Розв'язання. Введемо в розгляд декартову систему координат xOy, розмістивши вісь Ox в напрямку вектора $\vec{p}$ і вісь Oy – в напрямку вектора $\vec{q}$ (див. мал.)



Тоді вектор $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ має координати $(2;3)$, тобто $\vec{a} = (2;3)$.

Аналогічно для вектора $\vec{b} = \lambda\vec{p} - 6\vec{q}$ маємо $\vec{b} = (\lambda;-6)$.

За умовою колінеарності векторів
$$\vec{b} \parallel \vec{a} \iff \frac{\lambda}{2} = \frac{-6}{3} \iff \frac{\lambda}{2} = -2 \iff \lambda = -4.$$

Відповідь: $\lambda = -4$.

Приклади із ЗНО

Приклад 10 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2015 р.). У прямокутній декартовій системі координат у просторі xyz задано точки $A(2;0;0)$ і $B(-4;2;6)$. До кожного початку речення (1-4) доберіть його закінчення (А-Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення	Закінчення речення
1) Серединою відрізка AB є точка	А) $(-1;1;3)$
2) Вектор $\overrightarrow{AB}$ має координати	Б) $(0;2;0)$
3) Проекцією точки B на площину xz є точка	В) $(-4;0;6)$
4) Проекцією точки B на вісь y є точка	Г) $(-6;2;6)$
	Д) $(-2;2;6)$

Розв'язання. Координати середини відрізка AB знаходимо за формулами
$\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2-4}{2}=-1$, $\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{0+2}{2}=1$, $\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{0+6}{2}=3$, тобто серединою відрізка AB є точка $(-1;1;3)$.

Приклади із ЗНО

Приклад 10 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2015 р.). У прямокутній декартовій системі координат у просторі xyz задано точки $A(2;0;0)$ і $B(-4;2;6)$. До кожного початку речення (1-4) доберіть його закінчення (А-Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення	Закінчення речення
1) Серединою відрізка AB є точка	А) $(-1;1;3)$
2) Вектор $\overrightarrow{AB}$ має координати	Б) $(0;2;0)$
3) Проекцією точки B на площину xz є точка	В) $(-4;0;6)$
4) Проекцією точки B на вісь y є точка	Г) $(-6;2;6)$
	Д) $(-2;2;6)$

Розв'язання. Координати середини відрізка AB знаходимо за формулами

$$\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2-4}{2}=-1,\quad \frac{y_A+y_B}{2}=\frac{0+2}{2}=1,\quad \frac{z_A+z_B}{2}=\frac{0+6}{2}=3,$$

тобто серединою відрізка AB є точка $(-1;1;3)$.

Приклади із ЗНО

Вектор $\overrightarrow{AB}$ має координати
$(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (-4-2; 2-0; 6-0) = (-6; 2; 6)$.

Проекція точки B на площину xz має ті ж x-координату і z-координату, що і точка B, а y-координата будь-якої точки площини xz рівна 0, тобто це точка $(-4; 0; 6)$.

Проекція точки B на вісь y має ту ж y-координату, що і точка B, а x-координата і z-координата будь-якої точки осі y рівні 0, тобто це точка $(0; 2; 0)$.

Відповідь: 1-А, 2-Г, 3-В, 4-Б.

Приклад 11 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2016 р.). У прямокутній системі координат на площині задано паралелограм $ABCD$, $\cos A = 0,44$. Визначте довжину діагоналі BD паралелограма, якщо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}(6; -8)$ і $\overrightarrow{AD}$ дорівнює 88.

Приклади із ЗНО

Вектор $\overrightarrow{AB}$ має координати
$(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (-4-2; 2-0; 6-0) = (-6; 2; 6)$.

Проекція точки B на площину xz має ті ж x-координату і z-координату, що і точка B, а y-координата будь-якої точки площини xz рівна 0, тобто це точка $(-4; 0; 6)$.

Проекція точки B на вісь y має ту ж y-координату, що і точка B, а x-координата і z-координата будь-якої точки осі y рівні 0, тобто це точка $(0; 2; 0)$.

Відповідь: 1-А, 2-Г, 3-В, 4-Б.

Приклад 11 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2016 р.). У прямокутній системі координат на площині задано паралелограм $ABCD$, $\cos A = 0,44$. Визначте довжину діагоналі BD паралелограма, якщо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}(6; -8)$ і $\overrightarrow{AD}$ дорівнює 88.

Приклади із ЗНО

Вектор $\overrightarrow{AB}$ має координати
$(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (-4-2; 2-0; 6-0) = (-6;2;6)$.

Проекція точки B на площину xz має ті ж x-координату і z-координату, що і точка B, а y-координата будь-якої точки площини xz рівна 0, тобто це точка $(-4;0;6)$.

Проекція точки B на вісь y має ту ж y-координату, що і точка B, а x-координата і z-координата будь-якої точки осі y рівні 0, тобто це точка $(0;2;0)$.

Відповідь: 1-А, 2-Г, 3-В, 4-Б.

Приклад 11 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2016 р.). У прямокутній системі координат на площині задано паралелограм $ABCD$, $\cos A = 0,44$. Визначте довжину діагоналі BD паралелограма, якщо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}(6;-8)$ і $\overrightarrow{AD}$ дорівнює 88.

Приклади із ЗНО

Вектор $\overrightarrow{AB}$ має координати
$(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (-4-2; 2-0; 6-0) = (-6; 2; 6)$.

Проекція точки B на площину xz має ті ж x-координату і z-координату, що і точка B, а y-координата будь-якої точки площини xz рівна 0, тобто це точка $(-4; 0; 6)$.

Проекція точки B на вісь y має ту ж y-координату, що і точка B, а x-координата і z-координата будь-якої точки осі y рівні 0, тобто це точка $(0; 2; 0)$.

Відповідь: 1-А, 2-Г, 3-В, 4-Б.

Приклад 11 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2016 р.). У прямокутній системі координат на площині задано паралелограм $ABCD$, $\cos A = 0,44$. Визначте довжину діагоналі BD паралелограма, якщо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}(6; -8)$ і $\overrightarrow{AD}$ дорівнює 88.

Приклади із ЗНО

Вектор $\overrightarrow{AB}$ має координати $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (-4-2; 2-0; 6-0) = (-6; 2; 6)$.

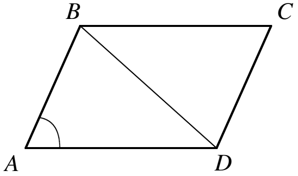
Проекція точки B на площину xz має ті ж x-координату і z-координату, що і точка B, а y-координата будь-якої точки площини xz рівна 0, тобто це точка $(-4; 0; 6)$.

Проекція точки B на вісь y має ту ж y-координату, що і точка B, а x-координата і z-координата будь-якої точки осі y рівні 0, тобто це точка $(0; 2; 0)$.

Відповідь: 1-А, 2-Г, 3-В, 4-Б.

Приклад 11 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2016 р.). У прямокутній системі координат на площині задано паралелограм $ABCD$, $\cos A = 0,44$. Визначте довжину діагоналі BD паралелограма, якщо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}(6; -8)$ і $\overrightarrow{AD}$ дорівнює 88.

Приклади із ЗНО



Розв'язання. Обчислимо спочатку модуль вектора $\overrightarrow{AB}(6;-8)$: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2+(-8)^2} = \sqrt{100} = 10$.

Тепер за означенням скалярного добутку $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cos A$,

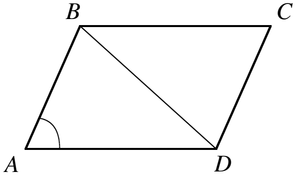
тобто $88 = 10\cdot|\overrightarrow{AD}|\cdot 0,44$, звідки знаходимо $|\overrightarrow{AD}| = \frac{88}{4,4} = 20$.

Нарешті, знаходимо BD за теоремою косинусів:

$$BD = \sqrt{AB^2+AD^2-2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos A} =$$
$$= \sqrt{10^2+20^2-2\cdot 10\cdot 20\cdot 0,44} = \sqrt{100+400-176} =$$
$$= \sqrt{324} = 18 .$$

Відповідь: 18.

Приклади із ЗНО



Розв'язання. Обчислимо спочатку модуль вектора $\overrightarrow{AB}(6;-8)$: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2+(-8)^2} = \sqrt{100} = 10$.

Тепер за означенням скалярного добутку $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cos A$,

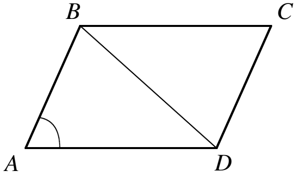
тобто $88 = 10\cdot|\overrightarrow{AD}|\cdot 0,44$, звідки знаходимо $|\overrightarrow{AD}| = \frac{88}{4,4} = 20$.

Нарешті, знаходимо BD за теоремою косинусів:

$BD = \sqrt{AB^2+AD^2-2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos A} =$
$= \sqrt{10^2+20^2-2\cdot 10\cdot 20\cdot 0,44} = \sqrt{100+400-176} =$
$= \sqrt{324} = 18$.

Відповідь: 18.

Приклади із ЗНО



Розв'язання. Обчислимо спочатку модуль вектора $\overrightarrow{AB}(6;-8)$:
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2+(-8)^2} = \sqrt{100} = 10$.

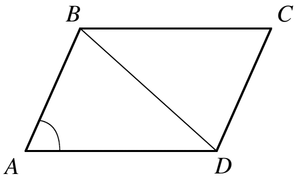
Тепер за означенням скалярного добутку $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cos A$,

тобто $88 = 10\cdot|\overrightarrow{AD}|\cdot 0,44$, звідки знаходимо
$|\overrightarrow{AD}| = \frac{88}{4,4} = 20$.

Нарешті, знаходимо BD за теоремою косинусів:
$BD = \sqrt{AB^2+AD^2-2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos A} =$
$= \sqrt{10^2+20^2-2\cdot10\cdot20\cdot0,44} = \sqrt{100+400-176} =$
$= \sqrt{324} = 18$.

Відповідь: 18.

Приклади із ЗНО



Розв'язання. Обчислимо спочатку модуль вектора $\overrightarrow{AB}(6;-8)$: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2+(-8)^2} = \sqrt{100} = 10$.

Тепер за означенням скалярного добутку $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cos A$,

тобто $88 = 10\cdot|\overrightarrow{AD}|\cdot 0,44$, звідки знаходимо $|\overrightarrow{AD}| = \frac{88}{4,4} = 20$.

Нарешті, знаходимо BD за теоремою косинусів:

$$BD = \sqrt{AB^2+AD^2-2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos A} =$$
$$= \sqrt{10^2+20^2-2\cdot 10\cdot 20\cdot 0,44} = \sqrt{100+400-176} =$$
$$= \sqrt{324} = 18.$$

Відповідь: 18.

Приклади із ЗНО

Приклад 12 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2014 р.). Точка C лежить на осі x прямокутної системи координат і знаходиться на відстані 5 від точки $A(-2;4)$. Відрізок AC перетинає вісь y. Знайдіть координати точки C.

Розв'язання. Точка C, яка лежить на осі x, має координати $(x;0)$, де невідому x треба знайти. Зазначимо, що оскільки відрізок AC перетинає вісь y, то $x > 0$.

Для знаходження невідомої x використовуємо умову

$$AC = 5 \iff \sqrt{(x+2)^2 + (0-4)^2} = 5 \iff$$

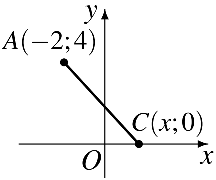
$$\iff (x+2)^2 + 16 = 25 \iff x^2 + 4x - 5 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x = -5, \\ x = 1. \end{array} \right.$$

Умову задачі задовольняє лише $x = 1$.

Відповідь: $(1;0)$.

Приклади із ЗНО

Приклад 12 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2014 р.). Точка C лежить на осі x прямокутної системи координат і знаходиться на відстані 5 від точки $A(-2;4)$. Відрізок AC перетинає вісь y. Знайдіть координати точки C.



Розв'язання. Точка C, яка лежить на осі x, має координати $(x;0)$, де невідому x треба знайти. Зазначимо, що оскільки відрізок AC перетинає вісь y, то $x>0$.

Для знаходження невідомої x використовуємо умову

$$AC=5 \iff \sqrt{(x+2)^2+(0-4)^2}=5 \iff$$

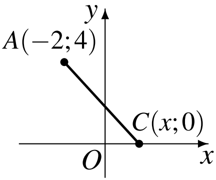
$$\iff (x+2)^2+16=25 \iff x^2+4x-5=0 \iff \left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Умову задачі задовольняє лише $x=1$.

Відповідь: $(1;0)$.

Приклади із ЗНО

Приклад 12 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2014 р.). Точка C лежить на осі x прямокутної системи координат і знаходиться на відстані 5 від точки $A(-2;4)$. Відрізок AC перетинає вісь y. Знайдіть координати точки C.



Розв'язання. Точка C, яка лежить на осі x, має координати $(x;0)$, де невідому x треба знайти. Зазначимо, що оскільки відрізок AC перетинає вісь y, то $x>0$.

Для знаходження невідомої x використовуємо умову

$$AC=5 \iff \sqrt{(x+2)^2+(0-4)^2}=5 \iff$$

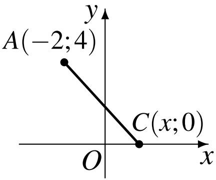
$$\iff (x+2)^2+16=25 \iff x^2+4x-5=0 \iff \left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Умову задачі задовольняє лише $x=1$.

Відповідь: $(1;0)$.

Приклади із ЗНО

П р и к л а д 12 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2014 р.). Точка C лежить на осі x прямокутної системи координат і знаходиться на відстані 5 від точки $A(-2;4)$. Відрізок AC перетинає вісь y. Знайдіть координати точки C.



Р о з в' я з а н н я. Точка C, яка лежить на осі x, має координати $(x;0)$, де невідому x треба знайти. Зазначимо, що оскільки відрізок AC перетинає вісь y, то $x > 0$.

Для знаходження невідомої x використовуємо умову

$$AC = 5 \iff \sqrt{(x+2)^2 + (0-4)^2} = 5 \iff$$

$$\iff (x+2)^2 + 16 = 25 \iff x^2 + 4x - 5 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x = -5, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Умову задачі задовольняє лише $x = 1$.

В і д п о в і д ь: $(1;0)$.

Приклади із ЗНО

Приклад 13 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). При якому значенні y вектори $\vec{a}(-3;5)$ і $\vec{b}(6;y)$ колінеарні?

Розв'язання. Вектори $\vec{b}(6;y)$ і $\vec{a}(-3;5)$ колінеарні, якщо їх відповідні координати пропорційні, тобто

$\frac{6}{-3}=\frac{y}{5} \iff \frac{y}{5}=-2 \iff y=-10$.

Відповідь: -10.

Приклад 14 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). При якому значенні x вектори $\vec{a}(2;x)$ і $\vec{b}(-4;10)$ перпендикулярні?

Розв'язання.

$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff 2\cdot(-4)+x\cdot 10=0 \iff$

$\iff 10x=8 \iff x=0,8$.

Відповідь: $0,8$.

Приклади із ЗНО

Приклад 13 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). При якому значенні y вектори $\vec{a}(-3;5)$ і $\vec{b}(6;y)$ колінеарні?

Розв'язання. Вектори $\vec{b}(6;y)$ і $\vec{a}(-3;5)$ колінеарні, якщо їх відповідні координати пропорційні, тобто

$\frac{6}{-3} = \frac{y}{5} \iff \frac{y}{5} = -2 \iff y = -10$.

Відповідь: -10.

Приклад 14 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). При якому значенні x вектори $\vec{a}(2;x)$ і $\vec{b}(-4;10)$ перпендикулярні?

Розв'язання.

$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff 2 \cdot (-4) + x \cdot 10 = 0 \iff$

$\iff 10x = 8 \iff x = 0,8$.

Відповідь: $0,8$.

Приклади із ЗНО

Приклад 13 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). При якому значенні y вектори $\vec{a}(-3;5)$ і $\vec{b}(6;y)$ колінеарні?

Розв'язання. Вектори $\vec{b}(6;y)$ і $\vec{a}(-3;5)$ колінеарні, якщо їх відповідні координати пропорційні, тобто

$\frac{6}{-3} = \frac{y}{5} \iff \frac{y}{5} = -2 \iff y = -10$.

Відповідь: -10.

Приклад 14 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). При якому значенні x вектори $\vec{a}(2;x)$ і $\vec{b}(-4;10)$ перпендикулярні?

Розв'язання.

$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff 2 \cdot (-4) + x \cdot 10 = 0 \iff$

$\iff 10x = 8 \iff x = 0,8$.

Відповідь: $0,8$.

Приклади із ЗНО

Приклад 13 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). При якому значенні y вектори $\vec{a}(-3;5)$ і $\vec{b}(6;y)$ колінеарні?

Розв'язання. Вектори $\vec{b}(6;y)$ і $\vec{a}(-3;5)$ колінеарні, якщо їх відповідні координати пропорційні, тобто $\frac{6}{-3}=\frac{y}{5} \iff \frac{y}{5}=-2 \iff y=-10$.

Відповідь: -10.

Приклад 14 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). При якому значенні x вектори $\vec{a}(2;x)$ і $\vec{b}(-4;10)$ перпендикулярні?

Розв'язання.

$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff 2\cdot(-4)+x\cdot 10=0 \iff$

$\iff 10x=8 \iff x=0,8$.

Відповідь: $0,8$.

Приклади із ЗНО

Приклад 13 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). При якому значенні y вектори $\vec{a}(-3;5)$ і $\vec{b}(6;y)$ колінеарні?

Розв'язання. Вектори $\vec{b}(6;y)$ і $\vec{a}(-3;5)$ колінеарні, якщо їх відповідні координати пропорційні, тобто

$\frac{6}{-3} = \frac{y}{5} \iff \frac{y}{5} = -2 \iff y = -10$.

Відповідь: -10.

Приклад 14 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). При якому значенні x вектори $\vec{a}(2;x)$ і $\vec{b}(-4;10)$ перпендикулярні?

Розв'язання.

$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff 2 \cdot (-4) + x \cdot 10 = 0 \iff$

$\iff 10x = 8 \iff x = 0,8$.

Відповідь: 0,8.

Приклади із ЗНО

Приклад 13 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). При якому значенні y вектори $\vec{a}(-3;5)$ і $\vec{b}(6;y)$ колінеарні?

Розв'язання. Вектори $\vec{b}(6;y)$ і $\vec{a}(-3;5)$ колінеарні, якщо їх відповідні координати пропорційні, тобто $\frac{6}{-3}=\frac{y}{5} \iff \frac{y}{5}=-2 \iff y=-10$.

Відповідь: -10.

Приклад 14 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). При якому значенні x вектори $\vec{a}(2;x)$ і $\vec{b}(-4;10)$ перпендикулярні?

Розв'язання.

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff 2\cdot(-4)+x\cdot 10=0 \iff$$

$$\iff 10x=8 \iff x=0,8.$$

Відповідь: $0,8$.

Приклади із ЗНО

Приклад 15 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.). Визначте кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}+\vec{c}$ у градусах, якщо відомо, що $\vec{a}(2;2)$, $\vec{b}(2;4)$ і $\vec{c}(-2;-6)$.

Розв'язання. Маємо $\vec{b}+\vec{c}=(2-2;4-6)=(0;-2)$. Тепер шуканий кут α знаходимо, використовуючи співвідношення

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}+\vec{c}|}=\frac{2\cdot0+2\cdot(-2)}{\sqrt{2^2+2^2}\sqrt{0^2+(-2)^2}}=\frac{-4}{2\sqrt{2}\cdot2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже, $\alpha=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$ або у градусах $\alpha=135^\circ$.

Відповідь: 135.

Приклади із ЗНО

Приклад 15 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.). Визначте кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}+\vec{c}$ у градусах, якщо відомо, що $\vec{a}(2;2)$, $\vec{b}(2;4)$ і $\vec{c}(-2;-6)$.

Розв'язання. Маємо $\vec{b}+\vec{c}=(2-2;4-6)=(0;-2)$. Тепер шуканий кут α знаходимо, використовуючи співвідношення

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}+\vec{c}|}=\frac{2\cdot 0+2\cdot(-2)}{\sqrt{2^2+2^2}\sqrt{0^2+(-2)^2}}=\frac{-4}{2\sqrt{2}\cdot 2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже, $\alpha=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$ або у градусах $\alpha=135^\circ$.

Відповідь: 135.

Приклади із ЗНО

Приклад 15 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.). Визначте кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}+\vec{c}$ у градусах, якщо відомо, що $\vec{a}(2;2)$, $\vec{b}(2;4)$ і $\vec{c}(-2;-6)$.

Розв'язання. Маємо $\vec{b}+\vec{c}=(2-2;4-6)=(0;-2)$. Тепер шуканий кут α знаходимо, використовуючи співвідношення

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}+\vec{c}|}=\frac{2\cdot 0+2\cdot(-2)}{\sqrt{2^2+2^2}\sqrt{0^2+(-2)^2}}=\frac{-4}{2\sqrt{2}\cdot 2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже, $\alpha=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$ або у градусах $\alpha=135^\circ$.

Відповідь: 135.

Приклади із ЗНО

Приклад 16 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.). Знайдіть координати точки M, відносно якої симетричні точки $E(-3;8;7)$ і $F(-9;6;1)$.

Розв'язання. Точка M є серединою відрізка EF, тому її координати

$x_M = \frac{-3-9}{2} = -6, \quad y_M = \frac{8+6}{2} = 7, \quad z_M = \frac{7+1}{2} = 4$.

Відповідь: $(-6;7;4)$.

Приклад 17 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.). Вкажіть рівняння кола з центром у початку координат, якщо воно проходить через точку $(3;-4)$.

Розв'язання. Радіусом кола є відстань від початку координат до точки $(3;-4)$, тобто

$R = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$.

Отже, рівняння кола: $x^2+y^2=25$.

Відповідь: $x^2+y^2=25$.

Приклади із ЗНО

Приклад 16 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.). Знайдіть координати точки M, відносно якої симетричні точки $E(-3;8;7)$ і $F(-9;6;1)$.

Розв'язання. Точка M є серединою відрізка EF, тому її координати

$$x_M = \frac{-3-9}{2} = -6, \quad y_M = \frac{8+6}{2} = 7, \quad z_M = \frac{7+1}{2} = 4.$$

Відповідь: $(-6;7;4)$.

Приклад 17 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.). Вкажіть рівняння кола з центром у початку координат, якщо воно проходить через точку $(3;-4)$.

Розв'язання. Радіусом кола є відстань від початку координат до точки $(3;-4)$, тобто

$R = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$.

Отже, рівняння кола: $x^2+y^2=25$.

Відповідь: $x^2+y^2=25$.

Приклади із ЗНО

Приклад 16 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.). Знайдіть координати точки M, відносно якої симетричні точки $E(-3;8;7)$ і $F(-9;6;1)$.

Розв'язання. Точка M є серединою відрізка EF, тому її координати

$$x_M = \frac{-3-9}{2} = -6, \quad y_M = \frac{8+6}{2} = 7, \quad z_M = \frac{7+1}{2} = 4.$$

Відповідь: $(-6;7;4)$.

Приклад 17 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.). Вкажіть рівняння кола з центром у початку координат, якщо воно проходить через точку $(3;-4)$.

Розв'язання. Радіусом кола є відстань від початку координат до точки $(3;-4)$, тобто

$R = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$.

Отже, рівняння кола: $x^2+y^2=25$.

Відповідь: $x^2+y^2=25$.

Приклади із ЗНО

Приклад 16 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.). Знайдіть координати точки M, відносно якої симетричні точки $E(-3;8;7)$ і $F(-9;6;1)$.

Розв'язання. Точка M є серединою відрізка EF, тому її координати

$$x_M = \frac{-3-9}{2} = -6, \quad y_M = \frac{8+6}{2} = 7, \quad z_M = \frac{7+1}{2} = 4.$$

Відповідь: $(-6;7;4)$.

Приклад 17 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.). Вкажіть рівняння кола з центром у початку координат, якщо воно проходить через точку $(3;-4)$.

Розв'язання. Радіусом кола є відстань від початку координат до точки $(3;-4)$, тобто

$R = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$.

Отже, рівняння кола: $x^2+y^2=25$.

Відповідь: $x^2+y^2=25$.

Приклади із ЗНО

Приклад 16 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.). Знайдіть координати точки M, відносно якої симетричні точки $E(-3;8;7)$ і $F(-9;6;1)$.

Розв'язання. Точка M є серединою відрізка EF, тому її координати

$x_M = \frac{-3-9}{2} = -6, \quad y_M = \frac{8+6}{2} = 7, \quad z_M = \frac{7+1}{2} = 4$.

Відповідь: $(-6;7;4)$.

Приклад 17 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.). Вкажіть рівняння кола з центром у початку координат, якщо воно проходить через точку $(3;-4)$.

Розв'язання. Радіусом кола є відстань від початку координат до точки $(3;-4)$, тобто

$R = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$.

Отже, рівняння кола: $x^2+y^2=25$.

Відповідь: $x^2+y^2=25$.

Приклади із ЗНО

Приклад 16 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.). Знайдіть координати точки M, відносно якої симетричні точки $E(-3;8;7)$ і $F(-9;6;1)$.

Розв'язання. Точка M є серединою відрізка EF, тому її координати

$$x_M = \frac{-3-9}{2} = -6, \quad y_M = \frac{8+6}{2} = 7, \quad z_M = \frac{7+1}{2} = 4.$$

Відповідь: $(-6;7;4)$.

Приклад 17 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.). Вкажіть рівняння кола з центром у початку координат, якщо воно проходить через точку $(3;-4)$.

Розв'язання. Радіусом кола є відстань від початку координат до точки $(3;-4)$, тобто

$$R = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5.$$

Отже, рівняння кола: $x^2+y^2=25$.

Відповідь: $x^2+y^2=25$.

Приклади із ЗНО

Приклад 18 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). Яка з наведених точок лежить у площині Oxz прямокутної системи координат у просторі: $(0;-3;0)$; $(0;4;-3)$; $(3;0;-4)$; $(-4;3;0)$; $(-3;3;3)$?

Розв'язання. В площині Oxz дорівнюють нулю y-координати точок, тому точка $(3;0;-4)$ лежить у площині Oxz.

Відповідь: $(3;0;-4)$.

Приклад 19 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.). Знайдіть точку, симетричну точці $A(2:-3;7)$ відносно площини yz.

Розв'язання. При симетрії відносно площини yz не змінюються y-координати і z-координати точок, а x-координата змінюється на протилежне число. Отже, шуканою точкою є точка $(-2:-3;7)$.

Відповідь: $(-2:-3;7)$.

Приклади із ЗНО

Приклад 18 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). Яка з наведених точок лежить у площині Oxz прямокутної системи координат у просторі: $(0;-3;0)$; $(0;4;-3)$; $(3;0;-4)$; $(-4;3;0)$; $(-3;3;3)$?

Розв'язання. В площині Oxz дорівнюють нулю y-координати точок, тому точка $(3;0;-4)$ лежить у площині Oxz.

Відповідь: $(3;0;-4)$.

Приклад 19 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.). Знайдіть точку, симетричну точці $A(2:-3;7)$ відносно площини yz.

Розв'язання. При симетрії відносно площини yz не змінюються y-координати і z-координати точок, а x-координата змінюється на протилежне число. Отже, шуканою точкою є точка $(-2:-3;7)$.

Відповідь: $(-2:-3;7)$.

Приклади із ЗНО

Приклад 18 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). Яка з наведених точок лежить у площині Oxz прямокутної системи координат у просторі: $(0;-3;0)$; $(0;4;-3)$; $(3;0;-4)$; $(-4;3;0)$; $(-3;3;3)$?

Розв'язання. В площині Oxz дорівнюють нулю y-координати точок, тому точка $(3;0;-4)$ лежить у площині Oxz.

Відповідь: $(3;0;-4)$.

Приклад 19 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.). Знайдіть точку, симетричну точці $A(2:-3;7)$ відносно площини yz.

Розв'язання. При симетрії відносно площини yz не змінюються y-координати і z-координати точок, а x-координата змінюється на протилежне число. Отже, шуканою точкою є точка $(-2:-3;7)$.

Відповідь: $(-2:-3;7)$.

Приклади із ЗНО

Приклад 18 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). Яка з наведених точок лежить у площині Oxz прямокутної системи координат у просторі: $(0;-3;0)$; $(0;4;-3)$; $(3;0;-4)$; $(-4;3;0)$; $(-3;3;3)$?

Розв'язання. В площині Oxz дорівнюють нулю y-координати точок, тому точка $(3;0;-4)$ лежить у площині Oxz.

Відповідь: $(3;0;-4)$.

Приклад 19 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.). Знайдіть точку, симетричну точці $A(2:-3;7)$ відносно площини yz.

Розв'язання. При симетрії відносно площини yz не змінюються y-координати і z-координати точок, а x-координата змінюється на протилежне число. Отже, шуканою точкою є точка $(-2:-3;7)$.

Відповідь: $(-2:-3;7)$.

Приклади із ЗНО

П р и к л а д 18 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). Яка з наведених точок лежить у площині Oxz прямокутної системи координат у просторі: $(0;-3;0)$; $(0;4;-3)$; $(3;0;-4)$; $(-4;3;0)$; $(-3;3;3)$?

Р о з в' я з а н н я. В площині Oxz дорівнюють нулю y-координати точок, тому точка $(3;0;-4)$ лежить у площині Oxz.

В і д п о в і д ь: $(3;0;-4)$.

П р и к л а д 19 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.). Знайдіть точку, симетричну точці $A(2:-3;7)$ відносно площини yz.

Р о з в' я з а н н я. При симетрії відносно площини yz не змінюються y-координати і z-координати точок, а x-координата змінюється на протилежне число. Отже, шуканою точкою є точка $(-2:-3;7)$.

В і д п о в і д ь: $(-2:-3;7)$.

Приклади із ЗНО

Приклад 18 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). Яка з наведених точок лежить у площині Oxz прямокутної системи координат у просторі: $(0;-3;0)$; $(0;4;-3)$; $(3;0;-4)$; $(-4;3;0)$; $(-3;3;3)$?

Розв'язання. В площині Oxz дорівнюють нулю y-координати точок, тому точка $(3;0;-4)$ лежить у площині Oxz.

Відповідь: $(3;0;-4)$.

Приклад 19 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.). Знайдіть точку, симетричну точці $A(2:-3;7)$ відносно площини yz.

Розв'язання. При симетрії відносно площини yz не змінюються y-координати і z-координати точок, а x-координата змінюється на протилежне число. Отже, шуканою точкою є точка $(-2:-3;7)$.

Відповідь: $(-2:-3;7)$.