

Елементи аналітичної геометрії на площині

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 23



Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

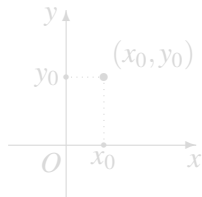
Рене Декарт, "Міркування про метод"

Координатний метод в геометрії

Введенням координат встановлюється зв'язок між геометрією і алгеброю.

Розглянемо геометрію на координатній площині.

Однією з найбільш уживаних є **декартова прямокутна система координат**.



Точка площини, яка є геометричним об'єктом, ототожнюється з парою (x_0, y_0) її **координат** – чисел x_0 і y_0 , тобто стає алгебраїчним об'єктом.

Усі геометричні фігури описуються деякими рівняннями або нерівностями.

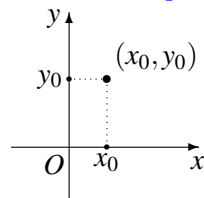
- При цьому точка (x, y) належить геометричній фігурі, якщо її координати x і y задовольняють ті умови (рівняння, нерівності), які задають цю фігуру.

Координатний метод в геометрії

Введенням координат встановлюється зв'язок між геометрією і алгеброю.

Розглянемо геометрію на координатній площині.

Однією з найбільш уживаних є **декартова прямокутна система координат**.



Точка площини, яка є геометричним об'єктом, ототожнюється з парою (x_0, y_0) її **координат** – чисел x_0 і y_0 , тобто стає алгебраїчним об'єктом.

Усі геометричні фігури описуються деякими рівняннями або нерівностями.

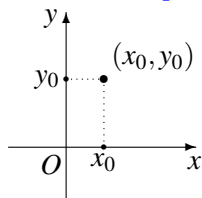
- При цьому точка (x, y) належить геометричній фігурі, якщо її координати x і y задовольняють ті умови (рівняння, нерівності), які задають цю фігуру.

Координатний метод в геометрії

Введенням координат встановлюється зв'язок між геометрією і алгеброю.

Розглянемо геометрію на координатній площині.

Однією з найбільш уживаних є **декартова прямокутна система координат**.



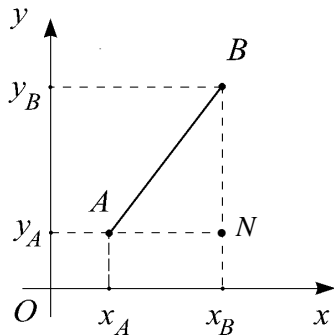
Точка площини, яка є геометричним об'єктом, ототожнюється з парою (x_0, y_0) її **координат** – чисел x_0 і y_0 , тобто стає алгебраїчним об'єктом.

Усі геометричні фігури описуються деякими рівняннями або нерівностями.

- При цьому точка (x, y) належить геометричній фігурі, якщо її координати x і y задовольняють ті умови (рівняння, нерівності), які задають цю фігуру.

Відстань між точками

Нехай на площині в декартовій прямокутній системі координат xOy задано точки $A(x_A, y_A)$ і $B(x_B, y_B)$.

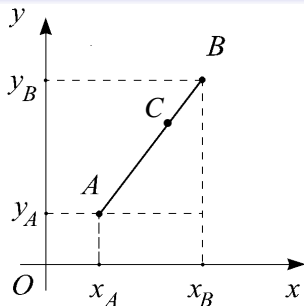


Відстань між точками A і B (тобто довжина відрізка AB) виражається формулою

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2},$$

яка є очевидним наслідком теореми Піфагора для трикутника ANB .

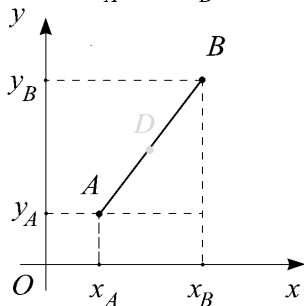
Поділ відрізка



Точка C відрізка AB , яка ділить його в заданому відношенні λ (тобто $\lambda = \frac{AC}{CB}$), має координати

$$x_C = \frac{\lambda x_B + x_A}{\lambda + 1}, \quad y_C = \frac{\lambda y_B + y_A}{\lambda + 1}$$

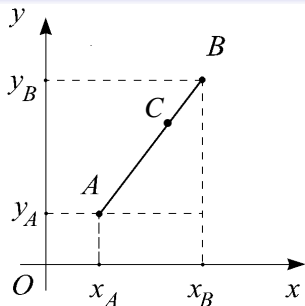
(доведення цих формул див. у прикладі 7).



Зокрема, при $\lambda = 1$ отримуємо координати середини відрізка AB — точки D :

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_D = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

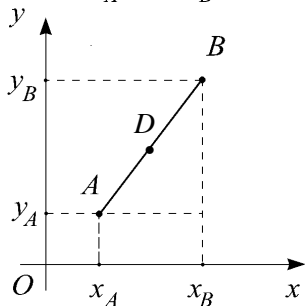
Поділ відрізка



Точка C відрізка AB , яка ділить його в заданому відношенні λ (тобто $\lambda = \frac{AC}{CB}$), має координати

$$x_C = \frac{\lambda x_B + x_A}{\lambda + 1}, \quad y_C = \frac{\lambda y_B + y_A}{\lambda + 1}$$

(доведення цих формул див. у прикладі 7).



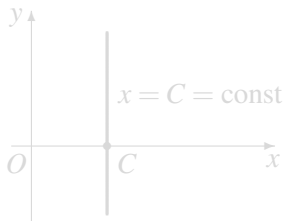
Зокрема, при $\lambda = 1$ отримуємо координати **середини** відрізка AB — точки D :

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_D = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Рівняння прямої

Рівняння прямої має вигляд $ax + by + c = 0$, де a, b, c — деякі числа, і, принаймні, хоча б одне з чисел a, b не дорівнює нулю.

- Якщо $b = 0$, то $a \neq 0$ і рівняння прямої $ax + c = 0$ переписується у вигляді $x = -\frac{c}{a} = \text{const}$.

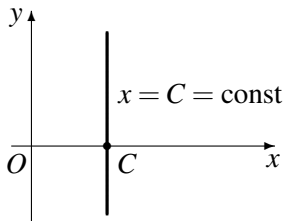


Пряма $x = C$ паралельна осі Oy при будь-якому значенні сталої $C \neq 0$ і співпадає з віссю Ox при $C = 0$.

Рівняння прямої

Рівняння прямої має вигляд $ax + by + c = 0$, де a, b, c — деякі числа, і, принаймні, хоча б одне з чисел a, b не дорівнює нулю.

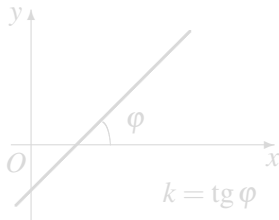
- Якщо $b = 0$, то $a \neq 0$ і рівняння прямої $ax + c = 0$ переписується у вигляді $x = -\frac{c}{a} = \text{const}$.



Пряма $x = C$ паралельна осі Oy при будь-якому значенні сталої $C \neq 0$ і співпадає з віссю Ox при $C = 0$.

Рівняння прямої

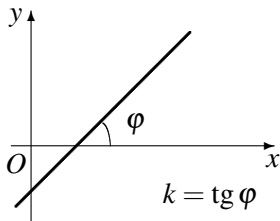
- Якщо $b \neq 0$, то рівнянню прямої $ax + by + c = 0$ після ділення обох частин рівності на b можна надати вигляду $y = kx + m$, при цьому число k називають **кутовим коефіцієнтом** прямої.



Кутовий коефіцієнт прямої дорівнює тангенсу кута, який відлічується від додатнього напрямку осі Ox до прямої в додатньому напрямку, тобто проти руху годинникової стрілки.

Рівняння прямої

- Якщо $b \neq 0$, то рівнянню прямої $ax + by + c = 0$ після ділення обох частин рівності на b можна надати вигляду $y = kx + m$, при цьому число k називають **кутовим коефіцієнтом** прямої.

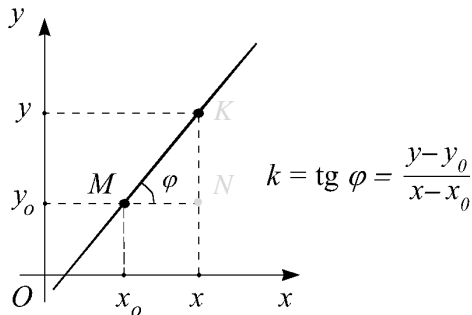


Кутовий коефіцієнт прямої дорівнює тангенсу кута, який відлічується від додатнього напрямку осі Ox до прямої в додатньому напрямку, тобто проти руху годинникової стрілки.

Рівняння прямої (кутовий коефіцієнт і точка)

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k , яка проходить через точку $M(x_0, y_0)$, має вигляд

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

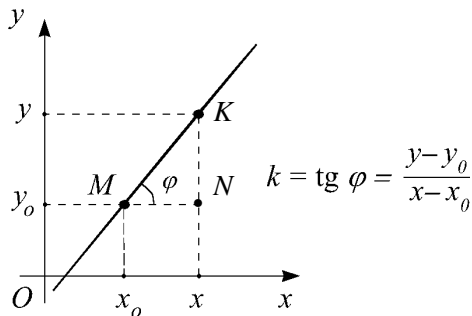


Це рівняння легко отримуємо як наслідок означення тангенса кута φ в трикутнику KNM .

Рівняння прямої (кутовий коефіцієнт і точка)

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k , яка проходить через точку $M(x_0, y_0)$, має вигляд

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

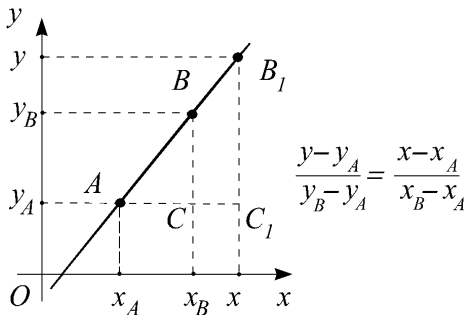


Це рівняння легко отримуємо як наслідок означення тангенса кута φ в трикутнику KNM .

Рівняння прямої, що проходить через дві точки

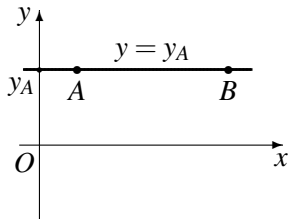
Рівняння прямої, що проходить через точки $A(x_A, y_A)$ і $B(x_B, y_B)$ у випадку, коли пряма AB не паралельна координатним осям Ox , Oy і не співпадає з ними, є наслідком подібності трикутників ABC і AB_1C_1 і записується у вигляді

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}.$$

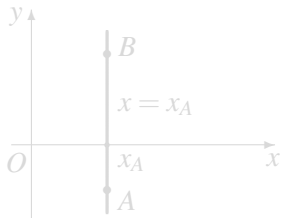


Рівняння прямої (частинні випадки)

Якщо пряма AB паралельна осі Ox або співпадає з Ox , то її рівняння має вигляд $y = y_A$,

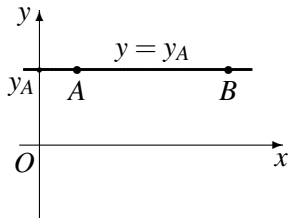


а якщо вона паралельна осі Oy або співпадає з Oy , то рівняння прямої записується у вигляді $x = x_A$.

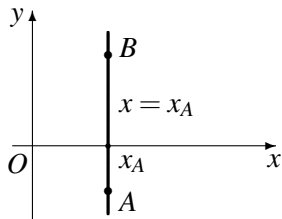


Рівняння прямої (частинні випадки)

Якщо пряма AB паралельна осі Ox або співпадає з Ox , то її рівняння має вигляд $y = y_A$,



а якщо вона паралельна осі Oy або співпадає з Oy , то рівняння прямої записується у вигляді $x = x_A$.



Розміщення двох прямих

Щоб знайти спільні точки прямих $l_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ і $l_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, необхідно розв'язати систему

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

При цьому можливі три випадки (розглянемо їх у припущенні, що $a_2, b_2, c_2 \neq 0$):

1) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

В цьому випадку система (1) має єдиний розв'язок (позначимо його (x_0, y_0)), а прямі l_1 і l_2 перетинаються в точці (x_0, y_0) ;

2) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

В цьому випадку система (1) не має розв'язків і $l_1 \parallel l_2$;

3) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

В цьому випадку система (1) має нескінченну множину розв'язків, а прямі l_1 і l_2 при цьому співпадають.

Умови паралельності і перпендикулярності прямих

Нехай тепер задані прямі

$$l_1: y = k_1x + m_1 \quad \text{і} \quad l_2: y = k_2x + m_2.$$

Умови паралельності і перпендикулярності прямих

l_1 і l_2 мають вигляд:

$$l_1 \parallel l_2 \iff \begin{cases} k_1 = k_2, \\ m_1 \neq m_2, \end{cases} \quad l_1 \perp l_2 \iff k_1 k_2 = -1.$$

Приклад 1. Записати рівняння прямих, які проходять через точку $M(3; -2)$ відповідно паралельно і перпендикулярно до прямої $l: y = 4x + 3$.

Розв'язання. Нехай пряма l_1 проходить через точку M і $l_1 \parallel l$. Тоді за умовою паралельності прямих її кутовий коефіцієнт k_{l_1} дорівнює кутовому коефіцієнту k_l прямої l , тобто $k_{l_1} = 4$. Рівняння прямої l_1 запишемо за формулою $y - y_M = k_{l_1}(x - x_M)$, а саме:

$$y - (-2) = 4(x - 3) \iff y = 4x - 14.$$

Умови паралельності і перпендикулярності прямих

Нехай тепер задані прямі

$$l_1: y = k_1x + m_1 \quad \text{і} \quad l_2: y = k_2x + m_2.$$

Умови паралельності і перпендикулярності прямих

l_1 і l_2 мають вигляд:

$$l_1 \parallel l_2 \iff \begin{cases} k_1 = k_2, \\ m_1 \neq m_2, \end{cases} \quad l_1 \perp l_2 \iff k_1 k_2 = -1.$$

Приклад 1. Записати рівняння прямих, які проходять через точку $M(3; -2)$ відповідно паралельно і перпендикулярно до прямої $l: y = 4x + 3$.

Розв'язання. Нехай пряма l_1 проходить через точку M і $l_1 \parallel l$. Тоді за умовою паралельності прямих її кутовий коефіцієнт k_{l_1} дорівнює кутовому коефіцієнту k_l прямої l , тобто $k_{l_1} = 4$. Рівняння прямої l_1 запишемо за формулою $y - y_M = k_{l_1}(x - x_M)$, а саме:

$$y - (-2) = 4(x - 3) \iff y = 4x - 14.$$

Умови паралельності і перпендикулярності прямих

Нехай тепер задані прямі

$$l_1: y = k_1x + m_1 \quad \text{і} \quad l_2: y = k_2x + m_2.$$

Умови паралельності і перпендикулярності прямих

l_1 і l_2 мають вигляд:

$$l_1 \parallel l_2 \iff \begin{cases} k_1 = k_2, \\ m_1 \neq m_2, \end{cases} \quad l_1 \perp l_2 \iff k_1 k_2 = -1.$$

Приклад 1. Записати рівняння прямих, які проходять через точку $M(3; -2)$ відповідно паралельно і перпендикулярно до прямої $l: y = 4x + 3$.

Розв'язання. Нехай пряма l_1 проходить через точку M і $l_1 \parallel l$. Тоді за **умовою паралельності прямих** її кутовий коефіцієнт k_{l_1} дорівнює кутовому коефіцієнту k_l прямої l , тобто $k_{l_1} = 4$. Рівняння прямої l_1 запишемо за формулою $y - y_M = k_{l_1}(x - x_M)$, а саме:

$$y - (-2) = 4(x - 3) \iff y = 4x - 14.$$

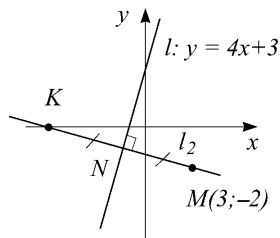
Умови паралельності і перпендикулярності прямих

Пряма l_2 , яка проходить через точку M і така, що $l_2 \perp l$, в силу **умови перпендикулярності прямих** має кутовий коефіцієнт $k_{l_2} = -\frac{1}{k_l} = -\frac{1}{4}$. Її рівняння отримуємо за формулою $y - y_M = k_{l_2}(x - x_M)$, а саме:

$$y - (-2) = -\frac{1}{4}(x - 3) \iff y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}.$$

Відповідь: $l \parallel l_1: y = 4x - 14$; $l \perp l_2: y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$.

Приклад 2. Знайти координати точки K , яка симетрична точці $M(3; -2)$ відносно прямої $l: y = 4x + 3$.



Розв'язання. Точка K лежить на прямій l_2 , яка проходить через точку M і перпендикулярна до прямої l (див. мал.). Рівняння прямої l_2 має вигляд $y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$ (див. попередній приклад).

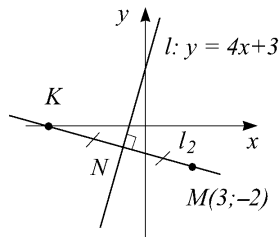
Умови паралельності і перпендикулярності прямих

Пряма l_2 , яка проходить через точку M і така, що $l_2 \perp l$, в силу **умови перпендикулярності прямих** має кутовий коефіцієнт $k_{l_2} = -\frac{1}{k_l} = -\frac{1}{4}$. Її рівняння отримуємо за формулою $y - y_M = k_{l_2}(x - x_M)$, а саме:

$$y - (-2) = -\frac{1}{4}(x - 3) \iff y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}.$$

Відповідь: $l \parallel l_1: y = 4x - 14$; $l \perp l_2: y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$.

Приклад 2. Знайти координати точки K , яка симетрична точці $M(3; -2)$ відносно прямої $l: y = 4x + 3$.



Розв'язання. Точка K лежить на прямій l_2 , яка проходить через точку M і перпендикулярна до прямої l (див. мал.). Рівняння прямої l_2 має вигляд $y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$ (див. попередній приклад).

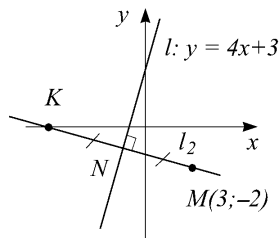
Умови паралельності і перпендикулярності прямих

Пряма l_2 , яка проходить через точку M і така, що $l_2 \perp l$, в силу **умови перпендикулярності прямих** має кутовий коефіцієнт $k_{l_2} = -\frac{1}{k_l} = -\frac{1}{4}$. Її рівняння отримуємо за формулою $y - y_M = k_{l_2}(x - x_M)$, а саме:

$$y - (-2) = -\frac{1}{4}(x - 3) \iff y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}.$$

Відповідь: $l \parallel l_1: y = 4x - 14$; $l \perp l_2: y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$.

Приклад 2. Знайти координати точки K , яка симетрична точці $M(3; -2)$ відносно прямої $l: y = 4x + 3$.



Розв'язання. Точка K лежить на прямій l_2 , яка проходить через точку M і перпендикулярна до прямої l (див. мал.). Рівняння прямої l_2 має вигляд $y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$ (див. попередній приклад).

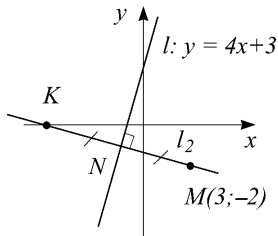
Умови паралельності і перпендикулярності прямих

Пряма l_2 , яка проходить через точку M і така, що $l_2 \perp l$, в силу **умови перпендикулярності прямих** має кутовий коефіцієнт $k_{l_2} = -\frac{1}{k_l} = -\frac{1}{4}$. Її рівняння отримуємо за формулою $y - y_M = k_{l_2}(x - x_M)$, а саме:

$$y - (-2) = -\frac{1}{4}(x - 3) \iff y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}.$$

Відповідь: $l \parallel l_1: y = 4x - 14$; $l \perp l_2: y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$.

Приклад 2. Знайти координати точки K , яка симетрична точці $M(3; -2)$ відносно прямої $l: y = 4x + 3$.



Розв'язання. Точка K лежить на прямій l_2 , яка проходить через точку M і перпендикулярна до прямої l (див. мал.). Рівняння прямої l_2 має вигляд $y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$ (див. попередній приклад).

Умови паралельності і перпендикулярності прямих

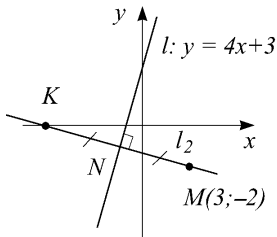
Тепер знаходимо координати точки перетину прямих

$l: y = 4x + 3$ і $l_2: y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y = 4x + 3, \\ y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}, \end{cases} \iff \begin{cases} y = 4x + 3, \\ 4x + 3 = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y = 4x + 3, \\ x = -1. \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1, \\ y = -1. \end{cases}$$

У такий спосіб знайдено точку $N(-1; -1)$ – точку перетину прямих l і l_2 .



Враховуючи, що N – середина відрізка MK , і використовуючи формули координат середини відрізка, знаходимо координати точки $K(x_K, y_K)$:

$$\begin{cases} \frac{x_K + 3}{2} = -1, \\ \frac{y_K - 2}{2} = -1, \end{cases} \iff \begin{cases} x_K = -5, \\ y_K = 0. \end{cases}$$

Відповідь: $K(-5; 0)$.

Умови паралельності і перпендикулярності прямих

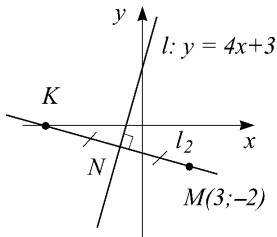
Тепер знаходимо координати точки перетину прямих

$l: y = 4x + 3$ і $l_2: y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y = 4x + 3, \\ y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}, \end{cases} \iff \begin{cases} y = 4x + 3, \\ 4x + 3 = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y = 4x + 3, \\ x = -1. \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1, \\ y = -1. \end{cases}$$

У такий спосіб знайдено точку $N(-1; -1)$ – точку перетину прямих l і l_2 .



Враховуючи, що N – середина відрізка MK , і використовуючи формули координат середини відрізка, знаходимо координати точки $K(x_K, y_K)$:

$$\begin{cases} \frac{x_K + 3}{2} = -1, \\ \frac{y_K - 2}{2} = -1, \end{cases} \iff \begin{cases} x_K = -5, \\ y_K = 0. \end{cases}$$

Відповідь: $K(-5; 0)$.

Умови паралельності і перпендикулярності прямих

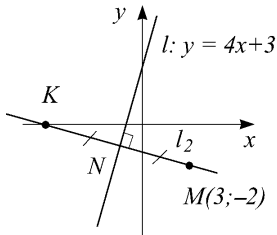
Тепер знаходимо координати точки перетину прямих

$l: y = 4x + 3$ і $l_2: y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y = 4x + 3, \\ y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}, \end{cases} \iff \begin{cases} y = 4x + 3, \\ 4x + 3 = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y = 4x + 3, \\ x = -1. \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1, \\ y = -1. \end{cases}$$

У такий спосіб знайдено точку $N(-1; -1)$ – точку перетину прямих l і l_2 .



Враховуючи, що N – середина відрізка MK , і використовуючи формули координат середини відрізка, знаходимо координати точки $K(x_K, y_K)$:

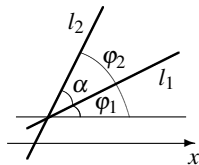
$$\begin{cases} \frac{x_K + 3}{2} = -1, \\ \frac{y_K - 2}{2} = -1, \end{cases} \iff \begin{cases} x_K = -5, \\ y_K = 0. \end{cases}$$

Відповідь: $K(-5; 0)$.

Кут між прямими

Якщо $k_1 \neq k_2$ і $k_1 \cdot k_2 \neq -1$, то **гострий кут α між прямими**
 $l_1: y = k_1x + m_1$ і $l_2: y = k_2x + m_2$ обчислюється за формулою

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|,$$



яка є наслідком аналогічної формули для тангенса різниці кутів:

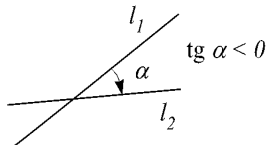
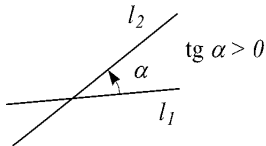
$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2},$$

де $k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1$ и $k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2$.

Інколи корисно розрізняти напрямок відліку гострого кута α .

Якщо $\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} > 0$, то відлік гострого кута α здійснюється від прямої l_1 до прямої l_2 в додатньому напрямку, а якщо

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} < 0$, – то у від'ємному:



Відстань від точки до прямої і відстань між паралельними прямими

Наведемо тепер формули для знаходження відстані від точки до прямої, а також відстані між паралельними прямими.

Відстань $\rho(M, l)$ від точки $M(x_0, y_0)$ до прямої $l: ax + by + c = 0$ знаходиться за формулою

$$\rho(M, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

частинним випадком якої при $l: y = kx + m$ є формула

$$\rho(M, l) = \frac{|y_0 - kx_0 - m|}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

Відстань $d(l_1, l_2)$ між паралельними прямими $l_1: y = kx + m_1$ і $l_2: y = kx + m_2$ знаходиться за формулою

$$d(l_1, l_2) = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

Відстань від точки до прямої і відстань між паралельними прямими

Наведемо тепер формули для знаходження відстані від точки до прямої, а також відстані між паралельними прямими.

Відстань $\rho(M, l)$ від точки $M(x_0, y_0)$ до прямої $l: ax + by + c = 0$ знаходиться за формулою

$$\rho(M, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

частинним випадком якої при $l: y = kx + m$ є формула

$$\rho(M, l) = \frac{|y_0 - kx_0 - m|}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

Відстань $d(l_1, l_2)$ між паралельними прямими $l_1: y = kx + m_1$ і $l_2: y = kx + m_2$ знаходиться за формулою

$$d(l_1, l_2) = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

Відстань від точки до прямої і відстань між паралельними прямими

Наведемо тепер формули для знаходження відстані від точки до прямої, а також відстані між паралельними прямими.

Відстань $\rho(M, l)$ від точки $M(x_0, y_0)$ до прямої $l: ax + by + c = 0$ знаходиться за формулою

$$\rho(M, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

частинним випадком якої при $l: y = kx + m$ є формула

$$\rho(M, l) = \frac{|y_0 - kx_0 - m|}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

Відстань $d(l_1, l_2)$ між паралельними прямими $l_1: y = kx + m_1$ і $l_2: y = kx + m_2$ знаходиться за формулою

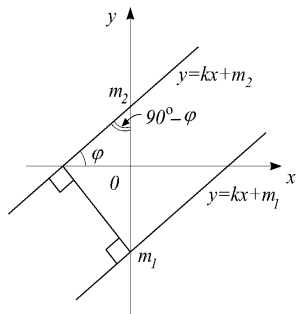
$$d(l_1, l_2) = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

Відстань між паралельними прямими

Для доведення формули

$$d(l_1, l_2) = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{k^2 + 1}} \quad (2)$$

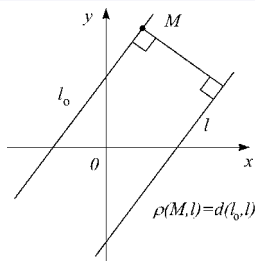
позначимо через φ гострий кут, який утворюють прямі l_1 і l_2



з віссю Ox . Тоді відстань між паралельними прямими l_1 і l_2 – це довжина спільного перпендикуляра до цих прямих, який є катетом, протилежним куту $90^\circ - \varphi$, в прямокутному трикутнику з гіпотенузою $|m_1 - m_2|$ (див. мал.). Тому

$$\begin{aligned} d(l_1, l_2) &= |m_1 - m_2| \sin(90^\circ - \varphi) = \\ &= |m_1 - m_2| \cos \varphi = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi + 1}} = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{k^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Відстань від точки до прямої



Для доведення формули

$$\rho(M, l) = \frac{|y_0 - kx_0 - m|}{\sqrt{k^2 + 1}} \quad (3)$$

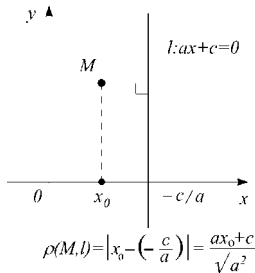
спочатку запишемо рівняння прямої $l_0 \parallel l$, що проходить через точку $M(x_0, y_0)$ (див. мал.):
 $y - y_0 = k(x - x_0) \iff y = kx + y_0 - kx_0$.

Тепер в силу рівності $\rho(M, l) = d(l_0, l)$ з формули (2) впливає формула (3).

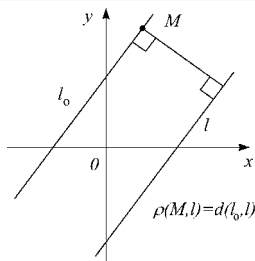
Нарешті, формула

$$\rho(M, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (4)$$

при $b \neq 0$ рівносильна формулі (3), а при $b = 0$ істинність формули (4) легко перевіряється, оскільки в цьому випадку відстань $\rho(M, l)$ дорівнює модулю різниці між абсцисою точки M і абсцисою точок прямої l (див. мал.).



Відстань від точки до прямої



Для доведення формули

$$\rho(M, l) = \frac{|y_0 - kx_0 - m|}{\sqrt{k^2 + 1}} \quad (3)$$

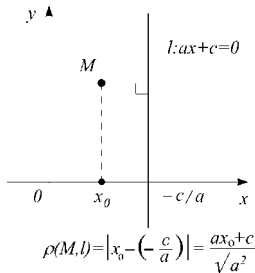
спочатку запишемо рівняння прямої $l_0 \parallel l$, що проходить через точку $M(x_0, y_0)$ (див. мал.):
 $y - y_0 = k(x - x_0) \iff y = kx + y_0 - kx_0$.

Тепер в силу рівності $\rho(M, l) = d(l_0, l)$ з формули (2) випливає формула (3).

Нарешті, формула

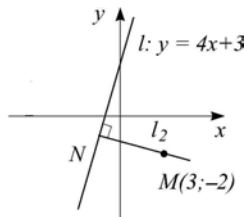
$$\rho(M, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (4)$$

при $b \neq 0$ рівносильна формулі (3), а при $b = 0$ істинність формули (4) легко перевіряється, оскільки в цьому випадку відстань $\rho(M, l)$ дорівнює модулю різниці між абсцисою точки M і абсцисою точок прямої l (див. мал.).



Відстань від точки до прямої

Приклад 3. Знайти відстань від точки $M(3; -2)$ до прямої $l: y = 4x + 3$.



Розв'язання. Шукана відстань дорівнює довжині перпендикуляра MN , проведеного з точки M до прямої l . Точку $N(-1; -1)$ знайдено в прикладі 2. Отже,

$$\rho(M, l) = MN = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (-1 + 2)^2} = \sqrt{17}.$$

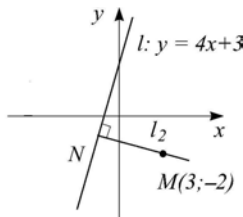
Розв'язання (2-й спосіб). Знаходимо шукану відстань за формулою (3):

$$\rho(M, l) = \frac{|-2 - 4 \cdot 3 - 3|}{\sqrt{4^2 + 1}} = \sqrt{17}.$$

Відповідь: $\rho(M, l) = \sqrt{17}$.

Відстань від точки до прямої

Приклад 3. Знайти відстань від точки $M(3; -2)$ до прямої $l: y = 4x + 3$.



Розв'язання. Шукана відстань дорівнює довжині перпендикуляра MN , проведеного з точки M до прямої l . Точку $N(-1; -1)$ знайдено в прикладі 2. Отже,

$$\rho(M, l) = MN = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (-1 + 2)^2} = \sqrt{17}.$$

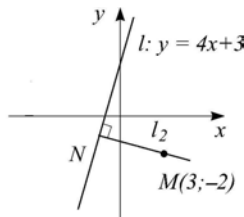
Розв'язання (2-й спосіб). Знаходимо шукану відстань за формулою (3):

$$\rho(M, l) = \frac{|-2 - 4 \cdot 3 - 3|}{\sqrt{4^2 + 1}} = \sqrt{17}.$$

Відповідь: $\rho(M, l) = \sqrt{17}$.

Відстань від точки до прямої

Приклад 3. Знайти відстань від точки $M(3; -2)$ до прямої $l: y = 4x + 3$.



Розв'язання. Шукана відстань дорівнює довжині перпендикуляра MN , проведеного з точки M до прямої l . Точку $N(-1; -1)$ знайдено в прикладі 2. Отже,

$$\rho(M, l) = MN = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (-1 + 2)^2} = \sqrt{17}.$$

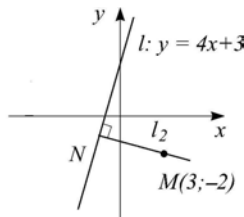
Розв'язання (2-й спосіб). Знаходимо шукану відстань за формулою (3):

$$\rho(M, l) = \frac{|-2 - 4 \cdot 3 - 3|}{\sqrt{4^2 + 1}} = \sqrt{17}.$$

Відповідь: $\rho(M, l) = \sqrt{17}$.

Відстань від точки до прямої

Приклад 3. Знайти відстань від точки $M(3; -2)$ до прямої $l: y = 4x + 3$.



Розв'язання. Шукана відстань дорівнює довжині перпендикуляра MN , проведеного з точки M до прямої l . Точку $N(-1; -1)$ знайдено в прикладі 2. Отже,

$$\rho(M, l) = MN = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (-1 + 2)^2} = \sqrt{17}.$$

Розв'язання (2-й спосіб). Знаходимо шукану відстань за формулою (3):

$$\rho(M, l) = \frac{|-2 - 4 \cdot 3 - 3|}{\sqrt{4^2 + 1}} = \sqrt{17}.$$

Відповідь: $\rho(M, l) = \sqrt{17}$.

Рівняння кола

Рівняння кола радіуса R з центром в точці (x_0, y_0) має вигляд: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

- Відзначимо також, що рівняння

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0$ задає в координатній площині точку $(x_0; y_0)$, а рівняння

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = c$, де $c < 0$, не задає жодної геометричної фігури, оскільки

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = c < 0 \iff (x, y) \in \emptyset.$$

Приклад 4. Знайти радіус і центр кола

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0.$$

Розв'язання. Виділяючи повні квадрати в лівій частині рівняння, отримуємо

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0 \iff$$

$$\iff x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 - 9 - 4 + 12 = 0 \iff$$

$$\iff (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 1.$$

Отже, центром кола є точка $(3; -2)$, а радіус кола дорівнює 1.

Відповідь: центр – точка $(3; -2)$, радіус $R = 1$.

Рівняння кола

Рівняння кола радіуса R з центром в точці (x_0, y_0) має вигляд: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

- Відзначимо також, що рівняння

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0$ задає в координатній площині точку $(x_0; y_0)$, а рівняння

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = c$, де $c < 0$, не задає жодної геометричної фігури, оскільки

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = c < 0 \iff (x, y) \in \emptyset.$$

Приклад 4. Знайти радіус і центр кола

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0.$$

Розв'язання. Виділяючи повні квадрати в лівій частині рівняння, отримуємо

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0 \iff$$

$$\iff x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 - 9 - 4 + 12 = 0 \iff$$

$$\iff (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 1.$$

Отже, центром кола є точка $(3; -2)$, а радіус кола дорівнює 1.

Відповідь: центр – точка $(3; -2)$, радіус $R = 1$.

Рівняння кола

Рівняння кола радіуса R з центром в точці (x_0, y_0) має вигляд: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

- Відзначимо також, що рівняння

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0$ задає в координатній площині точку $(x_0; y_0)$, а рівняння

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = c$, де $c < 0$, не задає жодної геометричної фігури, оскільки

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = c < 0 \iff (x, y) \in \emptyset.$$

Приклад 4. Знайти радіус і центр кола

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0.$$

Розв'язання. Виділяючи повні квадрати в лівій частині рівняння, отримуємо

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0 \iff$$

$$\iff x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 - 9 - 4 + 12 = 0 \iff$$

$$\iff (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 1.$$

Отже, центром кола є точка $(3; -2)$, а радіус кола дорівнює 1.

Відповідь: центр – точка $(3; -2)$, радіус $R = 1$.

Рівняння кола

Рівняння кола радіуса R з центром в точці (x_0, y_0) має вигляд: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

- Відзначимо також, що рівняння

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0$ задає в координатній площині точку $(x_0; y_0)$, а рівняння

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = c$, де $c < 0$, не задає жодної геометричної фігури, оскільки

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = c < 0 \iff (x, y) \in \emptyset.$$

Приклад 4. Знайти радіус і центр кола

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0.$$

Розв'язання. Виділяючи повні квадрати в лівій частині рівняння, отримуємо

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0 \iff$$

$$\iff x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 - 9 - 4 + 12 = 0 \iff$$

$$\iff (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 1.$$

Отже, центром кола є точка $(3; -2)$, а радіус кола дорівнює 1.

Відповідь: центр – точка $(3; -2)$, радіус $R = 1$.

Рівняння кола

Рівняння кола радіуса R з центром в точці (x_0, y_0) має вигляд: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

- Відзначимо також, що рівняння

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0$ задає в координатній площині точку $(x_0; y_0)$, а рівняння

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = c$, де $c < 0$, не задає жодної геометричної фігури, оскільки

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = c < 0 \iff (x, y) \in \emptyset.$$

Приклад 4. Знайти радіус і центр кола

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0.$$

Розв'язання. Виділяючи повні квадрати в лівій частині рівняння, отримуємо

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0 \iff$$

$$\iff x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 - 9 - 4 + 12 = 0 \iff$$

$$\iff (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 1.$$

Отже, центром кола є точка $(3; -2)$, а радіус кола дорівнює 1.

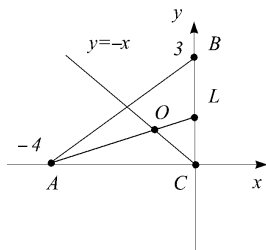
Відповідь: центр – точка $(3; -2)$, радіус $R = 1$.

Задача

Приклад 5. Задано точки $A(-4;0)$, $B(0;3)$, $C(0;0)$.

Записати рівняння бісектриси AL трикутника ABC .

Знайти координати центра O кола, вписаного в трикутник ABC .



Розв'язання. Знайдемо довжини відрізків AB , BC , AC : $BC = 3$, $AC = 4$, тому $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

За основною властивістю бісектриси AL трикутника ABC (див. мал.) маємо: $CL : LB = AC : AB = 4 : 5$, тобто точка L ділить відрізок CB у відношенні $\lambda = 4/5$.

Тому координати точки L знаходимо за формулами

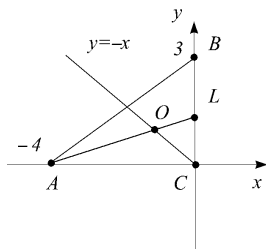
$$x_L = \frac{\lambda x_B + x_C}{\lambda + 1} = 0, \quad y_L = \frac{\lambda y_B + y_C}{\lambda + 1} = \frac{\frac{4}{5} \cdot 3 + 0}{\frac{4}{5} + 1} = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{9}{5}} = \frac{4}{3}.$$

Задача

Приклад 5. Задано точки $A(-4;0)$, $B(0;3)$, $C(0;0)$.

Записати рівняння бісектриси AL трикутника ABC .

Знайти координати центра O кола, вписаного в трикутник ABC .



Розв'язання. Знайдемо довжини відрізків AB , BC , AC : $BC = 3$, $AC = 4$, тому $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

За основною властивістю бісектриси AL трикутника ABC (див. мал.) маємо: $CL : LB = AC : AB = 4 : 5$, тобто точка L ділить відрізок CB у відношенні $\lambda = 4/5$.

Тому координати точки L знаходимо за формулами

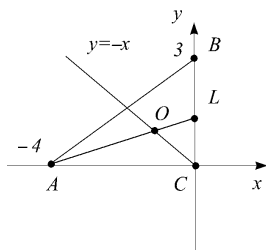
$$x_L = \frac{\lambda x_B + x_C}{\lambda + 1} = 0, \quad y_L = \frac{\lambda y_B + y_C}{\lambda + 1} = \frac{\frac{4}{5} \cdot 3 + 0}{\frac{4}{5} + 1} = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{9}{5}} = \frac{4}{3}.$$

Задача

Приклад 5. Задано точки $A(-4;0)$, $B(0;3)$, $C(0;0)$.

Записати рівняння бісектриси AL трикутника ABC .

Знайти координати центра O кола, вписаного в трикутник ABC .



Розв'язання. Знайдемо довжини відрізків AB , BC , AC : $BC = 3$, $AC = 4$, тому $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

За основною властивістю бісектриси AL трикутника ABC (див. мал.) маємо: $CL : LB = AC : AB = 4 : 5$, тобто точка L ділить відрізок CB у відношенні $\lambda = 4/5$.

Тому координати точки L знаходимо за формулами

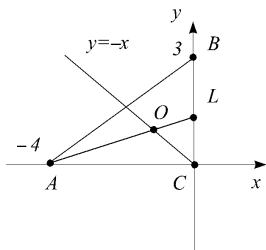
$$x_L = \frac{\lambda x_B + x_C}{\lambda + 1} = 0, \quad y_L = \frac{\lambda y_B + y_C}{\lambda + 1} = \frac{\frac{4}{5} \cdot 3 + 0}{\frac{4}{5} + 1} = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{9}{5}} = \frac{4}{3}.$$

Задача

Приклад 5. Задано точки $A(-4;0)$, $B(0;3)$, $C(0;0)$.

Записати рівняння бісектриси AL трикутника ABC .

Знайти координати центра O кола, вписанного в трикутник ABC .



Розв'язання. Знайдемо довжини відрізків AB, BC, AC : $BC = 3, AC = 4$, тому $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

За основною властивістю бісектриси AL трикутника ABC (див. мал.) маємо: $CL : LB = AC : AB = 4 : 5$, тобто точка L ділить відрізок CB у відношенні $\lambda = 4/5$.

Тому координати точки L знаходимо за формулами

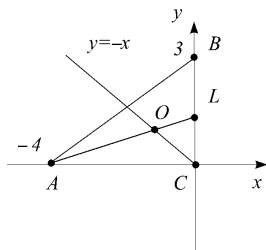
$$x_L = \frac{\lambda x_B + x_C}{\lambda + 1} = 0, \quad y_L = \frac{\lambda y_B + y_C}{\lambda + 1} = \frac{\frac{4}{5} \cdot 3 + 0}{\frac{4}{5} + 1} = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{9}{5}} = \frac{4}{3}.$$

Задача

Тепер рівняння прямої AL запишемо за формулою

$$\frac{y - y_A}{y_L - y_A} = \frac{x - x_A}{x_L - x_A} \iff \frac{y - 0}{\frac{4}{3} - 0} = \frac{x - (-4)}{0 - (-4)} \iff y = \frac{4}{3} \cdot \frac{x + 4}{4} \iff$$
$$\iff y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}.$$

Оскільки центр O кола, вписаного в $\triangle ABC$, є точкою перетину бісектрис, то його



координати задовольняють систему

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}, \\ y = -x, \end{cases}$$

де $y = -x$ — рівняння бісектриси кута C (див. мал.).

Розв'язком системи є пара $(-1; -1)$.

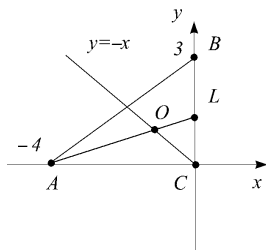
Відповідь: $AL: y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}; O(-1; -1)$.

Задача

Тепер рівняння прямої AL запишемо за формулою

$$\frac{y - y_A}{y_L - y_A} = \frac{x - x_A}{x_L - x_A} \iff \frac{y - 0}{\frac{4}{3} - 0} = \frac{x - (-4)}{0 - (-4)} \iff y = \frac{4}{3} \cdot \frac{x + 4}{4} \iff$$
$$\iff y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}.$$

Оскільки центр O кола, вписанного в $\triangle ABC$, є точкою перетину бісектрис, то його



координати задовольняють систему

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}, \\ y = -x, \end{cases}$$

де $y = -x$ — рівняння бісектриси кута C (див. мал.).

Розв'язком системи є пара $(-1; -1)$.

Відповідь: $AL: y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}; O(-1; -1)$.

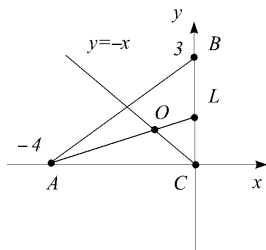
Задача

Тепер рівняння прямої AL запишемо за формулою

$$\frac{y - y_A}{y_L - y_A} = \frac{x - x_A}{x_L - x_A} \iff \frac{y - 0}{\frac{4}{3} - 0} = \frac{x - (-4)}{0 - (-4)} \iff y = \frac{4}{3} \cdot \frac{x + 4}{4} \iff$$

$$\iff y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}.$$

Оскільки центр O кола, вписанного в $\triangle ABC$, є точкою перетину бісектрис, то його



координати задовольняють систему

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}, \\ y = -x, \end{cases}$$

де $y = -x$ — рівняння бісектриси кута C (див. мал.).

Розв'язком системи є пара $(-1; -1)$.

Відповідь: $AL: y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}; O(-1; -1)$.

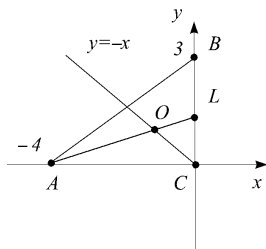
Задача

Тепер рівняння прямої AL запишемо за формулою

$$\frac{y - y_A}{y_L - y_A} = \frac{x - x_A}{x_L - x_A} \iff \frac{y - 0}{\frac{4}{3} - 0} = \frac{x - (-4)}{0 - (-4)} \iff y = \frac{4}{3} \cdot \frac{x + 4}{4} \iff$$

$$\iff y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}.$$

Оскільки центр O кола, вписанного в $\triangle ABC$, є точкою перетину бісектрис, то його



координати задовольняють систему

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}, \\ y = -x, \end{cases}$$

де $y = -x$ — рівняння бісектриси кута C (див. мал.).

Розв'язком системи є пара $(-1; -1)$.

Відповідь: $AL: y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}; \quad O(-1; -1)$.