Тригонометрія: основні тригонометричні функції

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 20 (частина перша)

Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Градусна і радіанна міра кута

Кути, як правило, вимірюють в градусах або в радіанах.
Градусна міра розгорнутого кута дорівнює 180°.
Прямий кут складає половину розгорнутого кута, його градусна міра дорівнює 90° (див. мал.).

Кут, в 90 разів менший від прямого кута, має градусну міру 1°.

Величину кута прийнято виражати також в радіанах.

Градусна і радіанна міра кута

Кути, як правило, вимірюють в градусах або в радіанах.
Градусна міра розгорнутого кута дорівнює 180°.
Прямий кут складає половину розгорнутого кута, його градусна міра дорівнює 90° (див. мал.).

Кут, в 90 разів менший від прямого кута, має градусну міру 1°.

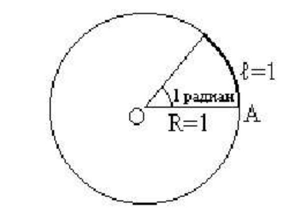
Величину кута принято виражати також в радіанах.

Градусна і радіанна міра кута

Розглянемо одиничне коло (тобто коло, радіус якого $R = 1$) і центральний кут, вершина якого розміщена в центрі кола – точці O.

Існує взаємозв'язок між величиною центрального кута і довжиною тієї дуги кола, яка знаходиться всередині цього кута: чим більший кут, тим довша дуга.

Тому величину центрального кута можна вимірювати довжиною дуги одиничного кола, яка міститься всередині цього кута.



Зокрема, якщо довжина такої дуги дорівнює 1, то кажуть, що величина кута дорівнює 1 радіан (див. мал.).

Градусна і радіанна міра кута

Аналогічно, при повороті точки вздовж одиничного кола на деякий кут величина кута повороту чисельно дорівнює довжині шляху, пройденого цією точкою.
Тому куту 360° відповідає кут 2π радіан (чисельно рівний довжині одиничного кола).
Куту 180° відповідає кут π радіан,
величина прямого кута дорівнює $\pi/2$ (назву одиниці вимірювання "радіан" зазвичай опускають) і т.п.

Градусна міра n° і радіанна міра α одного і того ж кута зв'язані між собою формулою переходу від градусної міри до радіанної і навпаки:

$$\alpha = \frac{\pi}{180^\circ} n^\circ .$$

Зокрема, якщо $\alpha = 1$, то $n^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$, тобто градусна міра кута 1 радіан наближено дорівнює 57°.

Градусна і радіанна міра кута

Аналогічно, при повороті точки вздовж одиничного кола на деякий кут величина кута повороту чисельно дорівнює довжині шляху, пройденого цією точкою.
Тому куту 360° відповідає кут 2π радіан (чисельно рівний довжині одиничного кола).
Куту 180° відповідає кут π радіан,
величина прямого кута дорівнює $\pi/2$ (назву одиниці вимірювання "радіан" зазвичай опускають) і т.п.

Градусна міра n° і радіанна міра α одного і того ж кута зв'язані між собою формулою переходу від градусної міри до радіанної і навпаки:

$$\alpha = \frac{\pi}{180^\circ} n^\circ .$$

Зокрема, якщо $\alpha = 1$, то $n^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$, тобто градусна міра кута 1 радіан наближено дорівнює 57°.

Градусна і радіанна міра кута

Аналогічно, при повороті точки вздовж одиничного кола на деякий кут величина кута повороту чисельно дорівнює довжині шляху, пройденого цією точкою.
Тому куту 360° відповідає кут 2π радіан (чисельно рівний довжині одиничного кола).
Куту 180° відповідає кут π радіан,
величина прямого кута дорівнює $\pi/2$ (назву одиниці вимірювання "радіан" зазвичай опускають) і т.п.

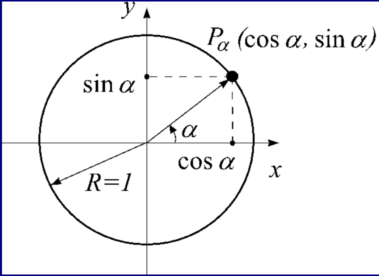
Градусна міра n° і радіанна міра α одного і того ж кута зв'язані між собою формулою переходу від градусної міри до радіанної і навпаки:

$$\alpha = \frac{\pi}{180^\circ} n^\circ .$$

Зокрема, якщо $\alpha = 1$, то $n^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$, тобто градусна міра кута 1 радіан наближено дорівнює 57°.

Означення основних тригонометричних функцій

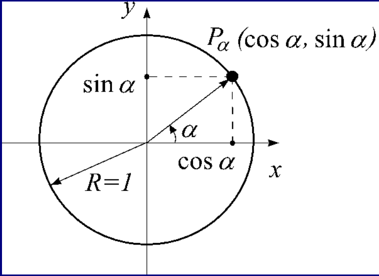
Розглянемо одиничне коло з центром у початку координат, а на ньому точку P_α, яка відповідає куту α радіан. При цьому кут α відраховується від напрямку осі Ox проти руху годинникової стрілки (або, іншими словами, в додатньому напрямку), якщо $\alpha > 0$, і в напрямку руху годинникової стрілки (тобто у від'ємному напрямку), якщо $\alpha < 0$.



- Ординату точки P_α називають синусом числа α і позначають $\sin\alpha$ (див. мал.).
- Абсциса цієї ж точки P_α називається косинусом числа α і позначається $\cos\alpha$ (див. мал.).

Означення основних тригонометричних функцій

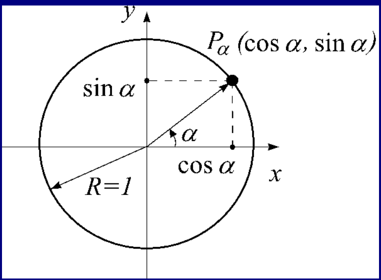
Розглянемо одиничне коло з центром у початку координат, а на ньому точку P_α, яка відповідає куту α радіан. При цьому кут α відраховується від напрямку осі Ox проти руху годинникової стрілки (або, іншими словами, в додатньому напрямку), якщо $\alpha > 0$, і в напрямку руху годинникової стрілки (тобто у від'ємному напрямку), якщо $\alpha < 0$.



- Ординату точки P_α називають синусом числа α і позначають $\sin\alpha$ (див. мал.).
- Абсциса цієї ж точки P_α називається косинусом числа α і позначається $\cos\alpha$ (див. мал.).

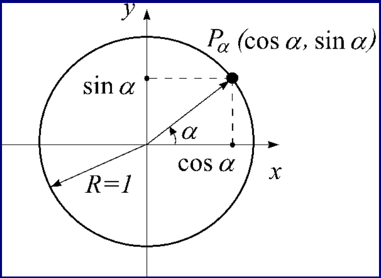
Означення основних тригонометричних функцій

Розглянемо одиничне коло з центром у початку координат, а на ньому точку P_α, яка відповідає куту α радіан. При цьому кут α відраховується від напрямку осі Ox проти руху годинникової стрілки (або, іншими словами, в додатньому напрямку), якщо $\alpha > 0$, і в напрямку руху годинникової стрілки (тобто у від'ємному напрямку), якщо $\alpha < 0$.



- Ординату точки P_α називають синусом числа α і позначають $\sin\alpha$ (див. мал.).
- Абсциса цієї ж точки P_α називається косинусом числа α і позначається $\cos\alpha$ (див. мал.).

Означення основних тригонометричних функцій



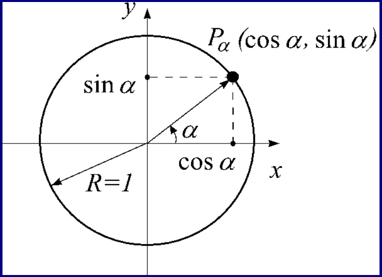
- Тангенс числа α означається рівністю

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,.$$

- Котангенс числа α означається рівністю

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,.$$

Означення основних тригонометричних функцій



- Тангенс числа α означається рівністю

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

- Котангенс числа α означається рівністю

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Значення основних тригонометричних функцій

Функції $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ визначені для всіх $\alpha \in \mathbf{R}$ і приймають значення з відрізка $[-1;1]$.

Очевидно, що функція $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ не визначена в тих точках, в яких $\cos\alpha = 0$.

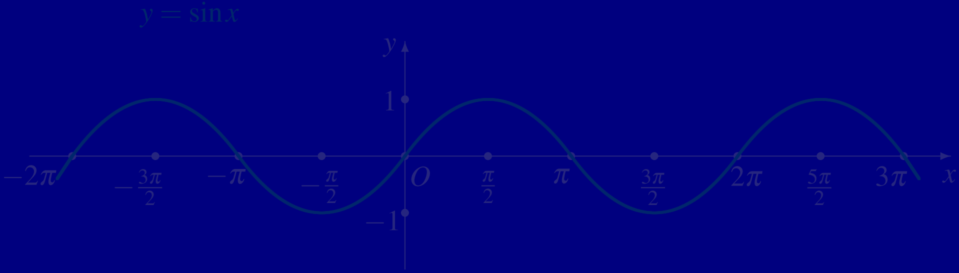
Аналогічно, функція $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ не визначена в тих точках, в яких $\sin\alpha = 0$.

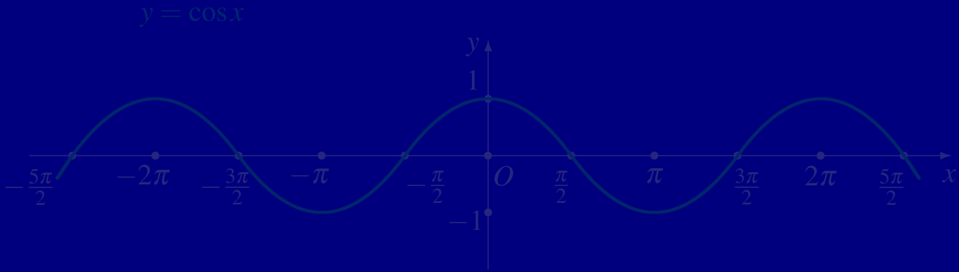
Значення основних тригонометричних функцій деяких кутів α наведено в таблиці:

α	0	$\frac{\pi}{6}(30^\circ)$	$\frac{\pi}{4}(45^\circ)$	$\frac{\pi}{3}(60^\circ)$	$\frac{\pi}{2}(90^\circ)$	$\pi(180^\circ)$	$\frac{3\pi}{2}(270^\circ)$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	н/визн.	0	н/визн.
$\operatorname{ctg}\alpha$	н/визн.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	н/визн.	0

Графіки основних тригонометричних функцій

Графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ зображено на мал.:

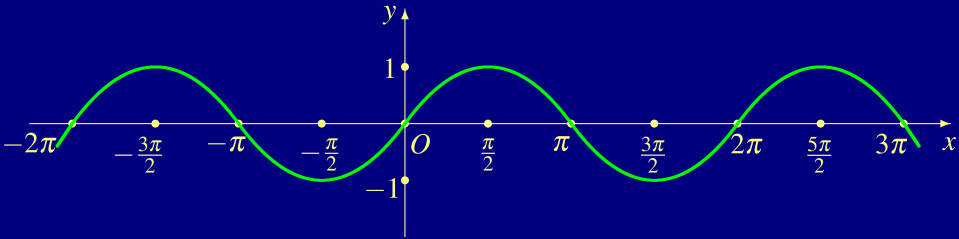




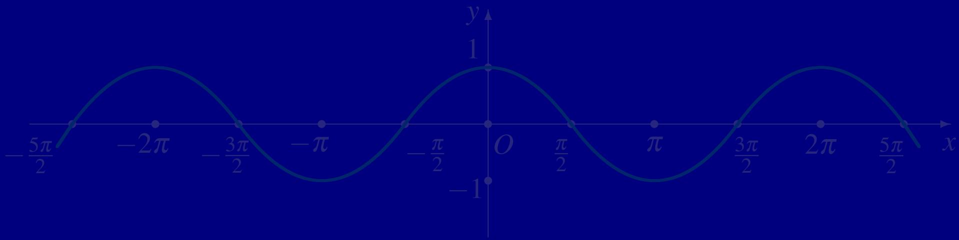
Графіки основних тригонометричних функцій

Графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ зображено на мал.:

$y = \sin x$

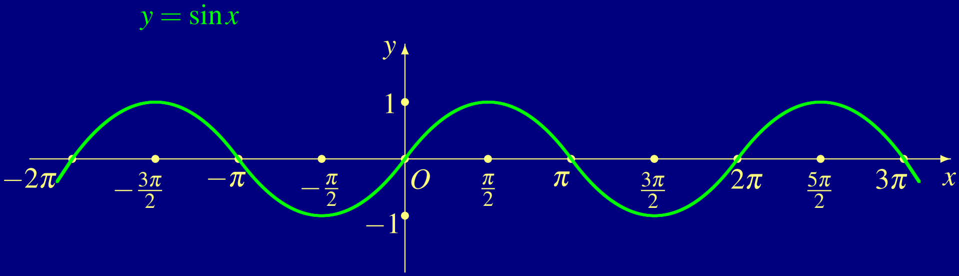


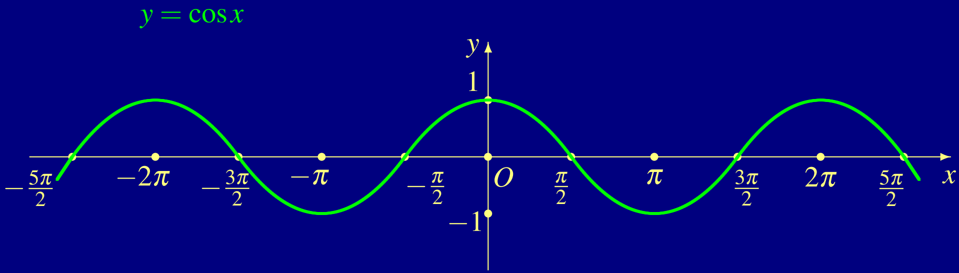
$y = \cos x$



Графіки основних тригонометричних функцій

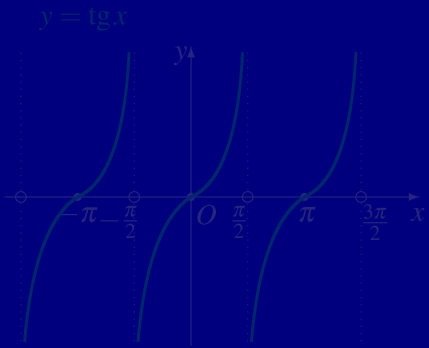
Графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ зображено на мал.:

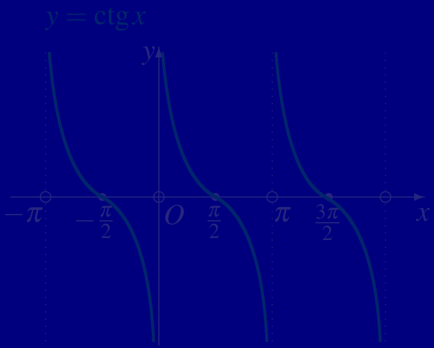




Графіки основних тригонометричних функцій

Графіки функцій $y = \mathrm{tg}\, x$ і $y = \mathrm{ctg}\, x$ зображено на мал.:

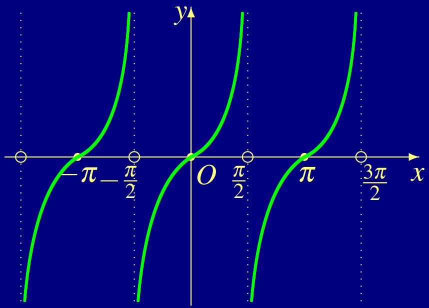




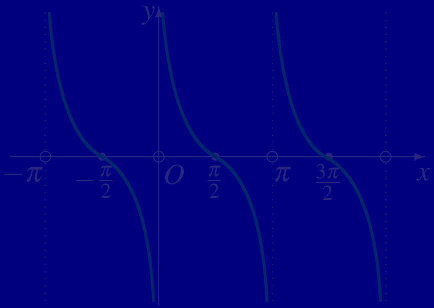
Графіки основних тригонометричних функцій

Графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ зображено на мал.:

$y = \operatorname{tg} x$

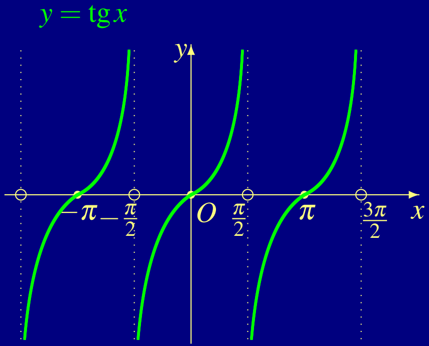


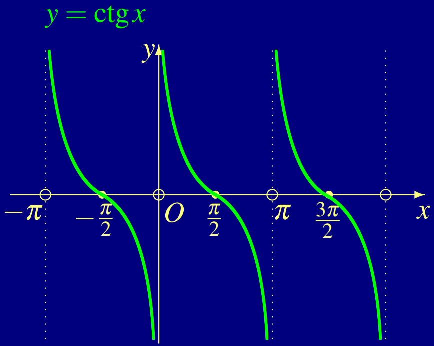
$y = \operatorname{ctg} x$



Графіки основних тригонометричних функцій

Графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ зображено на мал.:

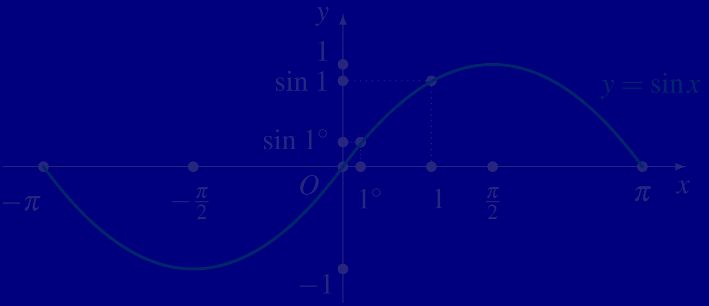




Приклад

Приклад 1. Що більше: $\sin 1^\circ$ чи $\sin 1$?

Розв'язання. Оскільки 1 радіан наближено дорівнює 57°, то кут 1 радіан більший, ніж кут 1°. Крім того, обидва ці кути в радіанах належать відрізку $[0, \pi/2]$. Враховуючи, що на цьому відрізку функція $y = \sin x$ зростає, отримуємо нерівність $\sin 1 > \sin 1^\circ$:

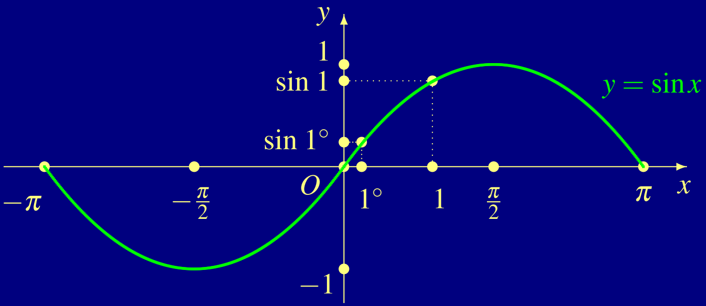


Відповідь: $\sin 1 > \sin 1^\circ$.

Приклад

Приклад 1. Що більше: $\sin 1^\circ$ чи $\sin 1$?

Розв'язання. Оскільки 1 радіан наближено дорівнює 57°, то кут 1 радіан більший, ніж кут 1°. Крім того, обидва ці кути в радіанах належать відрізку $[0, \pi/2]$. Враховуючи, що на цьому відрізку функція $y = \sin x$ зростає, отримуємо нерівність $\sin 1 > \sin 1^\circ$:

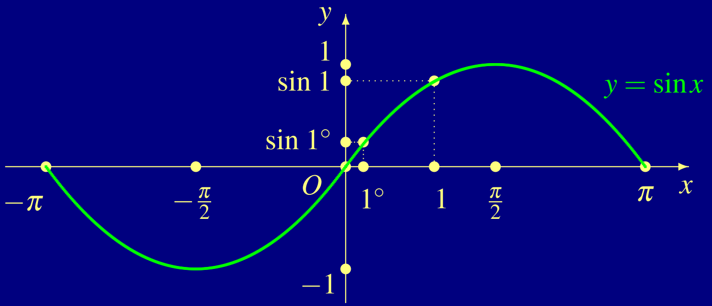


Відповідь: $\sin 1 > \sin 1^\circ$.

Приклад

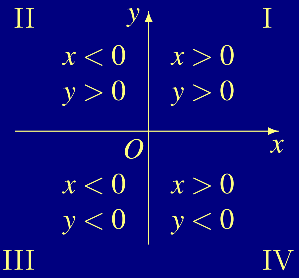
Приклад 1. Що більше: $\sin 1^\circ$ чи $\sin 1$?

Розв'язання. Оскільки 1 радіан наближено дорівнює 57°, то кут 1 радіан більший, ніж кут 1°. Крім того, обидва ці кути в радіанах належать відрізку $[0, \pi/2]$. Враховуючи, що на цьому відрізку функція $y = \sin x$ зростає, отримуємо нерівність $\sin 1 > \sin 1^\circ$:

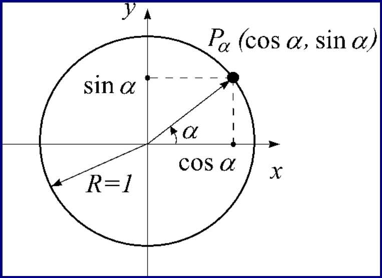


Відповідь: $\sin 1 > \sin 1^\circ$.

Знаки основних тригонометричних функцій

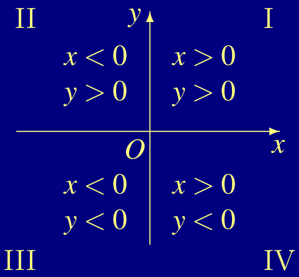


Декартову координатну площину умовно розбивають на чотири чверті (див. мал.). Точки, які лежать на координатних осях, не належать жодній з координатних чвертей.

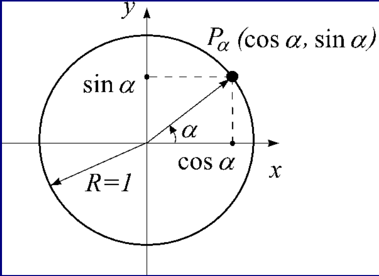


Кажуть, що кут α належить, наприклад, першій чверті одиничного кола, якщо відповідна йому точка P_α належить першій координатній чверті.

Знаки основних тригонометричних функцій



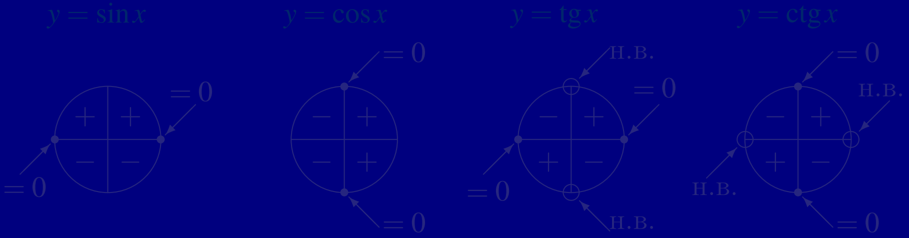
Декартову координатну площину умовно розбивають на чотири чверті (див. мал.). Точки, які лежать на координатних осях, не належать жодній з координатних чвертей.



Кажуть, що кут α належить, наприклад, першій чверті одиничного кола, якщо відповідна йому точка P_α належить першій координатній чверті.

Знаки основних тригонометричних функцій

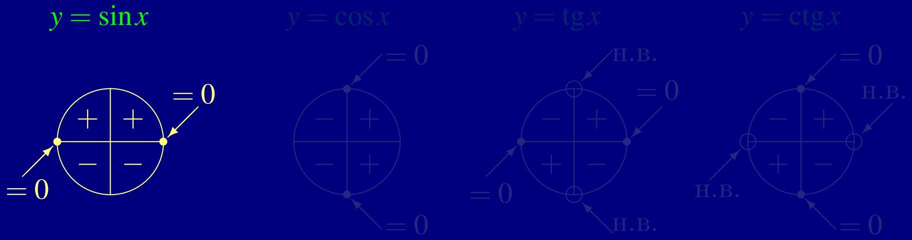
Широко застосовуються такі геометричні образи функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, на яких зображено знаки виразів $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ в різних чвертях одиничного кола:



На малюнках також вказані точки, в яких значення функцій дорівнюють нулю або не визначені.

Знаки основних тригонометричних функцій

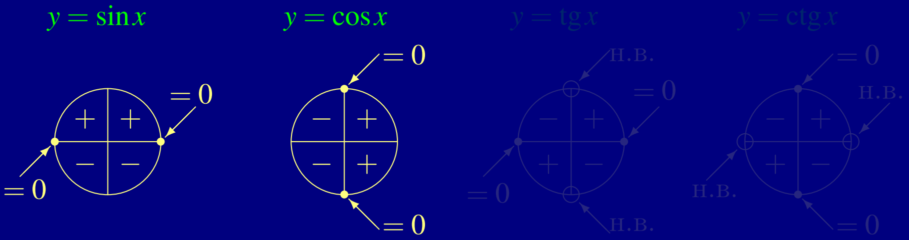
Широко застосовуються такі геометричні образи функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, на яких зображено знаки виразів $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ в різних чвертях одиничного кола:



На малюнках також вказані точки, в яких значення функцій дорівнюють нулю або не визначені.

Знаки основних тригонометричних функцій

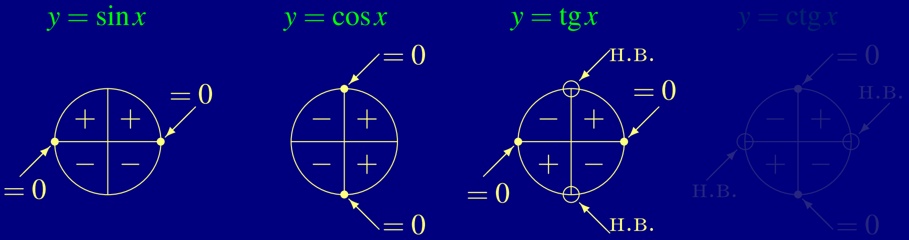
Широко застосовуються такі геометричні образи функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, на яких зображено знаки виразів $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ в різних чвертях одиничного кола:



На малюнках також вказані точки, в яких значення функцій дорівнюють нулю або не визначені.

Знаки основних тригонометричних функцій

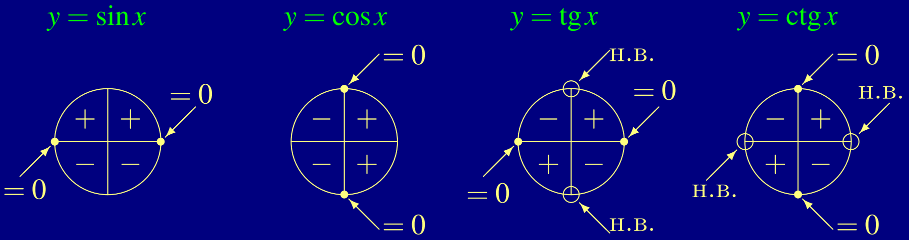
Широко застосовуються такі геометричні образи функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, на яких зображено знаки виразів $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ в різних чвертях одиничного кола:



На малюнках також вказані точки, в яких значення функцій дорівнюють нулю або не визначені.

Знаки основних тригонометричних функцій

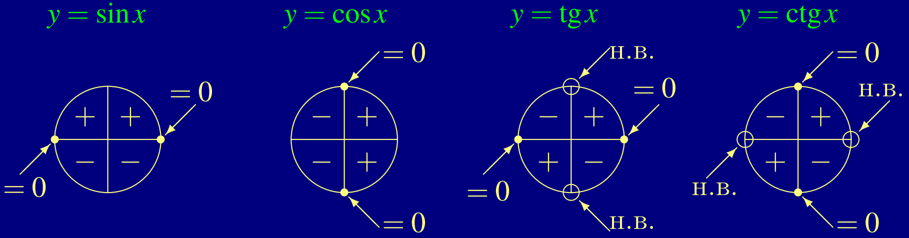
Широко застосовуються такі геометричні образи функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, на яких зображено знаки виразів $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ в різних чвертях одиничного кола:



На малюнках також вказані точки, в яких значення функцій дорівнюють нулю або не визначені.

Знаки основних тригонометричних функцій

Широко застосовуються такі геометричні образи функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, на яких зображено знаки виразів $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ в різних чвертях одиничного кола:



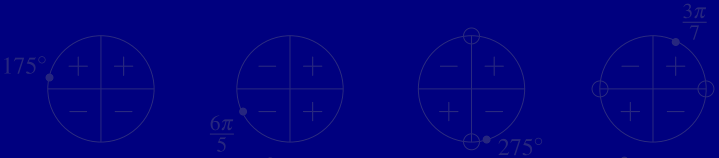
На малюнках також вказані точки, в яких значення функцій дорівнюють нулю або не визначені.

Приклад

Приклад 2. Визначити знак виразу:

$\sin 175^\circ \cdot \cos \frac{6\pi}{5} \cdot \operatorname{tg} 275^\circ \cdot \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{7}$.

Розв'язання. Кут 175° лежить між 90° і 180°, тобто цей кут належить другій чверті. Кут $6\pi/5$ лежить між π і $3\pi/2$, тобто цей кут належить третій чверті.
Кут 275° належить четвертій чверті. Нарешті, $0 < 3\pi/7 < \pi/2$, тобто кут $3\pi/7$ належить першій чверті.



$\sin 175^\circ > 0$ $\cos \frac{6\pi}{5} < 0$ $\operatorname{tg} 275^\circ < 0$ $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{7} > 0$

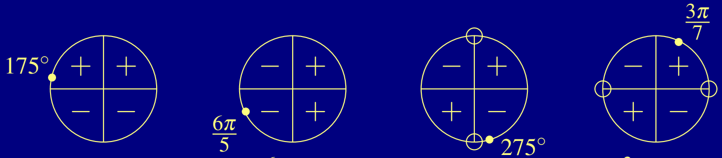
Оскільки добуток двох додатніх і двох від'ємних чисел є число додатнє, то заданий добуток має знак $+$.

Відповідь: $+$.

Приклад

Приклад 2. Визначити знак виразу:
$\sin 175^\circ \cdot \cos \frac{6\pi}{5} \cdot \mathrm{tg}\, 275^\circ \cdot \mathrm{ctg}\, \frac{3\pi}{7}$.

Розв'язання. Кут 175° лежить між 90° і 180°, тобто цей кут належить другій чверті. Кут $6\pi/5$ лежить між π і $3\pi/2$, тобто цей кут належить третій чверті.
Кут 275° належить четвертій чверті. Нарешті,
$0 < 3\pi/7 < \pi/2$, тобто кут $3\pi/7$ належить першій чверті.



$\sin 175^\circ > 0$ $\cos \frac{6\pi}{5} < 0$ $\mathrm{tg}\, 275^\circ < 0$ $\mathrm{ctg}\, \frac{3\pi}{7} > 0$

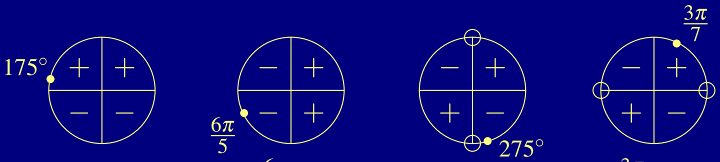
Оскільки добуток двох додатніх і двох від'ємних чисел є число додатнє, то заданий добуток має знак $+$.

Відповідь: $+$.

Приклад

Приклад 2. Визначити знак виразу:
$\sin 175^\circ \cdot \cos \frac{6\pi}{5} \cdot \operatorname{tg} 275^\circ \cdot \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{7}$.

Розв'язання. Кут 175° лежить між 90° і 180°, тобто цей кут належить другій чверті. Кут $6\pi/5$ лежить між π і $3\pi/2$, тобто цей кут належить третій чверті. Кут 275° належить четвертій чверті. Нарешті, $0 < 3\pi/7 < \pi/2$, тобто кут $3\pi/7$ належить першій чверті.



$\sin 175^\circ > 0$ $\quad$ $\cos \frac{6\pi}{5} < 0$ $\quad$ $\operatorname{tg} 275^\circ < 0$ $\quad$ $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{7} > 0$

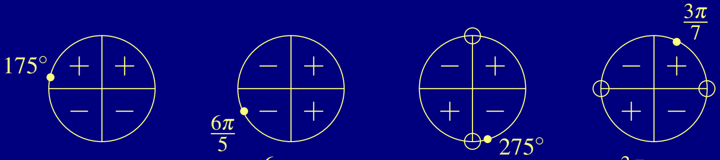
Оскільки добуток двох додатніх і двох від'ємних чисел є число додатнє, то заданий добуток має знак $+$.

Відповідь: $+$.

Приклад

Приклад 2. Визначити знак виразу:
$\sin 175^\circ \cdot \cos \frac{6\pi}{5} \cdot \operatorname{tg} 275^\circ \cdot \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{7}$.

Розв'язання. Кут 175° лежить між 90° і 180°, тобто цей кут належить другій чверті. Кут $6\pi/5$ лежить між π і $3\pi/2$, тобто цей кут належить третій чверті.
Кут 275° належить четвертій чверті. Нарешті, $0 < 3\pi/7 < \pi/2$, тобто кут $3\pi/7$ належить першій чверті.



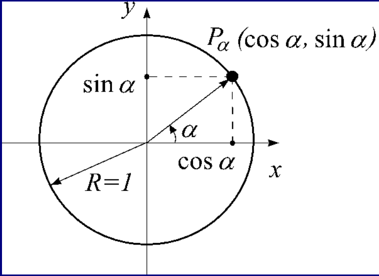
$\sin 175^\circ > 0$ $\cos \frac{6\pi}{5} < 0$ $\operatorname{tg} 275^\circ < 0$ $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{7} > 0$

Оскільки добуток двох додатніх і двох від'ємних чисел є число додатнє, то заданий добуток має знак $+$.

Відповідь: $+$.

Періодичні функції

Функції $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$ є періодичними функціями: для кожної з них існує число T (період функції) таке, що $y(x+T) = y(x-T) = y(x)$ при всіх x з області визначення функції $y(x)$.

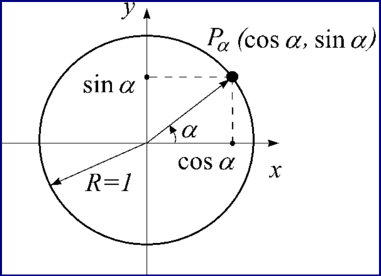


Оскільки при повороті точки P_α на кут 2π ми отримуємо ту ж точку кола, тобто координати точки не змінюються, то не змінюються і значення функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

Отже, число 2π є періодом цих функцій.

Періодичні функції

Функції $y=\sin x, y=\cos x, y=\operatorname{tg} x, y=\operatorname{ctg} x$ є періодичними функціями: для кожної з них існує число T (період функції) таке, що $y(x+T)=y(x-T)=y(x)$ при всіх x з області визначення функції $y(x)$.



Оскільки при повороті точки P_α на кут 2π ми отримуємо ту ж точку кола, тобто координати точки не змінюються, то не змінюються і значення функцій $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$.

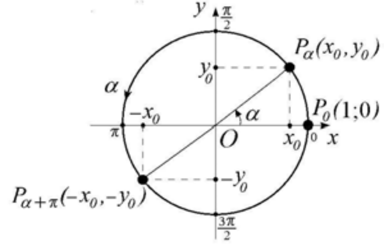
Отже, число 2π є періодом цих функцій.

Періодичні функції

Розглянемо тепер точку $P_{\alpha+\pi}$, яка отримана в результаті повороту точки P_α на кут π. Очевидно, що точки $P_{\alpha+\pi}$ і P_α є симетричними відносно точки O. Тому, абсциса і ордината точки $P_{\alpha+\pi}$ дорівнюють відповідно $-x_0$ і $-y_0$ (див. мал.). Тоді

$$\operatorname{tg}(\alpha+\pi)=\frac{\sin(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)}=\frac{-y_0}{-x_0}=\frac{y_0}{x_0}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\,,$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\pi)=\frac{\cos(\alpha+\pi)}{\sin(\alpha+\pi)}=\frac{-x_0}{-y_0}=\frac{x_0}{y_0}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha\,.$$



Отже, число π є періодом функцій $y=\operatorname{tg}x$ і $y=\operatorname{ctg}x$.

Періодичні функції

За означенням всі значення періодичної функції $y(x)$ повторюються при одночасному зміщенні усіх x вздовж осі Ox на величину T, рівну періоду цієї функції.

При цьому одна і та ж періодична функція має різні періоди.

Наприклад, функція $y = \sin x$ має періоди $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots, -2\pi, -4\pi, \ldots$, а функція $y = \operatorname{tg} x$ – періоди $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, -\pi, -2\pi, \ldots$ і т.п.

Найменший додатній період періодичної функції (якщо такий існує) називають головним періодом цієї функції.

Головний період функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ дорівнює 2π, а головний період функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ дорівнює π.

У той же час періодом сталої функції $y = 3$ є будь-яке дійсне число, і тому ця функція головного періоду не має.

Періодичні функції

За означенням всі значення періодичної функції $y(x)$ повторюються при одночасному зміщенні усіх x вздовж осі Ox на величину T, рівну періоду цієї функції.

При цьому одна і та ж періодична функція має різні періоди.

Наприклад, функція $y = \sin x$ має періоди $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots, -2\pi, -4\pi, \ldots$, а функція $y = \operatorname{tg} x$ – періоди $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, -\pi, -2\pi, \ldots$ і т.п.

Найменший додатній період періодичної функції (якщо такий існує) називають головним періодом цієї функції.

Головний період функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ дорівнює 2π, а головний період функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ дорівнює π.

У той же час періодом сталої функції $y = 3$ є будь-яке дійсне число, і тому ця функція головного періоду не має.

Періодичні функції

За означенням всі значення періодичної функції $y(x)$ повторюються при одночасному зміщенні усіх x вздовж осі Ox на величину T, рівну періоду цієї функції.

При цьому одна і та ж періодична функція має різні періоди.

Наприклад, функція $y = \sin x$ має періоди $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots, -2\pi, -4\pi, \ldots$, а функція $y = \mathrm{tg}\, x$ – періоди $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, -\pi, -2\pi, \ldots$ і т.п.

Найменший додатній період періодичної функції (якщо такий існує) називають головним періодом цієї функції.

Головний період функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ дорівнює 2π, а головний період функцій $y = \mathrm{tg}\, x$ і $y = \mathrm{ctg}\, x$ дорівнює π.

У той же час періодом сталої функції $y = 3$ є будь-яке дійсне число, і тому ця функція головного періоду не має.

Періодичні функції

За означенням всі значення періодичної функції $y(x)$ повторюються при одночасному зміщенні усіх x вздовж осі Ox на величину T, рівну періоду цієї функції.

При цьому одна і та ж періодична функція має різні періоди.

Наприклад, функція $y = \sin x$ має періоди $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots, -2\pi, -4\pi, \ldots$, а функція $y = \operatorname{tg} x$ – періоди $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, -\pi, -2\pi, \ldots$ і т.п.

Найменший додатній період періодичної функції (якщо такий існує) називають головним періодом цієї функції.

Головний період функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ дорівнює 2π, а головний період функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ дорівнює π.

У той же час періодом сталої функції $y = 3$ є будь-яке дійсне число, і тому ця функція головного періоду не має.

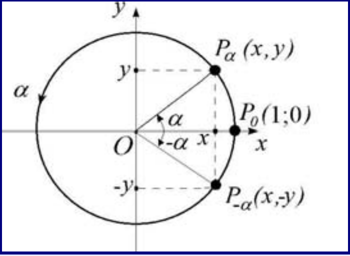
Парність, непарність

Розглянемо тепер точку $P_{-\alpha}$, яка отримана в результаті повороту точки P_0 на кут $-\alpha$. Очевидно, що точки $P_{-\alpha}$ і P_α є симетричними відносно осі Ox. Тому абсциса і ордината точки $P_{-\alpha}$ дорівнюють відповідно x і $-y$ (див. мал.). Тоді

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha\,, \qquad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha\,,$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha\,,$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha\,.$$



Отже, функції $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ є непарними, а функція $y = \cos x$ – парною.

Приклад

П р и к л а д 3. Чи є парними або непарними функції:

а) $f(x) = \cos 3x - x^4 + 5$;

б) $f(x) = 2\sin x + \operatorname{tg} 2x - 3\operatorname{ctg} 5x + x^3$;

в) $f(x) = \sin x \cdot \cos 3x$;

г) $f(x) = \sin^2 x \cdot \cos 3x$;

д) $f(x) = \sin 2x \cdot \operatorname{ctg} 5x$;

е) $f(x) = \sin x \cdot \cos 3x + 2$?

Р о з в' я з а н н я. а) Розглянемо вираз

$f(-x) = \cos(3(-x)) - (-x)^4 + 5 = \cos(-3x) - x^4 + 5$.

Оскільки функція $y = \cos x$ є парною, то

$\cos(-3x) = \cos 3x$. Тому

$f(-x) = \cos 3x - x^4 + 5 = f(x)$.

Отже, $f(-x) = f(x)$ при будь-якому x, тобто функція $f(x)$ є парною.

Аналогічно доводиться, що сума (різниця) парних функцій є функція парна.

Приклад

Приклад 3. Чи є парними або непарними функції:

а) $f(x) = \cos 3x - x^4 + 5$;

б) $f(x) = 2\sin x + \operatorname{tg} 2x - 3\operatorname{ctg} 5x + x^3$;

в) $f(x) = \sin x \cdot \cos 3x$;

г) $f(x) = \sin^2 x \cdot \cos 3x$;

д) $f(x) = \sin 2x \cdot \operatorname{ctg} 5x$;

е) $f(x) = \sin x \cdot \cos 3x + 2$?

Розв'язання. а) Розглянемо вираз

$f(-x) = \cos(3(-x)) - (-x)^4 + 5 = \cos(-3x) - x^4 + 5$.

Оскільки функція $y = \cos x$ є парною, то

$\cos(-3x) = \cos 3x$. Тому

$f(-x) = \cos 3x - x^4 + 5 = f(x)$.

Отже, $f(-x) = f(x)$ при будь-якому x, тобто функція $f(x)$ є парною.

Аналогічно доводиться, що сума (різниця) парних функцій є функція парна.

Приклад

Приклад 3. Чи є парними або непарними функції:

а) $f(x) = \cos 3x - x^4 + 5$;

б) $f(x) = 2\sin x + \operatorname{tg} 2x - 3\operatorname{ctg} 5x + x^3$;

в) $f(x) = \sin x \cdot \cos 3x$;

г) $f(x) = \sin^2 x \cdot \cos 3x$;

д) $f(x) = \sin 2x \cdot \operatorname{ctg} 5x$;

е) $f(x) = \sin x \cdot \cos 3x + 2$?

Розв'язання. а) Розглянемо вираз
$f(-x) = \cos(3(-x)) - (-x)^4 + 5 = \cos(-3x) - x^4 + 5$.
Оскільки функція $y = \cos x$ є парною, то
$\cos(-3x) = \cos 3x$. Тому
$f(-x) = \cos 3x - x^4 + 5 = f(x)$.
Отже, $f(-x) = f(x)$ при будь-якому x, тобто функція $f(x)$ є парною.

Аналогічно доводиться, що сума (різниця) парних функцій є функція парна.

Приклад

Приклад 3. Чи є парними або непарними функції:

а) $f(x) = \cos 3x - x^4 + 5$;

б) $f(x) = 2\sin x + \operatorname{tg} 2x - 3\operatorname{ctg} 5x + x^3$;

в) $f(x) = \sin x \cdot \cos 3x$;

г) $f(x) = \sin^2 x \cdot \cos 3x$;

д) $f(x) = \sin 2x \cdot \operatorname{ctg} 5x$;

е) $f(x) = \sin x \cdot \cos 3x + 2$?

Розв'язання. а) Розглянемо вираз
$f(-x) = \cos(3(-x)) - (-x)^4 + 5 = \cos(-3x) - x^4 + 5$.
Оскільки функція $y = \cos x$ є парною, то
$\cos(-3x) = \cos 3x$. Тому
$f(-x) = \cos 3x - x^4 + 5 = f(x)$.
Отже, $f(-x) = f(x)$ при будь-якому x, тобто функція
$f(x)$ є парною.

Аналогічно доводиться, що сума (різниця) парних функцій є функція парна.

Приклад

б) Для $f(x) = 2\sin x + \operatorname{tg} 2x - 3\operatorname{ctg} 5x + x^3$ розглянемо вираз

$f(-x) = 2\sin(-x) + \operatorname{tg}(2(-x)) - 3\operatorname{ctg}(5(-x)) + (-x)^3 =$
$= 2\sin(-x) + \operatorname{tg}(-2x) - 3\operatorname{ctg}(-5x) - x^3$.

Оскільки функції $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ є непарними, то справедливі рівності $\sin(-x) = -\sin x$, $\operatorname{tg}(-2x) = -\operatorname{tg} 2x$, $\operatorname{ctg}(-5x) = -\operatorname{ctg} 5x$. Тому

$f(-x) = -2\sin x - \operatorname{tg} 2x + 3\operatorname{ctg} 5x - x^3$.

Після винесення числа (-1) за дужки в правій частині отриманої рівності матимемо

$f(-x) = -(2\sin x + \operatorname{tg} 2x - 3\operatorname{ctg} 5x + x^3) = -f(x)$.

Отже, показано, що $f(-x) = -f(x)$ при будь-якому x, тобто функція $f(x)$ є непарною.
Аналогічно доводиться, що сума (різниця) непарних функцій є функція непарна.

Приклад

б) Для $f(x) = 2\sin x + \operatorname{tg} 2x - 3\operatorname{ctg} 5x + x^3$ розглянемо вираз

$$f(-x) = 2\sin(-x) + \operatorname{tg}(2(-x)) - 3\operatorname{ctg}(5(-x)) + (-x)^3 =$$
$$= 2\sin(-x) + \operatorname{tg}(-2x) - 3\operatorname{ctg}(-5x) - x^3\,.$$

Оскільки функції $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ є непарними, то справедливі рівності $\sin(-x) = -\sin x$, $\operatorname{tg}(-2x) = -\operatorname{tg} 2x$, $\operatorname{ctg}(-5x) = -\operatorname{ctg} 5x$. Тому

$$f(-x) = -2\sin x - \operatorname{tg} 2x + 3\operatorname{ctg} 5x - x^3\,.$$

Після винесення числа (-1) за дужки в правій частині отриманої рівності матимемо

$$f(-x) = -(2\sin x + \operatorname{tg} 2x - 3\operatorname{ctg} 5x + x^3) = -f(x)\,.$$

Отже, показано, що $f(-x) = -f(x)$ при будь-якому x, тобто функція $f(x)$ є непарною.

Аналогічно доводиться, що сума (різниця) непарних функцій є функція непарна.

Приклад

б) Для $f(x) = 2\sin x + \operatorname{tg} 2x - 3\operatorname{ctg} 5x + x^3$ розглянемо вираз

$$f(-x) = 2\sin(-x) + \operatorname{tg}(2(-x)) - 3\operatorname{ctg}(5(-x)) + (-x)^3 =$$
$$= 2\sin(-x) + \operatorname{tg}(-2x) - 3\operatorname{ctg}(-5x) - x^3 .$$

Оскільки функції $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ є непарними, то справедливі рівності $\sin(-x) = -\sin x$, $\operatorname{tg}(-2x) = -\operatorname{tg} 2x$, $\operatorname{ctg}(-5x) = -\operatorname{ctg} 5x$. Тому

$$f(-x) = -2\sin x - \operatorname{tg} 2x + 3\operatorname{ctg} 5x - x^3 .$$

Після винесення числа (-1) за дужки в правій частині отриманої рівності матимемо

$$f(-x) = -(2\sin x + \operatorname{tg} 2x - 3\operatorname{ctg} 5x + x^3) = -f(x) .$$

Отже, показано, що $f(-x) = -f(x)$ при будь-якому x, тобто функція $f(x)$ є непарною.

Аналогічно доводиться, що сума (різниця) непарних функцій є функція непарна.

Приклад

в) Для $f(x) = \sin x \cdot \cos 3x$ розглянемо вираз $f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-3x)$.

Оскільки функція $y = \sin x$ є непарною, а функція $y = \cos x$ – парною, то $\sin(-x) = -\sin x$ і $\cos(-3x) = \cos 3x$. Тому

$$f(-x) = -\sin x \cdot \cos 3x = -f(x)$$

при будь-якому x, тобто функція $f(x)$ є непарною.

Аналогічно доводиться, що добуток парної і непарної функцій є функція непарна.

г) Функція $y = \sin^2 x$ є парною, оскільки $\sin^2(-x) = (\sin(-x))^2 = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$. Функція $y = \cos x$ також є парною. Тому для функції $f(x) = \sin^2 x \cdot \cos 3x$ справедливі рівності

$$f(-x) = \sin^2(-x) \cdot \cos(-3x) = \sin^2 x \cdot \cos 3x = f(x)$$

при будь-якому x, тобто функція $f(x)$ є парною.

Аналогічно доводиться, що добуток парних функцій є функція парна.

Приклад

в) Для $f(x) = \sin x \cdot \cos 3x$ розглянемо вираз
$f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-3x)$.
Оскільки функція $y = \sin x$ є непарною, а функція
$y = \cos x$ – парною, то $\sin(-x) = -\sin x$ і
$\cos(-3x) = \cos 3x$. Тому
$f(-x) = -\sin x \cdot \cos 3x = -f(x)$
при будь-якому x, тобто функція $f(x)$ є непарною.
Аналогічно доводиться, що добуток парної і непарної функцій є функція непарна.
г) Функція $y = \sin^2 x$ є парною, оскільки
$\sin^2(-x) = (\sin(-x))^2 = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$. Функція
$y = \cos x$ также є парною. Тому для функції
$f(x) = \sin^2 x \cdot \cos 3x$ справедливі рівності
$f(-x) = \sin^2(-x) \cdot \cos(-3x) = \sin^2 x \cdot \cos 3x = f(x)$
при будь-якому x, тобто функція $f(x)$ є парною.
Аналогічно доводиться, що добуток парних функцій є функція парна.

Приклад

в) Для $f(x) = \sin x \cdot \cos 3x$ розглянемо вираз $f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-3x)$.
Оскільки функція $y = \sin x$ є непарною, а функція $y = \cos x$ – парною, то $\sin(-x) = -\sin x$ і $\cos(-3x) = \cos 3x$. Тому
$f(-x) = -\sin x \cdot \cos 3x = -f(x)$
при будь-якому x, тобто функція $f(x)$ є непарною.
Аналогічно доводиться, що добуток парної і непарної функцій є функція непарна.

г) Функція $y = \sin^2 x$ є парною, оскільки $\sin^2(-x) = (\sin(-x))^2 = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$. Функція $y = \cos x$ также є парною. Тому для функції $f(x) = \sin^2 x \cdot \cos 3x$ справедливі рівності
$f(-x) = \sin^2(-x) \cdot \cos(-3x) = \sin^2 x \cdot \cos 3x = f(x)$
при будь-якому x, тобто функція $f(x)$ є парною.
Аналогічно доводиться, що добуток парних функцій є функція парна.

Приклад

в) Для $f(x) = \sin x \cdot \cos 3x$ розглянемо вираз
$f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-3x)$.
Оскільки функція $y = \sin x$ є непарною, а функція
$y = \cos x$ – парною, то $\sin(-x) = -\sin x$ і
$\cos(-3x) = \cos 3x$. Тому
$f(-x) = -\sin x \cdot \cos 3x = -f(x)$
при будь-якому x, тобто функція $f(x)$ є непарною.
Аналогічно доводиться, що добуток парної і непарної функцій є функція непарна.

г) Функція $y = \sin^2 x$ є парною, оскільки
$\sin^2(-x) = (\sin(-x))^2 = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$. Функція
$y = \cos x$ также є парною. Тому для функції
$f(x) = \sin^2 x \cdot \cos 3x$ справедливі рівності
$f(-x) = \sin^2(-x) \cdot \cos(-3x) = \sin^2 x \cdot \cos 3x = f(x)$
при будь-якому x, тобто функція $f(x)$ є парною.
Аналогічно доводиться, що добуток парних функцій є функція парна.

Приклад

в) Для $f(x)=\sin x\cdot\cos 3x$ розглянемо вираз
$f(-x)=\sin(-x)\cdot\cos(-3x)$.
Оскільки функція $y=\sin x$ є непарною, а функція
$y=\cos x$ – парною, то $\sin(-x)=-\sin x$ і
$\cos(-3x)=\cos 3x$. Тому
$f(-x)=-\sin x\cdot\cos 3x=-f(x)$
при будь-якому x, тобто функція $f(x)$ є непарною.
Аналогічно доводиться, що добуток парної і непарної функцій є функція непарна.

г) Функція $y=\sin^2 x$ є парною, оскільки
$\sin^2(-x)=(\sin(-x))^2=(-\sin x)^2=\sin^2 x$. Функція
$y=\cos x$ также є парною. Тому для функції
$f(x)=\sin^2 x\cdot\cos 3x$ справедливі рівності
$f(-x)=\sin^2(-x)\cdot\cos(-3x)=\sin^2 x\cdot\cos 3x=f(x)$
при будь-якому x, тобто функція $f(x)$ є парною.
Аналогічно доводиться, що добуток парних функцій є функція парна.

Приклад

д) Оскільки функції $y = \sin x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ є непарними, то для функції $f(x) = \sin 2x \cdot \operatorname{ctg} 5x$ справедливі рівності

$$f(-x) = \sin(-2x) \cdot \operatorname{ctg}(-5x) = (-\sin 2x) \cdot (-\operatorname{ctg} 5x) =$$
$$= \sin 2x \cdot \operatorname{ctg} 5x = f(x)$$

при будь-якому x, тобто функція $f(x)$ є парною.

Аналогічно доводиться, що добуток двох непарних функцій є функція парна.

е) Для $f(x) = \sin x \cdot \cos 3x + 2$ розглянемо вираз $f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-3x) + 2$.

Оскільки функція $y = \sin x$ є непарною, а функція $y = \cos x$ – парною, то

$$f(-x) = -\sin x \cdot \cos 3x + 2 = -(\sin x \cdot \cos 3x + 2) + 4 =$$
$$= -f(x) + 4$$

при будь-якому x. Тому функція $f(x)$ не є ні парною, ні непарною.

Приклад

д) Оскільки функції $y = \sin x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ є непарними, то для функції $f(x) = \sin 2x \cdot \operatorname{ctg} 5x$ справедливі рівності

$$f(-x) = \sin(-2x) \cdot \operatorname{ctg}(-5x) = (-\sin 2x) \cdot (-\operatorname{ctg} 5x) =$$
$$= \sin 2x \cdot \operatorname{ctg} 5x = f(x)$$

при будь-якому x, тобто функція $f(x)$ є парною.
Аналогічно доводиться, що добуток двох непарних функцій є функція парна.

е) Для $f(x) = \sin x \cdot \cos 3x + 2$ розглянемо вираз $f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-3x) + 2$.
Оскільки функція $y = \sin x$ є непарною, а функція $y = \cos x$ – парною, то

$$f(-x) = -\sin x \cdot \cos 3x + 2 = -(\sin x \cdot \cos 3x + 2) + 4 =$$
$$= -f(x) + 4$$

при будь-якому x. Тому функція $f(x)$ не є ні парною, ні непарною.

Приклад

д) Оскільки функції $y = \sin x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ є непарними, то для функції $f(x) = \sin 2x \cdot \operatorname{ctg} 5x$ справедливі рівності

$$f(-x) = \sin(-2x) \cdot \operatorname{ctg}(-5x) = (-\sin 2x) \cdot (-\operatorname{ctg} 5x) =$$
$$= \sin 2x \cdot \operatorname{ctg} 5x = f(x)$$

при будь-якому x, тобто функція $f(x)$ є парною.
Аналогічно доводиться, що добуток двох непарних функцій є функція парна.

е) Для $f(x) = \sin x \cdot \cos 3x + 2$ розглянемо вираз $f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-3x) + 2$.

Оскільки функція $y = \sin x$ є непарною, а функція $y = \cos x$ – парною, то

$$f(-x) = -\sin x \cdot \cos 3x + 2 = -(\sin x \cdot \cos 3x + 2) + 4 =$$
$$= -f(x) + 4$$

при будь-якому x. Тому функція $f(x)$ не є ні парною, ні непарною.

Приклад

д) Оскільки функції $y = \sin x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ є непарними, то для функції $f(x) = \sin 2x \cdot \operatorname{ctg} 5x$ справедливі рівності

$$f(-x) = \sin(-2x) \cdot \operatorname{ctg}(-5x) = (-\sin 2x) \cdot (-\operatorname{ctg} 5x) =$$
$$= \sin 2x \cdot \operatorname{ctg} 5x = f(x)$$

при будь-якому x, тобто функція $f(x)$ є парною.
Аналогічно доводиться, що добуток двох непарних функцій є функція парна.
е) Для $f(x) = \sin x \cdot \cos 3x + 2$ розглянемо вираз $f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-3x) + 2$.
Оскільки функція $y = \sin x$ є непарною, а функція $y = \cos x$ – парною, то

$$f(-x) = -\sin x \cdot \cos 3x + 2 = -(\sin x \cdot \cos 3x + 2) + 4 =$$
$$= -f(x) + 4$$

при будь-якому x. Тому функція $f(x)$ не є ні парною, ні непарною.

Обмежені і необмежені функції

Розглянемо властивості односторонньої обмеженості функцій.

Функцію $f(x)$ називають:

- обмеженою знизу, якщо існує дійсне число M_1 таке, що при всіх $x \in D(f)$ виконується нерівність $f(x) > M_1$ (або $f(x) \geq M_1$);
- обмеженою зверху, якщо існує дійсне число M_2 таке, що при всіх $x \in D(f)$ виконується нерівність $f(x) < M_2$ (або $f(x) \leq M_2$).

Функції, обмежені знизу або зверху, є односторонньо обмеженими функціями.

Обмежені і необмежені функції

Розглянемо властивості односторонньої обмеженості функцій.

Функцію $f(x)$ називають:

- обмеженою знизу, якщо існує дійсне число M_1 таке, що при всіх $x \in D(f)$ виконується нерівність $f(x) > M_1$ (або $f(x) \geq M_1$);
- обмеженою зверху, якщо існує дійсне число M_2 таке, що при всіх $x \in D(f)$ виконується нерівність $f(x) < M_2$ (або $f(x) \leq M_2$).

Функції, обмежені знизу або зверху, є односторонньо обмеженими функціями.

Обмежені і необмежені функції

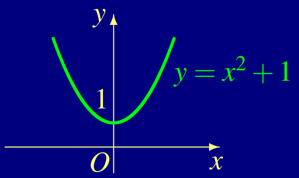
Розглянемо властивості односторонньої обмеженості функцій.

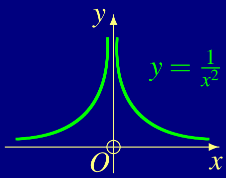
Функцію $f(x)$ називають:

- обмеженою знизу, якщо існує дійсне число M_1 таке, що при всіх $x \in D(f)$ виконується нерівність $f(x) > M_1$ (або $f(x) \geq M_1$);
- обмеженою зверху, якщо існує дійсне число M_2 таке, що при всіх $x \in D(f)$ виконується нерівність $f(x) < M_2$ (або $f(x) \leq M_2$).

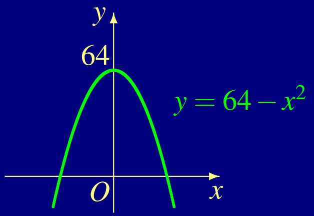
Функції, обмежені знизу або зверху, є односторонньо обмеженими функціями.

Обмежені і необмежені функції





Так, функції $f(x) = x^2 + 1$ і $f(x) = \frac{1}{x^2}$ обмежені знизу, оскільки $f(x) > 0$ при всіх $x \in D(f)$, а функція $f(x) = 64 - x^2$ обмежена зверху, оскільки $64 - x^2 \leq 64$ при всіх $x \in \mathbf{R}$.

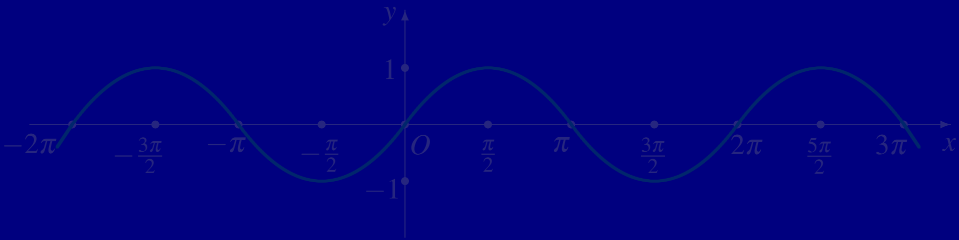


Обмежені і необмежені функції

Якщо ж функція обмежена і знизу, і зверху, то її називають просто обмеженою функцією.

Зокрема, обмеженими є функції $f(x) = \sin x$ і $f(x) = \cos x$, оскільки для них при всіх $x \in \mathbf{R}$ виконуються нерівності $-1 \leq f(x) \leq 1$.

$y = \sin x$

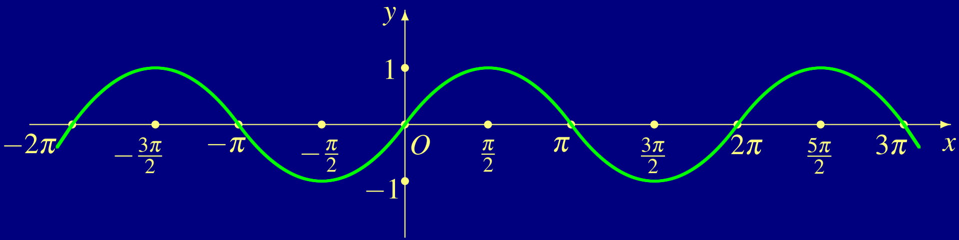


Обмежені і необмежені функції

Якщо ж функція обмежена і знизу, і зверху, то її називають просто обмеженою функцією.

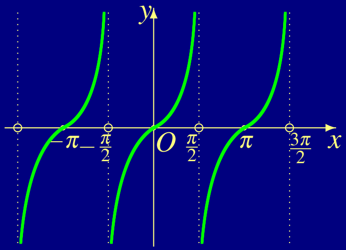
Зокрема, обмеженими є функції $f(x) = \sin x$ і $f(x) = \cos x$, оскільки для них при всіх $x \in \mathbf{R}$ виконуються нерівності $-1 \leq f(x) \leq 1$.

$y = \sin x$

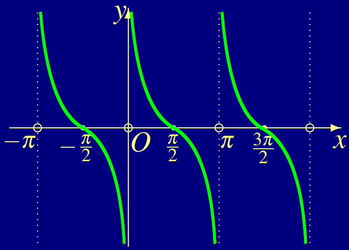


Обмежені і необмежені функції

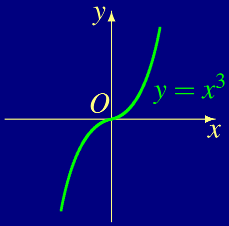
$y = \operatorname{tg} x$

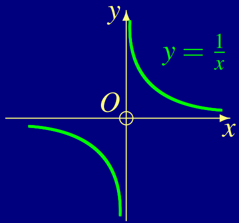


$y = \operatorname{ctg} x$



У той же час функції $y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$ є прикладами необмежених функцій.



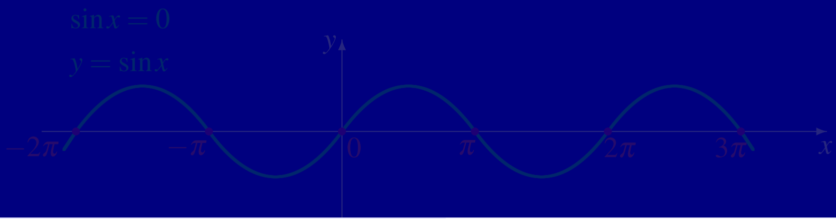


Найпростіші тригонометричні рівняння

Розглянемо найпростіші тригонометричні рівняння $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, де a – деяке дійсне число.

Зазначимо, що якщо найпростіше тригонометричне рівняння має розв'язки, то в силу періодичності відповідних тригонометричних функцій воно має нескінченну множину розв'язків.

Так, коренями рівняння $\sin x = 0$ є абсциси точок перетину графіка функції $y = \sin x$ з віссю Ox, тобто числа $\ldots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ (див. мал.), які утворюють нескінченну множину.

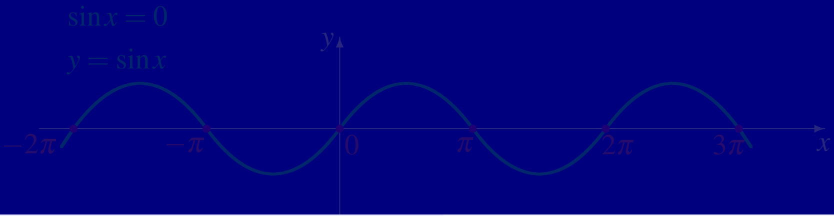


Найпростіші тригонометричні рівняння

Розглянемо найпростіші тригонометричні рівняння $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, де a – деяке дійсне число.

Зазначимо, що якщо найпростіше тригонометричне рівняння має розв'язки, то в силу періодичності відповідних тригонометричних функцій воно має нескінченну множину розв'язків.

Так, коренями рівняння $\sin x = 0$ є абсциси точок перетину графіка функції $y = \sin x$ з віссю Ox, тобто числа $\ldots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ (див. мал.), які утворюють нескінченну множину.



Найпростіші тригонометричні рівняння

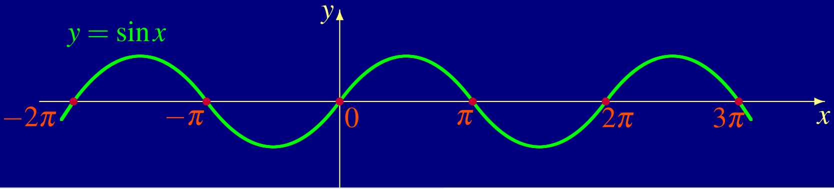
Розглянемо найпростіші тригонометричні рівняння $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, де a – деяке дійсне число.

Зазначимо, що якщо найпростіше тригонометричне рівняння має розв'язки, то в силу періодичності відповідних тригонометричних функцій воно має нескінченну множину розв'язків.

Так, коренями рівняння $\sin x = 0$ є абсциси точок перетину графіка функції $y = \sin x$ з віссю Ox, тобто числа $\ldots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ (див. мал.), які утворюють нескінченну множину.

$\sin x = 0$

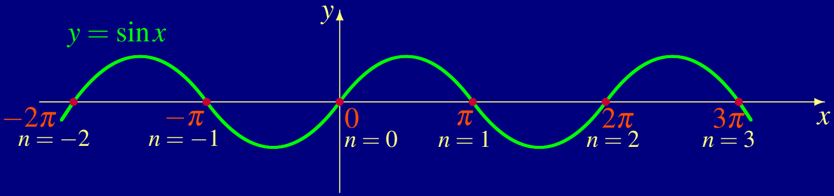
$y = \sin x$



Найпростіші тригонометричні рівняння

Ці числа, записані однією формулою $x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$, утворюють серію коренів.
При цьому корені серії виявляються занумерованими конкретними числовими значеннями параметра n (див. мал.):

$$\sin x = 0 \Longleftrightarrow x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$$

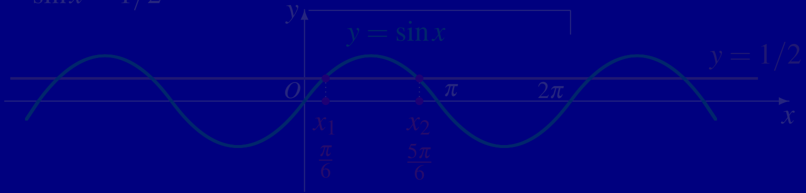


Найпростіші тригонометричні рівняння

Зазначимо також, що корені одного і того ж рівняння можна групувати в серії по-різному.

Для ілюстрації розглянемо рівняння $\sin x = 1/2$. Знайдемо спочатку його корені на проміжку $[0; 2\pi]$, довжина якого дорівнює головному періоду 2π функції $y = \sin x$. На цьому проміжку рівняння має два корені: $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$ і $x_2 = \pi - (\pi - x_2) = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$, оскільки $\pi - x_2 = x_1 - 0 = \dfrac{\pi}{6}$ (див. мал.):

$\sin x = 1/2$

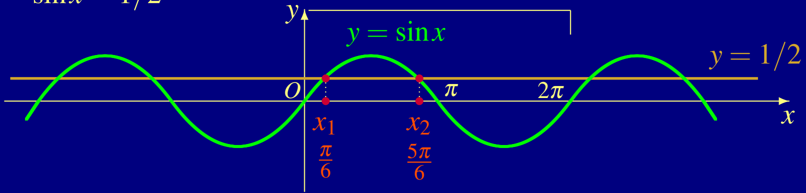


Найпростіші тригонометричні рівняння

Зазначимо також, що корені одного і того ж рівняння можна групувати в серії по-різному.

Для ілюстрації розглянемо рівняння $\sin x = 1/2$.
Знайдемо спочатку його корені на проміжку $[0;2\pi]$, довжина якого дорівнює головному періоду 2π функції $y = \sin x$. На цьому проміжку рівняння має два корені:
$x_1 = \dfrac{\pi}{6}$ і $x_2 = \pi - (\pi - x_2) = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$, оскільки
$\pi - x_2 = x_1 - 0 = \dfrac{\pi}{6}$ (див. мал.):

$\sin x = 1/2$



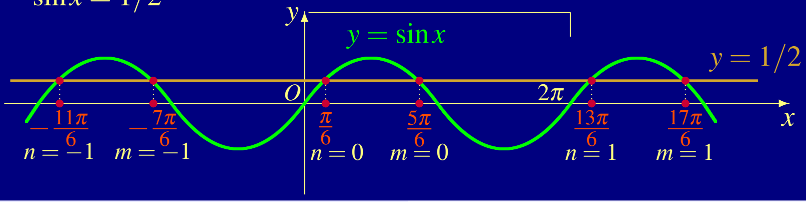
Найпростіші тригонометричні рівняння

Тому всі корені рівняння $\sin x = 1/2$ можна записати у вигляді двох періодичних серій:

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Сусідні точки кожної з цих серій розміщені на числовій прямій через рівні проміжки довжини 2π, яка дорівнює головному періоду функції $y = \sin x$. Зазначимо, що для запису різних серій доцільно використовувати різні числові параметри, тут — це n і m.

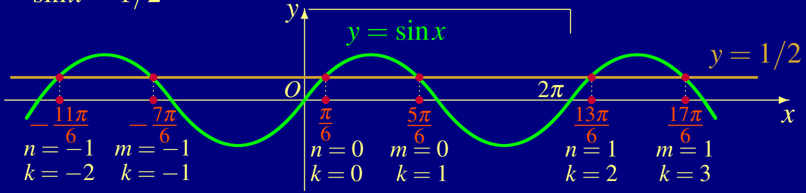
$\sin x = 1/2$



Найпростіші тригонометричні рівняння

У той же час всі корені рівняння $\sin x = 1/2$ можна записати по-іншому у вигляді однієї неперіодичної (!) серії $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. Сусідні точки цієї серії розміщуються на числовій прямій через нерівні проміжки; наприклад, $\dfrac{5\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} \neq \dfrac{13\pi}{6} - \dfrac{5\pi}{6}$ (див. мал.):

$\sin x = 1/2$



Отже,

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbf{Z}, \end{array}\right. \iff x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

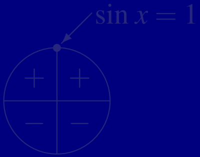
Формули розв'язків найпростіших рівнянь

Рівняння $\sin x = a$:

1) при $a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ рівняння розв'язків не має.

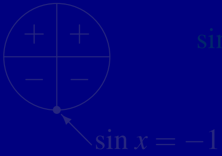
Наприклад, $\sin x = 2 \Leftrightarrow x \in \varnothing$;

2) при $a = 1$:



$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n\,,\ n \in \mathbf{Z}\,;$$

3) при $a = -1$:



$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\,,\ n \in \mathbf{Z}\,;$$

Формули розв'язків найпростіших рівнянь

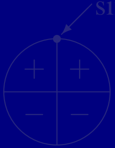
Рівняння $\sin x = a$:

1) при $a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ рівняння розв'язків не має.

Наприклад, $\sin x = 2 \Leftrightarrow x \in \varnothing$;

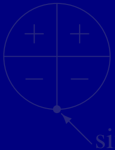
2) при $a = 1$:

$\sin x = 1$



$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z};$$

3) при $a = -1$:



$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z};$$

$\sin x = -1$

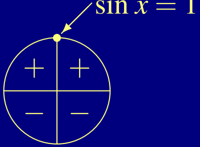
Формули розв'язків найпростіших рівнянь

Рівняння $\sin x = a$:

1) при $a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ рівняння розв'язків не має.

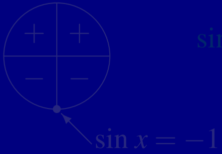
Наприклад, $\sin x = 2 \Leftrightarrow x \in \varnothing$;

2) при $a = 1$:



$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z};$$

3) при $a = -1$:



$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z};$$

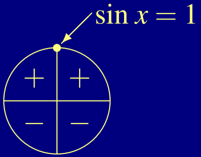
Формули розв'язків найпростіших рівнянь

Рівняння $\sin x = a$:

1) при $a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ рівняння розв'язків не має.

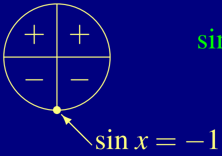
Наприклад, $\sin x = 2 \Leftrightarrow x \in \varnothing$;

2) при $a = 1$:



$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z};$$

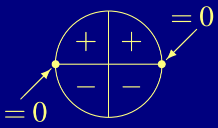
3) при $a = -1$:



$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z};$$

Рівняння $\sin x = a$

4) при $a = 0$:

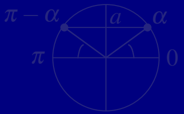


$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z};$$

5) при $a \in (-1;0) \cup (0;1)$:

$$\sin x = a \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \arcsin a + 2\pi n, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi m, & m \in \mathbf{Z}, \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

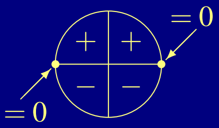


$$\arcsin a = \alpha \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ \sin \alpha = a. \end{cases}$$

Отже, $\arcsin a$ – це найближчий до точки 0 корінь рівняння $\sin x = a$, який при $a \in [-1;1]$ існує і є єдиним.

Рівняння $\sin x = a$

4) при $a = 0$:

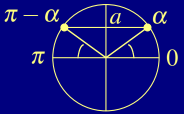


$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z};$$

5) при $a \in (-1;0) \cup (0;1)$:

$$\sin x = a \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \arcsin a + 2\pi n, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi m, & m \in \mathbf{Z}, \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$



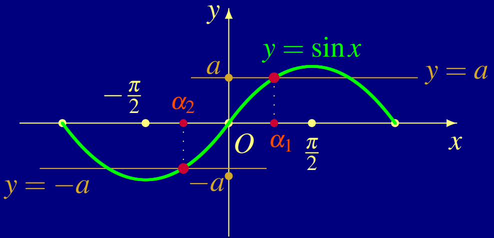
$$\arcsin a = \alpha \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ \sin \alpha = a. \end{array} \right.$$

Отже, $\arcsin a$ – це найближчий до точки 0 корінь рівняння $\sin x = a$, який при $a \in [-1;1]$ існує і є єдиним.

Непарність арксинуса

Справедливе співвідношення:

$\boxed{\arcsin(-a) = -\arcsin a \quad \text{при} \quad a \in [-1;1]}$ (див. мал.):



$$\alpha_1 = \arcsin a\,,$$
$$\alpha_2 = \arcsin(-a)\,,$$
$$\alpha_2 = -\alpha_1\,.$$

Приклад

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\sin x = -0,5$.

Розв'язання. За формулою розв'язків
$x = (-1)^k \arcsin(-0,5) + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
Далі, беручи до уваги властивість арксинуса
$\arcsin(-0,5) = -\arcsin 0,5$,
отримуємо
$x = -(-1)^k \arcsin 0,5 + \pi k = (-1)^{k+1} \arcsin 0,5 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
Нарешті, в таблиці значень тригонометричних функцій знаходимо гострий кут, синус якого дорівнює $1/2$, тобто $\arcsin 0,5 = \pi/6$. Остаточно маємо

$$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Відповідь: $x = (-1)^{k+1} \dfrac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Приклад

П р и к л а д 4. Розв'язати рівняння $\sin x = -0,5$.

Р о з в' я з а н н я. За формулою розв'язків
$x = (-1)^k \arcsin(-0,5) + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
Далі, беручи до уваги властивість арксинуса
$\arcsin(-0,5) = -\arcsin 0,5$,
отримуємо
$x = -(-1)^k \arcsin 0,5 + \pi k = (-1)^{k+1} \arcsin 0,5 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
Нарешті, в таблиці значень тригонометричних функцій знаходимо гострий кут, синус якого дорівнює $1/2$, тобто $\arcsin 0,5 = \pi/6$. Остаточно маємо

$$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

В і д п о в і д ь: $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Приклад

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\sin x = -0,5$.

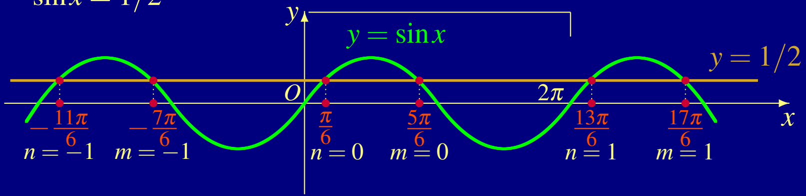
Розв'язання. За формулою розв'язків
$x = (-1)^k \arcsin(-0,5) + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
Далі, беручи до уваги властивість арксинуса
$\arcsin(-0,5) = -\arcsin 0,5$,
отримуємо
$x = -(-1)^k \arcsin 0,5 + \pi k = (-1)^{k+1} \arcsin 0,5 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
Нарешті, в таблиці значень тригонометричних функцій знаходимо гострий кут, синус якого дорівнює $1/2$, тобто $\arcsin 0,5 = \pi/6$. Остаточно маємо
$$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, \ k \in \mathbf{Z}.$$

Відповідь: $x = (-1)^{k+1} \dfrac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Зауваження

Звернемо увагу на необхідність точного запису формул розв'язків найпростіших тригонометричних рівнянь. Наприклад, $\sin x = 1/2 \not\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$, оскільки ця серія чисел не містить коренів рівняння $\sin x = 1/2$ вигляду $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$ (див. мал.).
Аналогічно, $\sin x = 1/2 \not\Leftrightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z} \quad (*)$, оскільки серія чисел $(*)$ містить, зокрема, числа $x = 11\pi/6$ (при $k = 1$) і $x = -13\pi/6$ (при $k = -1$), які не є коренями рівняння $\sin x = 1/2$. У той же час в серії $(*)$ не містяться такі корені рівняння $\sin x = 1/2$ як $x = -11\pi/6; -7\pi/6; 5\pi/6; 13\pi/6; 17\pi/6$:

$\sin x = 1/2$



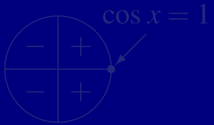
Рівняння $\cos x = a$

Рівняння $\cos x = a$:

1) при $a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ рівняння розв'язків не має.

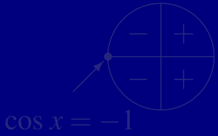
Наприклад, $\cos x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow x \in \varnothing$;

2) при $a = 1$:



$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n, \; n \in \mathbf{Z}$;

3) при $a = -1$:



$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n, \; n \in \mathbf{Z}$;

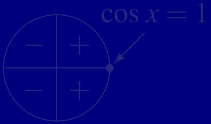
Рівняння $\cos x = a$

Рівняння $\cos x = a$:

1) при $a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ рівняння розв'язків не має.

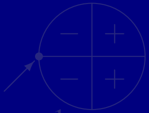
Наприклад, $\cos x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow x \in \varnothing$;

2) при $a = 1$:



$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$;

3) при $a = -1$:



$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$;

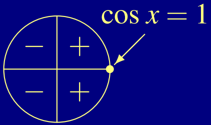
Рівняння $\cos x = a$

Рівняння $\cos x = a$:

1) при $a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ рівняння розв'язків не має.

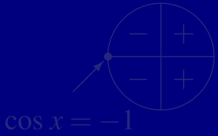
Наприклад, $\cos x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow x \in \varnothing$;

2) при $a = 1$:



$\cos x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = 2\pi n\,,\; n \in \mathbf{Z}\,;$

3) при $a = -1$:



$\cos x = -1 \;\Leftrightarrow\; x = \pi + 2\pi n\,,\; n \in \mathbf{Z}\,;$

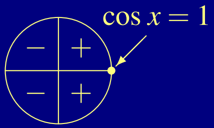
Рівняння $\cos x = a$

Рівняння $\cos x = a$:

1) при $a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ рівняння розв'язків не має.

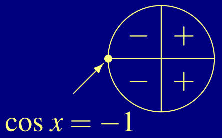
Наприклад, $\cos x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow x \in \varnothing$;

2) при $a = 1$:



$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n, \; n \in \mathbf{Z};$$

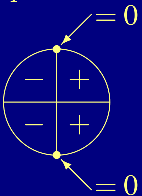
3) при $a = -1$:



$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n, \; n \in \mathbf{Z};$$

Рівняння $\cos x = a$

4) при $a = 0$:

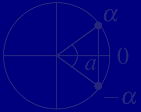


$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z};$$

5) при $a \in (-1;0) \cup (0;1)$:

$$\cos x = a \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \arccos a + 2\pi n, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = -\arccos a + 2\pi m, & m \in \mathbf{Z}, \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

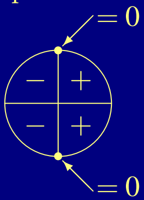


$$\arccos a = \alpha \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in [0, \pi], \\ \cos \alpha = a. \end{array} \right.$$

Отже, $\arccos a$ – це найближчий до точки 0 невід'ємний корінь рівняння $\cos x = a$, який при $a \in [-1;1]$ існує і є єдиним.

Рівняння $\cos x = a$

4) при $a = 0$:

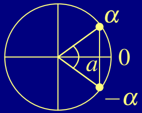


$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z};$$

5) при $a \in (-1;0) \cup (0;1)$:

$$\cos x = a \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \arccos a + 2\pi n, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = -\arccos a + 2\pi m, & m \in \mathbf{Z}, \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$



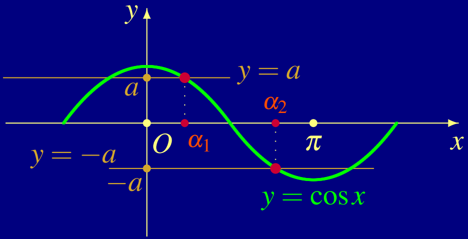
$$\arccos a = \alpha \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha \in [0, \pi], \\ \cos \alpha = a. \end{cases}$$

Отже, $\arccos a$ – це найближчий до точки 0 невід'ємний корінь рівняння $\cos x = a$, який при $a \in [-1;1]$ існує і є єдиним.

Одна властивість арккосинуса

Справедливе співвідношення:

$\boxed{\arccos(-a) = \pi - \arccos a \quad \text{при} \quad a \in [-1;1]}$ (див. мал.):



$\alpha_1 = \arccos a\,,$

$\alpha_2 = \arccos(-a)\,,$

$\alpha_2 = \pi - \alpha_1\,.$

Приклад

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\cos x = -0,5$.

Розв'язання. За формулою розв'язків $x = \pm\arccos(-0,5) + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Далі, беручи до уваги властивість арккосинуса $\arccos(-0,5) = \pi - \arccos 0,5$ і знаходячи в таблиці значень тригонометричних функцій гострий кут, косинус якого дорівнює $1/2$, а саме: $\arccos 0,5 = \pi/3$, отримуємо

$$\arccos(-0,5) = \pi - \arccos 0,5 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Отже, остаточно маємо $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Відповідь: $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Приклад

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\cos x = -0,5$.

Розв'язання. За формулою розв'язків
$x = \pm \arccos(-0,5) + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.
Далі, беручи до уваги властивість арккосинуса
$\arccos(-0,5) = \pi - \arccos 0,5$
і знаходячи в таблиці значень тригонометричних функцій гострий кут, косинус якого дорівнює $1/2$, а саме: $\arccos 0,5 = \pi/3$, отримуємо

$$\arccos(-0,5) = \pi - \arccos 0,5 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Отже, остаточно маємо $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Відповідь: $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Приклад

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\cos x = -0,5$.

Розв'язання. За формулою розв'язків
$x = \pm\arccos(-0,5) + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.
Далі, беручи до уваги властивість арккосинуса
$\arccos(-0,5) = \pi - \arccos 0,5$
і знаходячи в таблиці значень тригонометричних функцій гострий кут, косинус якого дорівнює $1/2$, а саме: $\arccos 0,5 = \pi/3$, отримуємо

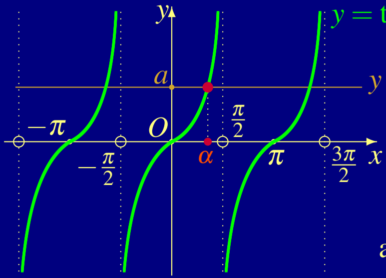
$$\arccos(-0,5) = \pi - \arccos 0,5 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Отже, остаточно маємо $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Відповідь: $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Рівняння $\operatorname{tg} x = a$

$\operatorname{tg} x = a \Longleftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.



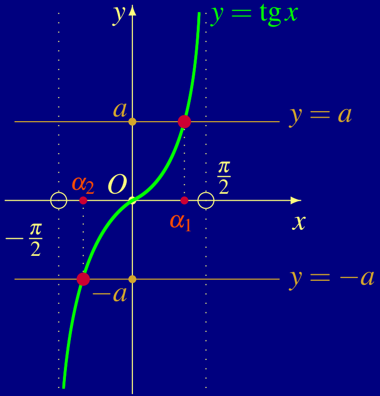
$$\operatorname{arctg} a = \alpha \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ \operatorname{tg} \alpha = a. \end{cases}$$

Отже, $\operatorname{arctg} a$ – це найближчий до точки 0 корінь рівняння $\operatorname{tg} x = a$, який при будь-якому $a \in \mathbf{R}$ існує і є єдиним.

Непарність арктангенса

Справедливе співвідношення:

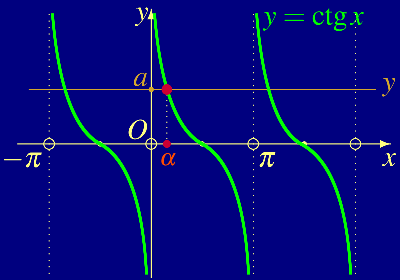
$\boxed{\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a}$ (див. мал.):



$$\alpha_1 = \operatorname{arctg} a\,,$$
$$\alpha_2 = \operatorname{arctg}(-a)\,,$$
$$\alpha_2 = -\alpha_1\,.$$

Рівняння $\operatorname{ctg} x = a$

$$\operatorname{ctg} x = a \iff x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbf{Z}.$$



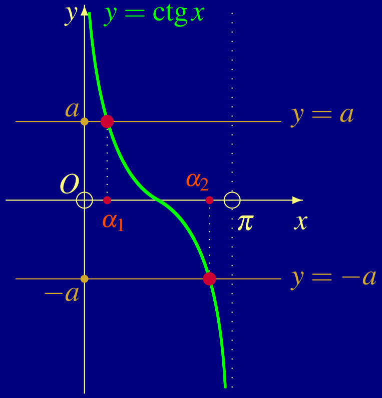
$$\operatorname{arcctg} a = \alpha \iff \begin{cases} \alpha \in (0, \pi), \\ \operatorname{ctg} \alpha = a. \end{cases}$$

Отже, $\operatorname{arcctg} a$ – це найближчий до точки 0 додатній корінь рівняння $\operatorname{ctg} x = a$, який при будь-якому $a \in \mathbf{R}$ існує і є єдиним.

Одна властивість арккотангенса

Справедливе співвідношення:

$\boxed{\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a}$ (див. мал.):



$$\alpha_1 = \operatorname{arcctg} a\,,$$
$$\alpha_2 = \operatorname{arcctg}(-a)\,,$$
$$\alpha_2 = \pi - \alpha_1\,.$$