

Графічний метод розв'язання рівнянь і нерівностей

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 2 (частина друга)



Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

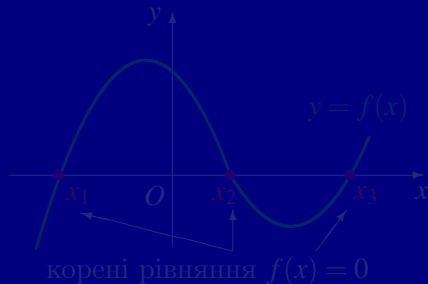
Рене Декарт, "Міркування про метод"

Рівняння виду $f(x) = 0$

Графічний метод є дуже ефективним методом розв'язання рівнянь і нерівностей.

Розглянемо спочатку, як розв'язують графічним методом рівняння виду $f(x) = 0$.

- За означенням графіка функції абсиси точок перетину графіка функції $y = f(x)$ з віссю Ox є коренями рівняння $f(x) = 0$.

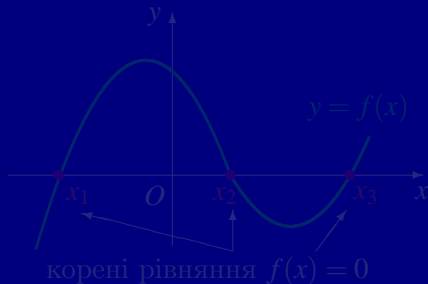


Рівняння виду $f(x) = 0$

Графічний метод є дуже ефективним методом розв'язання рівнянь і нерівностей.

Розглянемо спочатку, як розв'язують графічним методом рівняння виду $f(x) = 0$.

- За означенням графіка функції абсиси точок перетину графіка функції $y = f(x)$ з віссю Ox є коренями рівняння $f(x) = 0$.

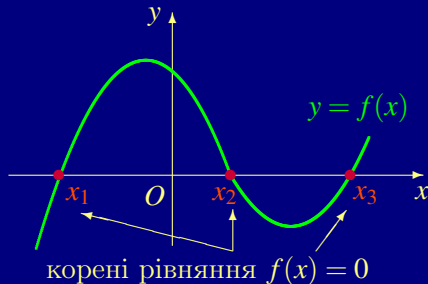


Рівняння виду $f(x) = 0$

Графічний метод є дуже ефективним методом розв'язання рівнянь і нерівностей.

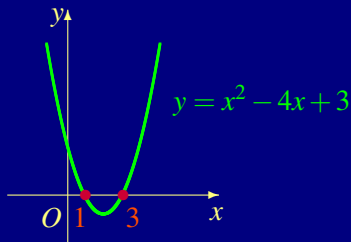
Розглянемо спочатку, як розв'язують графічним методом рівняння виду $f(x) = 0$.

- За означенням графіка функції абсиси точок перетину графіка функції $y = f(x)$ з віссю Ox є коренями рівняння $f(x) = 0$.



Рівняння виду $f(x) = 0$

Наприклад, рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$ має корені $x_1 = 1$ і $x_2 = 3$, а графік функції $y = x^2 - 4x + 3$ перетинає вісь Ox у двох точках: $(1;0)$ і $(3;0)$:

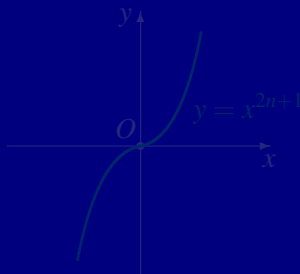


Рівняння виду $f(x) = 0$

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x^7 + x^3 - 2 = 0$.

Розв'язання. Зобразимо ескіз графіка функції $y = x^7 + x^3 - 2$, відобразивши при цьому найбільш "яскраві" властивості цієї функції.

З цією метою зазначимо, що функції $y = x^7$ і $y = x^3$ є зростаючими, оскільки приймають більші значення y при більших значеннях змінної x , про що також "яскраво свідчить" графік функції $y = x^{2n+1}, n \in \mathbb{N}$:

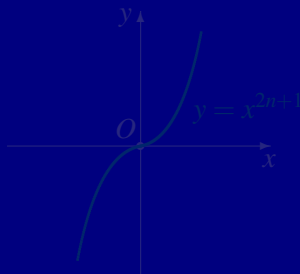


Рівняння виду $f(x) = 0$

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x^7 + x^3 - 2 = 0$.

Розв'язання. Зобразимо ескіз графіка функції $y = x^7 + x^3 - 2$, відобразивши при цьому найбільш "яскраві" властивості цієї функції.

З цією метою зазначимо, що функції $y = x^7$ і $y = x^3$ є зростаючими, оскільки приймають більші значення y при більших значеннях змінної x , про що також "яскраво свідчить" графік функції $y = x^{2n+1}, n \in \mathbb{N}$:

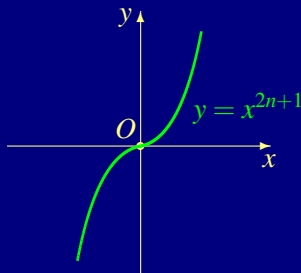


Рівняння виду $f(x) = 0$

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x^7 + x^3 - 2 = 0$.

Розв'язання. Зобразимо ескіз графіка функції $y = x^7 + x^3 - 2$, відобразивши при цьому найбільш "яскраві" властивості цієї функції.

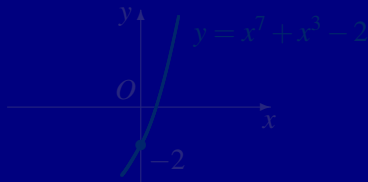
З цією метою зазначимо, що функції $y = x^7$ і $y = x^3$ є зростаючими, оскільки приймають більші значення y при більших значеннях змінної x , про що також "яскраво свідчить" графік функції $y = x^{2n+1}, n \in \mathbf{N}$:



Рівняння виду $f(x) = 0$

Отже, функція $y = x^7 + x^3$ є зростаючою як сума зростаючих функцій, а віднімання числа 2 від усіх значень функції зсуває графік на 2 одиниці вниз і тому не впливає на властивість її зростання. Отже, функція $y = x^7 + x^3 - 2$ є зростаючою.

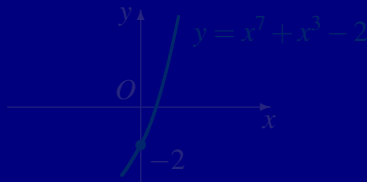
Враховуючи також те, що графік функції $y = x^7 + x^3 - 2$ перетинає вісь Oy в точці $y = y(0) = 0 + 0 - 2 = -2$, зобразимо ескіз графіка цієї зростаючої функції:



Рівняння виду $f(x) = 0$

Отже, функція $y = x^7 + x^3$ є зростаючою як сума зростаючих функцій, а віднімання числа 2 від усіх значень функції зсуває графік на 2 одиниці вниз і тому не впливає на властивість її зростання. Отже, функція $y = x^7 + x^3 - 2$ є зростаючою.

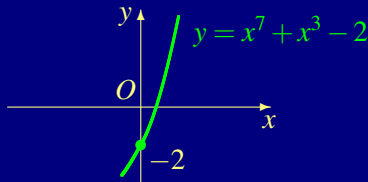
Враховуючи також те, що графік функції $y = x^7 + x^3 - 2$ перетинає вісь Oy в точці $y = y(0) = 0 + 0 - 2 = -2$, зобразимо ескіз графіка цієї зростаючої функції:



Рівняння виду $f(x) = 0$

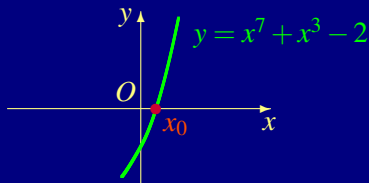
Отже, функція $y = x^7 + x^3$ є зростаючою як сума зростаючих функцій, а віднімання числа 2 від усіх значень функції зсуває графік на 2 одиниці вниз і тому не впливає на властивість її зростання. Отже, функція $y = x^7 + x^3 - 2$ є зростаючою.

Враховуючи також те, що графік функції $y = x^7 + x^3 - 2$ перетинає вісь Oy в точці $y = y(0) = 0 + 0 - 2 = -2$, зобразимо ескіз графіка цієї зростаючої функції:



Рівняння виду $f(x) = 0$

Оскільки графік зростаючої функції $y = x^7 + x^3 - 2$ перетинає вісь Ox тільки в одній точці, то рівняння $x^7 + x^3 - 2 = 0$ має єдиний корінь x_0 :

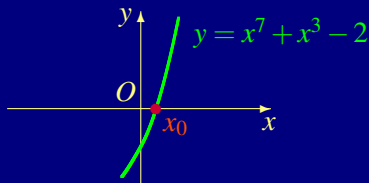


Безпосереднім підбором знаходимо $x_0 = 1$, оскільки $1^7 + 1^3 - 2 = 0$.

Відповідь: $x = 1$.

Рівняння виду $f(x) = 0$

Оскільки графік зростаючої функції $y = x^7 + x^3 - 2$ перетинає вісь Ox тільки в одній точці, то рівняння $x^7 + x^3 - 2 = 0$ має єдиний корінь x_0 :

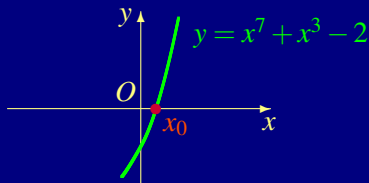


Безпосереднім підбором знаходимо $x_0 = 1$, оскільки $1^7 + 1^3 - 2 = 0$.

Відповідь: $x = 1$.

Рівняння виду $f(x) = 0$

Оскільки графік зростаючої функції $y = x^7 + x^3 - 2$ перетинає вісь Ox тільки в одній точці, то рівняння $x^7 + x^3 - 2 = 0$ має єдиний корінь x_0 :



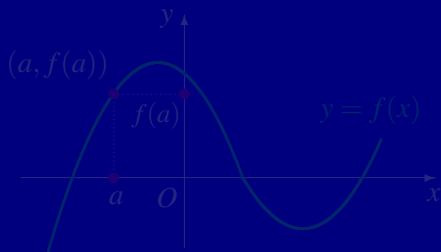
Безпосереднім підбором знаходимо $x_0 = 1$, оскільки $1^7 + 1^3 - 2 = 0$.

Відповідь: $x = 1$.

Розв'язання нерівностей графічним методом

Розглянемо тепер розв'язання нерівностей $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$ графічним методом.

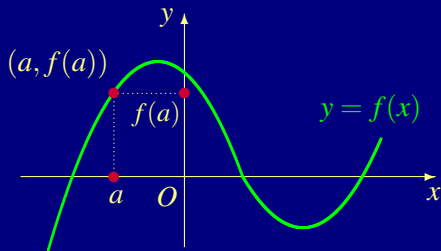
За означенням графіка функції $y = f(x)$ він складається з точок $(x, f(x))$. Розглянемо деяку точку $(a, f(a))$, що лежить вище осі Ox . Вона має додатню ординату, тобто $f(a) > 0$. Тому абсциса цієї точки a є розв'язком нерівності $f(x) > 0$.



Розв'язання нерівностей графічним методом

Розглянемо тепер розв'язання нерівностей $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$ графічним методом.

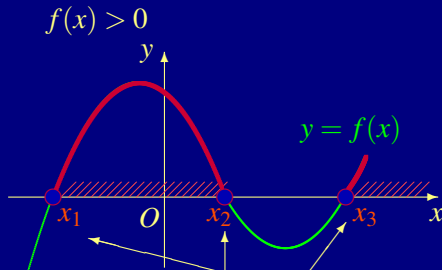
За означенням графіка функції $y = f(x)$ він складається з точок $(x, f(x))$. Розглянемо деяку точку $(a, f(a))$, що лежить **вище** осі Ox . Вона має **додатню** ординату, тобто $f(a) > 0$. Тому **абсциса** цієї точки **a** є **розв'язком** нерівності $f(x) > 0$.



Нерівності виду $f(x) > 0$

Отже,

- щоб розв'язати нерівність $f(x) > 0$ графічним методом, потрібно знайти ті частини графіка функції $y = f(x)$, які лежать вище осі Ox і спроектувати їх на вісь Ox .



корені рівняння $f(x) = 0$

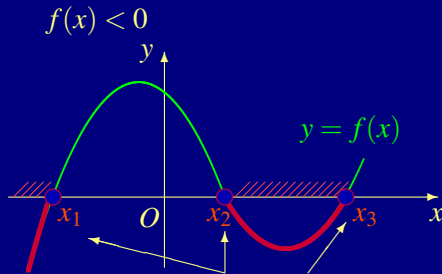
$$x \in (x_1, x_2) \cup (x_3, \infty)$$

Тут на малюнку множина розв'язків нерівності $f(x) > 0$ має вигляд $(x_1, x_2) \cup (x_3, \infty)$.

Нерівності виду $f(x) < 0$

Аналогічно,

- щоб розв'язати нерівність $f(x) < 0$ графічним методом, потрібно знайти ті частини графіка функції $y = f(x)$, які лежать **нижче** осі Ox і спроекувати їх на вісь Ox .



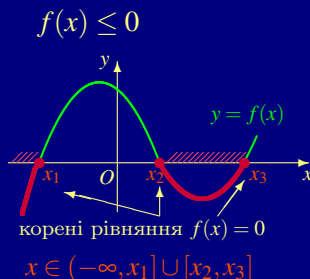
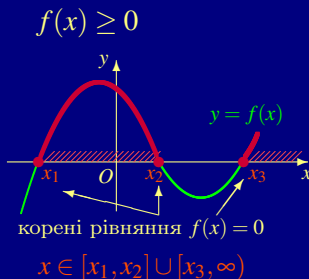
корені рівняння $f(x) = 0$

$$x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, x_3)$$

Тут на малюнку множина розв'язків нерівності $f(x) < 0$ має вигляд $(-\infty, x_1) \cup (x_2, x_3)$.

Нерівності виду $f(x) \geq 0$ і $f(x) \leq 0$

- При розв'язанні нерівності $f(x) \geq 0$ (чи $f(x) \leq 0$) до розв'язків нерівності $f(x) > 0$ (чи, відповідно, $f(x) < 0$) слід приєднати корені рівняння $f(x) = 0$:



Квадратні нерівності

Розглянемо розв'язання **квадратних нерівностей**.

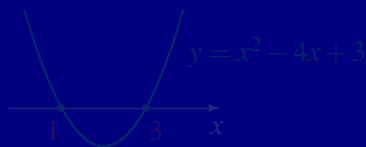
Приклад 2. Розв'язати нерівність $x^2 - 4x + 3 > 0$.

Розв'язання. Графіком функції $y = x^2 - 4x + 3$ є парабола, вітки якої направлені вгору.

Знайдемо точки перетину цієї параболи з віссю Ox , розв'язуючи рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Його корені $x_1 = 1$ і $x_2 = 3$. Отже, парабола перетинає вісь Ox в двох точках.

Зобразимо ескіз параболи $y = x^2 - 4x + 3$ (зазначимо, що ми не зображуємо вісь Oy , оскільки при розв'язанні даної нерівності потрібно використати розміщення параболи лише відносно осі Ox):



Квадратні нерівності

Розглянемо розв'язання **квадратних нерівностей**.

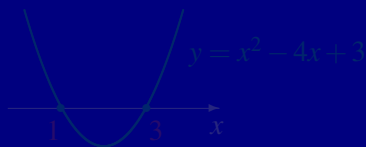
Приклад 2. Розв'язати нерівність $x^2 - 4x + 3 > 0$.

Розв'язання. Графіком функції $y = x^2 - 4x + 3$ є парабола, вітки якої направлені вгору.

Знайдемо точки перетину цієї параболи з віссю Ox , розв'язуючи рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Його корені $x_1 = 1$ і $x_2 = 3$. Отже, парабола перетинає вісь Ox в двох точках.

Зобразимо ескіз параболи $y = x^2 - 4x + 3$ (зазначимо, що ми не зображуємо вісь Oy , оскільки при розв'язанні даної нерівності потрібно використати розміщення параболи лише відносно осі Ox):



Квадратні нерівності

Розглянемо розв'язання **квадратних нерівностей**.

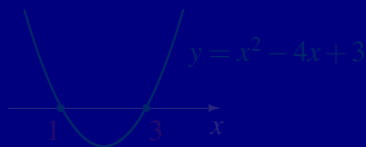
Приклад 2. Розв'язати нерівність $x^2 - 4x + 3 > 0$.

Розв'язання. Графіком функції $y = x^2 - 4x + 3$ є **парабола**, **вітки** якої направлені **вгору**.

Знайдемо точки перетину цієї параболи з віссю Ox , розв'язуючи рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Його корені $x_1 = 1$ і $x_2 = 3$. Отже, парабола перетинає вісь Ox в двох точках.

Зобразимо ескіз параболи $y = x^2 - 4x + 3$ (зазначимо, що ми не зображуємо вісь Oy , оскільки при розв'язанні даної нерівності потрібно використати розміщення параболи лише відносно осі Ox):



Квадратні нерівності

Розглянемо розв'язання **квадратних нерівностей**.

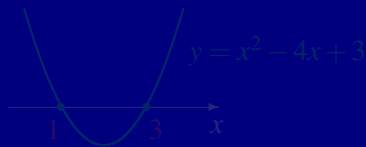
Приклад 2. Розв'язати нерівність $x^2 - 4x + 3 > 0$.

Розв'язання. Графіком функції $y = x^2 - 4x + 3$ є **парабола**, **вітки** якої направлені **вгору**.

Знайдемо точки перетину цієї параболи з віссю Ox , розв'язуючи рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Його корені $x_1 = 1$ і $x_2 = 3$. Отже, парабола перетинає вісь Ox в двох точках.

Зобразимо ескіз параболи $y = x^2 - 4x + 3$ (зазначимо, що ми не зображуємо вісь Oy , оскільки при розв'язанні даної нерівності потрібно використати розміщення параболи лише відносно осі Ox):



Квадратні нерівності

Розглянемо розв'язання **квадратних нерівностей**.

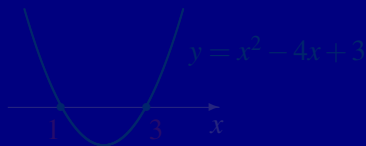
Приклад 2. Розв'язати нерівність $x^2 - 4x + 3 > 0$.

Розв'язання. Графіком функції $y = x^2 - 4x + 3$ є **парабола**, **вітки** якої направлені **вгору**.

Знайдемо точки перетину цієї параболи з віссю Ox , розв'язуючи рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Його корені $x_1 = 1$ і $x_2 = 3$. Отже, **парабола перетинає вісь Ox в двох точках**.

Зобразимо ескіз параболи $y = x^2 - 4x + 3$ (зазначимо, що ми не зображуємо вісь Oy , оскільки при розв'язанні даної нерівності потрібно використати розміщення параболи лише відносно осі Ox):



Квадратні нерівності

Розглянемо розв'язання **квадратних нерівностей**.

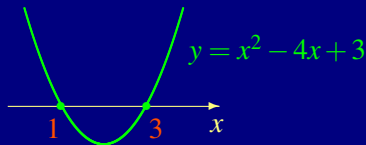
Приклад 2. Розв'язати нерівність $x^2 - 4x + 3 > 0$.

Розв'язання. Графіком функції $y = x^2 - 4x + 3$ є **парабола**, **вітки** якої направлені **вгору**.

Знайдемо точки перетину цієї параболи з віссю Ox , розв'язуючи рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$.

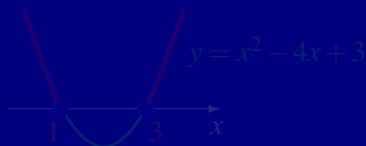
Його корені $x_1 = 1$ і $x_2 = 3$. Отже, **парабола перетинає вісь Ox в двох точках**.

Зобразимо ескіз параболи $y = x^2 - 4x + 3$ (зазначимо, що ми не зображуємо вісь Oy , оскільки при розв'язанні даної нерівності потрібно використати розміщення параболи лише відносно осі Ox):

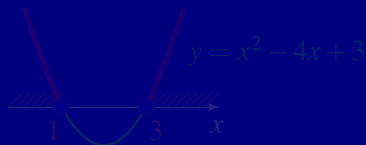


Квадратні нерівності

Відмітимо частини параболи, які лежать **вище** осі Ox , при цьому точки $x = 1$ і $x = 3$ відмітимо порожніми кружками, оскільки в цих точках $x^2 - 4x + 3 = 0$, тобто нерівність $x^2 - 4x + 3 > 0$ порушується:



Спроектуємо на вісь Ox відмічені частини параболи, відмічаючи штриховкою відповідні проміжки осі:

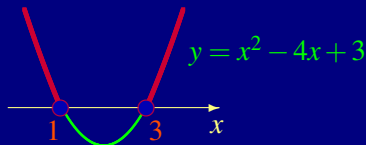


Запишемо відповідь.

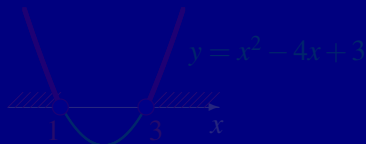
Відповідь: $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

Квадратні нерівності

Відмітимо частини параболи, які лежать **вище** осі Ox , при цьому точки $x = 1$ і $x = 3$ відмітимо порожніми кружками, оскільки в цих точках $x^2 - 4x + 3 = 0$, тобто нерівність $x^2 - 4x + 3 > 0$ порушується:



Спроектуємо на вісь Ox відмічені частини параболи, відмічаючи штриховкою відповідні проміжки осі:

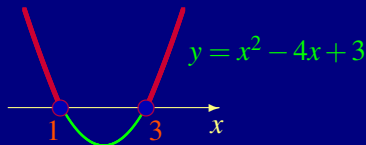


Запишемо відповідь.

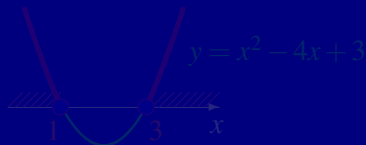
Відповідь: $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

Квадратні нерівності

Відмітимо частини параболи, які лежать **вище** осі Ox , при цьому точки $x = 1$ і $x = 3$ відмітимо порожніми кружками, оскільки в цих точках $x^2 - 4x + 3 = 0$, тобто нерівність $x^2 - 4x + 3 > 0$ порушується:



Спроектуємо на вісь Ox відмічені частини параболи, відмічаючи штриховкою відповідні проміжки осі:

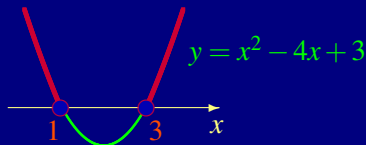


Запишемо відповідь.

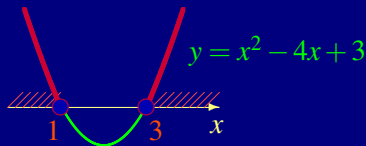
Відповідь: $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

Квадратні нерівності

Відмітимо частини параболи, які лежать **вище** осі Ox , при цьому точки $x = 1$ і $x = 3$ відмітимо порожніми кружками, оскільки в цих точках $x^2 - 4x + 3 = 0$, тобто нерівність $x^2 - 4x + 3 > 0$ порушується:



Спроектуємо на вісь Ox відмічені частини параболи, відмічаючи штриховкою відповідні проміжки осі:

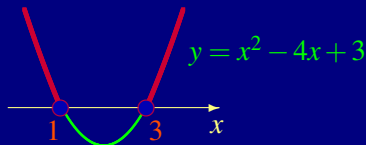


Запишемо відповідь.

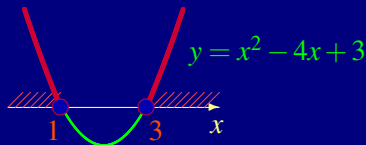
Відповідь: $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

Квадратні нерівності

Відмітимо частини параболи, які лежать **вище** осі Ox , при цьому точки $x = 1$ і $x = 3$ відмітимо порожніми кружками, оскільки в цих точках $x^2 - 4x + 3 = 0$, тобто нерівність $x^2 - 4x + 3 > 0$ порушується:



Спроектуємо на вісь Ox відмічені частини параболи, відмічаючи штриховкою відповідні проміжки осі:

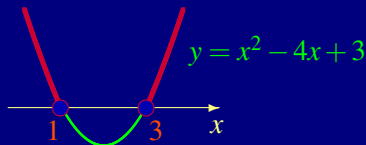


Запишемо відповідь.

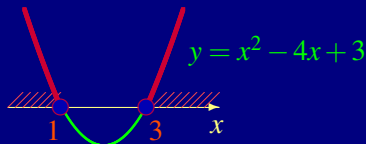
Відповідь: $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

Квадратні нерівності

Відмітимо частини параболи, які лежать **вище** осі Ox , при цьому точки $x = 1$ і $x = 3$ відмітимо порожніми кружками, оскільки в цих точках $x^2 - 4x + 3 = 0$, тобто нерівність $x^2 - 4x + 3 > 0$ порушується:



Спроектуємо на вісь Ox відмічені частини параболи, відмічаючи штриховкою відповідні проміжки осі:



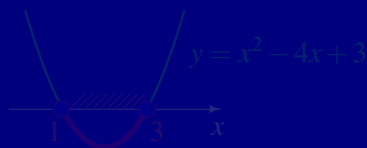
Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

Квадратні нерівності

Приклад 3. Розв'язати нерівність $x^2 - 4x + 3 < 0$.

Розв'язання. Відмітимо ту частину параболи

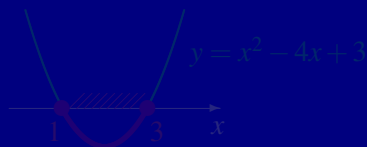


$y = x^2 - 4x + 3$, яка
лежить **нижче** осі Ox і
спроєкуємо її на вісь Ox .
Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in (1; 3)$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $x^2 - 4x + 3 \leq 0$.

Розв'язання. До множини розв'язків нерівності



$x^2 - 4x + 3 < 0$ приєд-
наємо корені рівняння
 $x^2 - 4x + 3 = 0$, тобто точки
 $x = 1$ і $x = 3$.

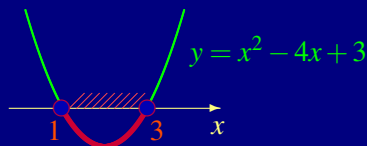
Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in [1; 3]$.

Квадратні нерівності

Приклад 3. Розв'язати нерівність $x^2 - 4x + 3 < 0$.

Розв'язання. Відмітимо ту частину параболи

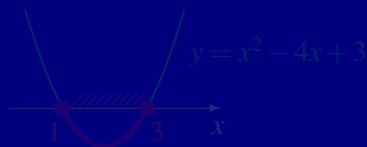


$y = x^2 - 4x + 3$, яка
лежить **нижче** осі Ox і
спроєкуємо її на вісь Ox .
Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in (1; 3)$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $x^2 - 4x + 3 \leq 0$.

Розв'язання. До множини розв'язків нерівності



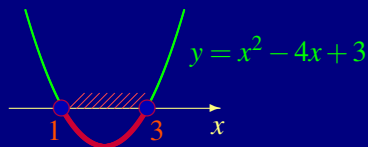
$x^2 - 4x + 3 < 0$ приєд-
наємо корені рівняння
 $x^2 - 4x + 3 = 0$, тобто точки
 $x = 1$ і $x = 3$.
Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in [1; 3]$.

Квадратні нерівності

Приклад 3. Розв'язати нерівність $x^2 - 4x + 3 < 0$.

Розв'язання. Відмітимо ту частину параболи

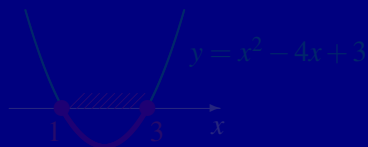


$y = x^2 - 4x + 3$, яка
лежить **нижче** осі Ox і
спроєктуємо її на вісь Ox .
Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in (1; 3)$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $x^2 - 4x + 3 \leq 0$.

Розв'язання. До множини розв'язків нерівності



$x^2 - 4x + 3 < 0$ приєд-
наємо корені рівняння
 $x^2 - 4x + 3 = 0$, тобто точки
 $x = 1$ і $x = 3$.

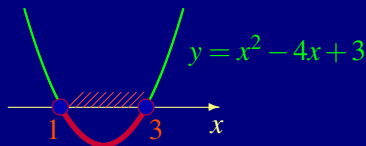
Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in [1; 3]$.

Квадратні нерівності

Приклад 3. Розв'язати нерівність $x^2 - 4x + 3 < 0$.

Розв'язання. Відмітимо ту частину параболи

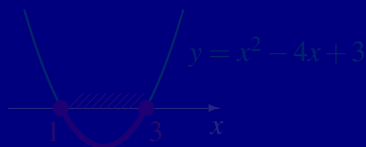


$y = x^2 - 4x + 3$, яка
лежить **нижче** осі Ox і
спроєкуємо її на вісь Ox .
Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in (1; 3)$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $x^2 - 4x + 3 \leq 0$.

Розв'язання. До множини розв'язків нерівності



$x^2 - 4x + 3 < 0$ приєд-
наємо корені рівняння
 $x^2 - 4x + 3 = 0$, тобто точки
 $x = 1$ і $x = 3$.

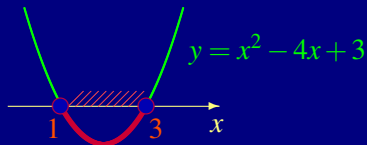
Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in [1; 3]$.

Квадратні нерівності

Приклад 3. Розв'язати нерівність $x^2 - 4x + 3 < 0$.

Розв'язання. Відмітимо ту частину параболи

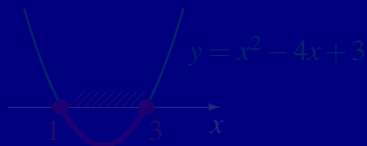


$y = x^2 - 4x + 3$, яка
лежить **нижче** осі Ox і
спроєкуємо її на вісь Ox .
Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in (1; 3)$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $x^2 - 4x + 3 \leq 0$.

Розв'язання. До множини розв'язків нерівності



$x^2 - 4x + 3 < 0$ приєд-
наємо корені рівняння
 $x^2 - 4x + 3 = 0$, тобто точки
 $x = 1$ і $x = 3$.

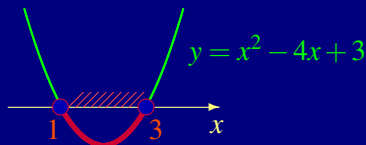
Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in [1; 3]$.

Квадратні нерівності

Приклад 3. Розв'язати нерівність $x^2 - 4x + 3 < 0$.

Розв'язання. Відмітимо ту частину параболи

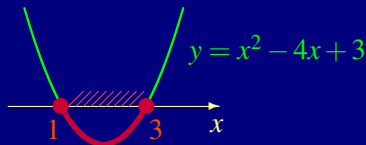


$y = x^2 - 4x + 3$, яка лежить **нижче** осі Ox і спроектуємо її на вісь Ox . Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in (1; 3)$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $x^2 - 4x + 3 \leq 0$.

Розв'язання. До множини розв'язків нерівності



$x^2 - 4x + 3 < 0$ приєднаємо корені рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$, тобто точки $x = 1$ і $x = 3$.

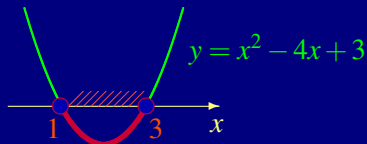
Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in [1; 3]$.

Квадратні нерівності

Приклад 3. Розв'язати нерівність $x^2 - 4x + 3 < 0$.

Розв'язання. Відмітимо ту частину параболи

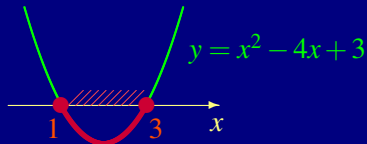


$y = x^2 - 4x + 3$, яка
лежить **нижче** осі Ox і
спроєктуємо її на вісь Ox .
Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in (1; 3)$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $x^2 - 4x + 3 \leq 0$.

Розв'язання. До множини розв'язків нерівності



$x^2 - 4x + 3 < 0$ приєд-
наємо корені рівняння
 $x^2 - 4x + 3 = 0$, тобто точки
 $x = 1$ і $x = 3$.

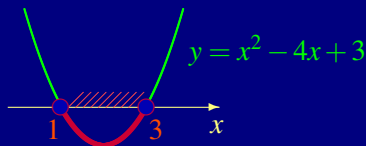
Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in [1; 3]$.

Квадратні нерівності

Приклад 3. Розв'язати нерівність $x^2 - 4x + 3 < 0$.

Розв'язання. Відмітимо ту частину параболи

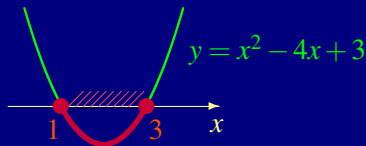


$y = x^2 - 4x + 3$, яка
лежить **нижче** осі Ox і
спроєкуємо її на вісь Ox .
Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in (1; 3)$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $x^2 - 4x + 3 \leq 0$.

Розв'язання. До множини розв'язків нерівності



$x^2 - 4x + 3 < 0$ приєд-
наємо корені рівняння
 $x^2 - 4x + 3 = 0$, тобто точки
 $x = 1$ і $x = 3$.

Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in [1; 3]$.

Квадратні нерівності

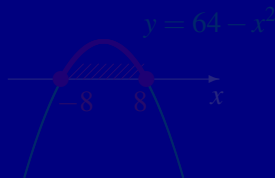
Приклад 5. Розв'язати нерівність $64 - x^2 \geq 0$.

Розв'язання. Графіком функції $y = 64 - x^2$ є парабола, вітки якої направлені вниз.

Знайдемо точки її перетину з віссю Ox , розв'язуючи рівняння $64 - x^2 = 0 \iff x = \pm 8$.

Зобразимо ескіз параболи $y = 64 - x^2$ і відмітимо ту її частину, яка лежить вище осі Ox , включаючи також точки $x = \pm 8$.

Спроектуємо відмічену частину параболи на вісь Ox .



Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in [-8; 8]$.

Квадратні нерівності

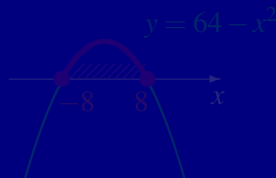
Приклад 5. Розв'язати нерівність $64 - x^2 \geq 0$.

Розв'язання. Графіком функції $y = 64 - x^2$ є **парабола**, **вітки** якої направлені **вниз**.

Знайдемо точки її перетину з віссю Ox , розв'язуючи рівняння $64 - x^2 = 0 \iff x = \pm 8$.

Зобразимо ескіз параболи $y = 64 - x^2$ і відмітимо ту її частину, яка лежить **вище** осі Ox , включаючи також точки $x = \pm 8$.

Спроектуємо відмічену частину параболи на вісь Ox .



Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in [-8; 8]$.

Квадратні нерівності

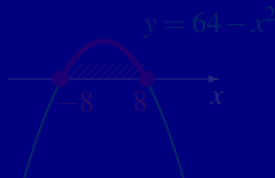
Приклад 5. Розв'язати нерівність $64 - x^2 \geq 0$.

Розв'язання. Графіком функції $y = 64 - x^2$ є **парабола**, **вітки** якої направлені **вниз**.

Знайдемо точки її перетину з віссю Ox , розв'язуючи рівняння $64 - x^2 = 0 \iff x = \pm 8$.

Зобразимо ескіз параболи $y = 64 - x^2$ і відмітимо ту її частину, яка лежить **вище** осі Ox , включаючи також точки $x = \pm 8$.

Спроектуємо відмічену частину параболи на вісь Ox .



Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in [-8; 8]$.

Квадратні нерівності

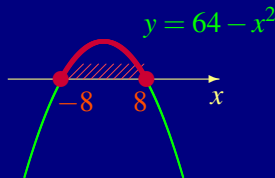
Приклад 5. Розв'язати нерівність $64 - x^2 \geq 0$.

Розв'язання. Графіком функції $y = 64 - x^2$ є парабола, вітки якої направлені вниз.

Знайдемо точки її перетину з віссю Ox , розв'язуючи рівняння $64 - x^2 = 0 \iff x = \pm 8$.

Зобразимо ескіз параболи $y = 64 - x^2$ і відмітимо ту її частину, яка лежить вище осі Ox , включаючи також точки $x = \pm 8$.

Спроектуємо відмічену частину параболи на вісь Ox .



Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in [-8; 8]$.

Квадратні нерівності

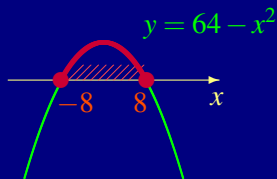
Приклад 5. Розв'язати нерівність $64 - x^2 \geq 0$.

Розв'язання. Графіком функції $y = 64 - x^2$ є парабола, вітки якої направлені вниз.

Знайдемо точки її перетину з віссю Ox , розв'язуючи рівняння $64 - x^2 = 0 \iff x = \pm 8$.

Зобразимо ескіз параболи $y = 64 - x^2$ і відмітимо ту її частину, яка лежить вище осі Ox , включаючи також точки $x = \pm 8$.

Спроектуємо відмічену частину параболи на вісь Ox .



Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in [-8; 8]$.

Квадратні нерівності

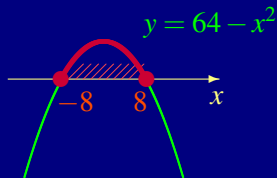
Приклад 5. Розв'язати нерівність $64 - x^2 \geq 0$.

Розв'язання. Графіком функції $y = 64 - x^2$ є парабола, вітки якої направлені вниз.

Знайдемо точки її перетину з віссю Ox , розв'язуючи рівняння $64 - x^2 = 0 \iff x = \pm 8$.

Зобразимо ескіз параболи $y = 64 - x^2$ і відмітимо ту її частину, яка лежить вище осі Ox , включаючи також точки $x = \pm 8$.

Спроектуємо відмічену частину параболи на вісь Ox .



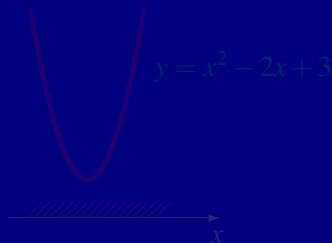
Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in [-8; 8]$.

Квадратні нерівності

Приклад 6. Розв'язати нерівність $x^2 - 2x + 3 \geq 0$.

Розв'язання. Парабола $y = x^2 - 2x + 3$ не перетинає вісь Ox , оскільки квадратне рівняння $x^2 - 2x + 3 = 0$ не має коренів в силу того, що його дискримінант $D = 4 - 12 = -8 < 0$.



Оскільки вітки цієї параболи направлені вгору, то вона цілком лежить вище осі Ox . Проектуючи її на вісь Ox , одержуємо всю числову пряму.

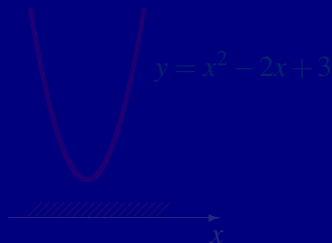
Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in \mathbf{R}$.

Квадратні нерівності

Приклад 6. Розв'язати нерівність $x^2 - 2x + 3 \geq 0$.

Розв'язання. Парабола $y = x^2 - 2x + 3$ **не перетинає вісь Ox** , оскільки квадратне рівняння $x^2 - 2x + 3 = 0$ не має коренів в силу того, що його дискримінант $D = 4 - 12 = -8 < 0$.



Оскільки вітки цієї параболи направлені вгору, то вона цілком лежить вище осі Ox . Проектуючи її на вісь Ox , одержуємо всю числову пряму.

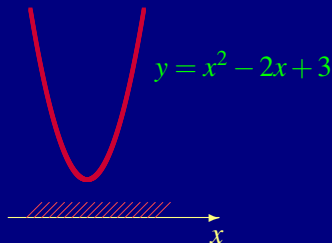
Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in \mathbf{R}$.

Квадратні нерівності

Приклад 6. Розв'язати нерівність $x^2 - 2x + 3 \geq 0$.

Розв'язання. Парабола $y = x^2 - 2x + 3$ **не перетинає вісь Ox** , оскільки квадратне рівняння $x^2 - 2x + 3 = 0$ не має коренів в силу того, що його дискримінант $D = 4 - 12 = -8 < 0$.



Оскільки вітки цієї параболи направлені **вгору**, то вона **цілком лежить вище осі Ox** . Проектуючи її на вісь Ox , одержуємо всю числову пряму.

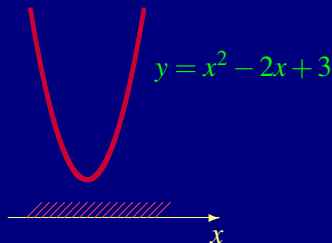
Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in \mathbf{R}$.

Квадратні нерівності

Приклад 6. Розв'язати нерівність $x^2 - 2x + 3 \geq 0$.

Розв'язання. Парабола $y = x^2 - 2x + 3$ **не перетинає вісь Ox** , оскільки квадратне рівняння $x^2 - 2x + 3 = 0$ не має коренів в силу того, що його дискримінант $D = 4 - 12 = -8 < 0$.



Оскільки вітки цієї параболи направлені **вгору**, то вона **цілком лежить вище осі Ox** . Проектуючи її на вісь Ox , одержуємо всю числову пряму.

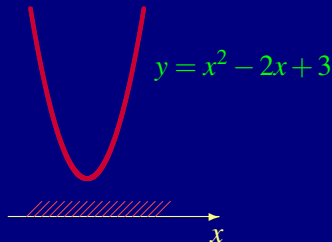
Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in \mathbb{R}$.

Квадратні нерівності

Приклад 6. Розв'язати нерівність $x^2 - 2x + 3 \geq 0$.

Розв'язання. Парабола $y = x^2 - 2x + 3$ **не перетинає вісь Ox** , оскільки квадратне рівняння $x^2 - 2x + 3 = 0$ не має коренів в силу того, що його дискримінант $D = 4 - 12 = -8 < 0$.



Оскільки вітки цієї параболи направлені **вгору**, то вона **цілком лежить вище осі Ox** . Проектуючи її на вісь Ox , одержуємо всю числову пряму.

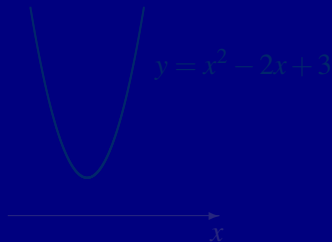
Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in \mathbf{R}$.

Квадратні нерівності

Приклад 7. Розв'язати нерівність $x^2 - 2x + 3 \leq 0$.

Розв'язання. Оскільки вітки параболи $y = x^2 - 2x + 3$ направлені вгору і рівняння $x^2 - 2x + 3 = 0$ не має коренів, то ця парабола цілком лежить вище осі Ox .



Оскільки немає точок вказаної параболи нижче осі Ox та на осі Ox , то нерівність $x^2 - 2x + 3 \leq 0$ не має розв'язків.

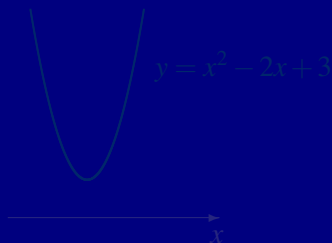
Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in \emptyset$.

Квадратні нерівності

Приклад 7. Розв'язати нерівність $x^2 - 2x + 3 \leq 0$.

Розв'язання. Оскільки вітки параболи $y = x^2 - 2x + 3$ направлені **вгору** і рівняння $x^2 - 2x + 3 = 0$ не має коренів, то ця **парабола цілком лежить вище осі Ox** .



Оскільки немає точок вказаної параболи **нижче** осі Ox та на осі Ox , то нерівність $x^2 - 2x + 3 \leq 0$ не має розв'язків.

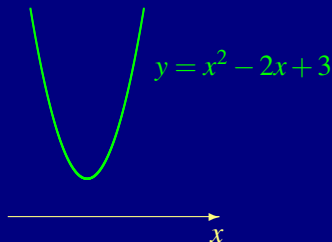
Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in \emptyset$.

Квадратні нерівності

Приклад 7. Розв'язати нерівність $x^2 - 2x + 3 \leq 0$.

Розв'язання. Оскільки вітки параболи $y = x^2 - 2x + 3$ направлені **вгору** і рівняння $x^2 - 2x + 3 = 0$ не має коренів, то ця **парабола цілком лежить вище осі Ox** .



Оскільки немає точок вказаної параболи **нижче** осі Ox та на осі Ox , то нерівність $x^2 - 2x + 3 \leq 0$ не має розв'язків.

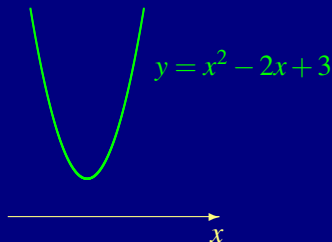
Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in \emptyset$.

Квадратні нерівності

Приклад 7. Розв'язати нерівність $x^2 - 2x + 3 \leq 0$.

Розв'язання. Оскільки вітки параболи $y = x^2 - 2x + 3$ направлені **вгору** і рівняння $x^2 - 2x + 3 = 0$ не має коренів, то ця **парабола цілком лежить вище осі Ox** .



Оскільки немає точок вказаної параболи **нижче** осі Ox та на осі Ox , то нерівність $x^2 - 2x + 3 \leq 0$ не має розв'язків.

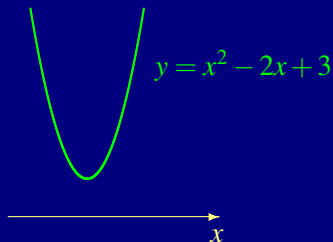
Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in \emptyset$.

Квадратні нерівності

Приклад 7. Розв'язати нерівність $x^2 - 2x + 3 \leq 0$.

Розв'язання. Оскільки вітки параболи $y = x^2 - 2x + 3$ направлені **вгору** і рівняння $x^2 - 2x + 3 = 0$ не має коренів, то ця **парабола цілком лежить вище осі Ox** .



Оскільки немає точок вказаної параболи **нижче** осі Ox та на осі Ox , то нерівність $x^2 - 2x + 3 \leq 0$ не має розв'язків.

Запишемо відповідь.

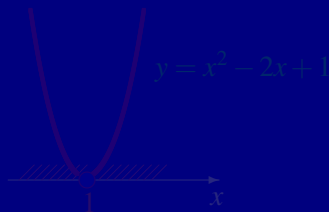
Відповідь: $x \in \emptyset$.

Квадратні нерівності

Приклад 8. Розв'язати нерівність $x^2 - 2x + 1 > 0$.

Розв'язання. Вітки параболи $y = x^2 - 2x + 1$ направлені **вгору**.

Оскільки $x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x - 1)^2 = 0 \iff x = 1$, то ця парабола дотикається до осі Ox в точці осі $x = 1$, яка на малюнку відмічена порожнім кружком, оскільки в цій точці нерівність $x^2 - 2x + 1 > 0$ порушується. Інші точки параболи розміщені **вище** осі Ox .



Проектуючи ці точки на вісь Ox , одержуємо множину розв'язків нерівності $x^2 - 2x + 1 > 0$.

При цьому $x = 1$ не є розв'язком нерівності.

Запишемо відповідь.

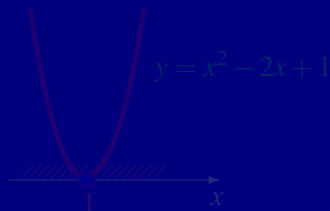
Відповідь: $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Квадратні нерівності

Приклад 8. Розв'язати нерівність $x^2 - 2x + 1 > 0$.

Розв'язання. Вітки параболи $y = x^2 - 2x + 1$ направлені **вгору**.

Оскільки $x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x - 1)^2 = 0 \iff x = 1$, то ця парабола дотикається до осі Ox в точці осі $x = 1$, яка на малюнку відмічена порожнім кружком, оскільки в цій точці нерівність $x^2 - 2x + 1 > 0$ порушується. Інші точки параболи розміщені **вище** осі Ox .



Проектуючи ці точки на вісь Ox , одержуємо множину розв'язків нерівності $x^2 - 2x + 1 > 0$.

При цьому $x = 1$ не є розв'язком нерівності.

Запишемо відповідь.

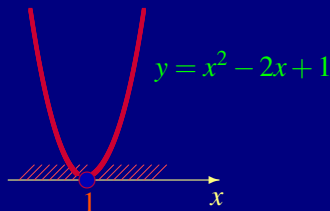
Відповідь: $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Квадратні нерівності

Приклад 8. Розв'язати нерівність $x^2 - 2x + 1 > 0$.

Розв'язання. Вітки параболи $y = x^2 - 2x + 1$ направлені **вгору**.

Оскільки $x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x - 1)^2 = 0 \iff x = 1$, то ця **парабола дотикається до осі Ox** в точці осі $x = 1$, яка на малюнку відмічена порожнім кружком, оскільки в цій точці нерівність $x^2 - 2x + 1 > 0$ порушується. Інші точки параболи розміщені **вище** осі Ox .



Проектуючи ці точки на вісь Ox , одержуємо множину розв'язків нерівності $x^2 - 2x + 1 > 0$.

При цьому $x = 1$ не є розв'язком нерівності.

Запишемо відповідь.

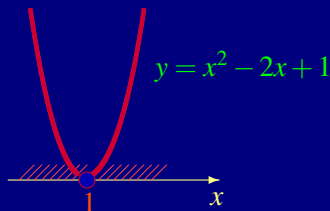
Відповідь: $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Квадратні нерівності

Приклад 8. Розв'язати нерівність $x^2 - 2x + 1 > 0$.

Розв'язання. Вітки параболи $y = x^2 - 2x + 1$ направлені **вгору**.

Оскільки $x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x - 1)^2 = 0 \iff x = 1$, то ця **парабола дотикається до осі Ox** в точці осі $x = 1$, яка на малюнку відмічена порожнім кружком, оскільки в цій точці нерівність $x^2 - 2x + 1 > 0$ порушується. Інші точки параболи розміщені **вище** осі Ox .



Проектуючи ці точки на вісь Ox , одержуємо множину розв'язків нерівності $x^2 - 2x + 1 > 0$.

При цьому $x = 1$ не є розв'язком нерівності.

Запишемо відповідь.

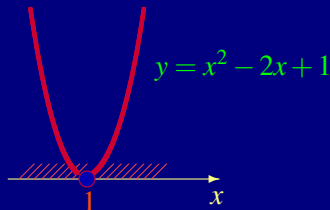
Відповідь: $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Квадратні нерівності

Приклад 8. Розв'язати нерівність $x^2 - 2x + 1 > 0$.

Розв'язання. Вітки параболи $y = x^2 - 2x + 1$ направлені **вгору**.

Оскільки $x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x - 1)^2 = 0 \iff x = 1$, то ця **парабола дотикається до осі Ox** в точці осі $x = 1$, яка на малюнку відмічена порожнім кружком, оскільки в цій точці нерівність $x^2 - 2x + 1 > 0$ порушується. Інші точки параболи розміщені **вище** осі Ox .



Проектуючи ці точки на вісь Ox , одержуємо множину розв'язків нерівності $x^2 - 2x + 1 > 0$.

При цьому $x = 1$ не є розв'язком нерівності.

Запишемо відповідь.

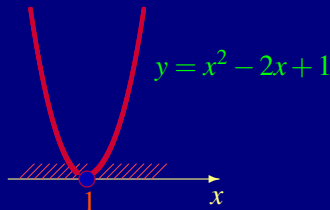
Відповідь: $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Квадратні нерівності

Приклад 8. Розв'язати нерівність $x^2 - 2x + 1 > 0$.

Розв'язання. Вітки параболи $y = x^2 - 2x + 1$ направлені **вгору**.

Оскільки $x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x - 1)^2 = 0 \iff x = 1$, то ця **парабола дотикається до осі Ox** в точці осі $x = 1$, яка на малюнку відмічена порожнім кружком, оскільки в цій точці нерівність $x^2 - 2x + 1 > 0$ порушується. Інші точки параболи розміщені **вище** осі Ox .



Проектуючи ці точки на вісь Ox , одержуємо множину розв'язків нерівності $x^2 - 2x + 1 > 0$.

При цьому $x = 1$ не є розв'язком нерівності.

Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.