Графічний метод розв'язання рівнянь і нерівностей

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 2 (частина третя)

Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

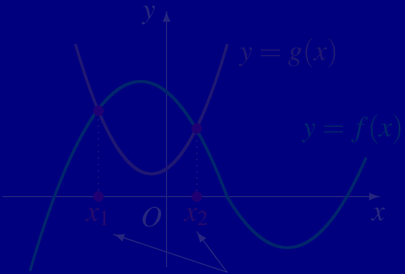
Рене Декарт, "Міркування про метод"

Рівняння виду $f(x)=g(x)$

Розглянемо тепер, як розв'язують графічним методом рівняння виду $f(x)=g(x)$.

Якщо графіки функцій $y=f(x)$ і $y=g(x)$ перетинаються в точці (x_1, y_1), то $y_1=f(x_1)$ і $y_1=g(x_1)$, тобто $f(x_1)=g(x_1)$ і x_1 — корінь рівняння $f(x)=g(x)$. Отже,

- абсциси точок перетину графіків функцій $y=f(x)$ і $y=g(x)$ є коренями рівняння $f(x)=g(x)$.



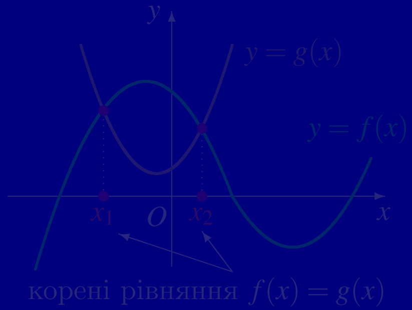
корені рівняння $f(x)=g(x)$

Рівняння виду $f(x)=g(x)$

Розглянемо тепер, як розв'язують графічним методом рівняння виду $f(x)=g(x)$.

Якщо графіки функцій $y=f(x)$ і $y=g(x)$ перетинаються в точці (x_1,y_1), то $y_1=f(x_1)$ і $y_1=g(x_1)$, тобто $f(x_1)=g(x_1)$ і x_1 — корінь рівняння $f(x)=g(x)$. Отже,

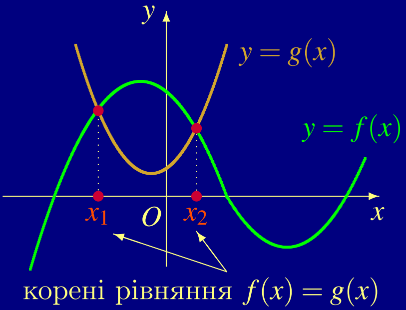
- абсциси точок перетину графіків функцій $y=f(x)$ і $y=g(x)$ є коренями рівняння $f(x)=g(x)$.



Рівняння виду $f(x) = g(x)$

Розглянемо тепер, як розв'язують графічним методом рівняння виду $f(x) = g(x)$.
Якщо графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ перетинаються в точці (x_1, y_1), то $y_1 = f(x_1)$ і $y_1 = g(x_1)$, тобто $f(x_1) = g(x_1)$ і x_1 — корінь рівняння $f(x) = g(x)$. Отже,

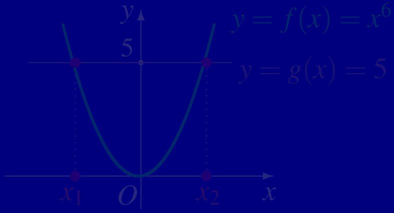
- абсциси точок перетину графіків функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є коренями рівняння $f(x) = g(x)$.



Рівняння виду $f(x)=g(x)$

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x^6=5$.

Розв'язання. Зобразимо ескізи графіків функцій $y=f(x)=x^6$ і $y=g(x)=5$.



Графіки перетинаються в двох точках, тому рівняння має два корені: це абсциси точок перетину. Позначимо їх x_1 і x_2, при цьому $x_1<0<x_2$.

$x_1=-\sqrt[6]{5}$ $\quad x_2=\sqrt[6]{5}$

Додатній корінь рівняння $x^6=5$ називається арифметичним коренем шостого степеня з числа 5 і позначається $\sqrt[6]{5}$, тобто $x_2=\sqrt[6]{5}$.

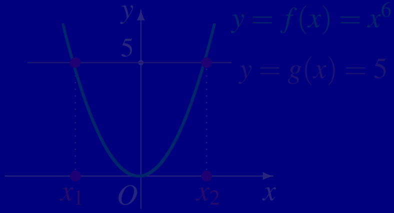
Тоді $x_1=-\sqrt[6]{5}$, оскільки $(-\sqrt[6]{5})^6=(-1)^6(\sqrt[6]{5})^6=1\cdot 5=5$.

Відповідь: $x_1=-\sqrt[6]{5}$, $x_2=\sqrt[6]{5}$.

Рівняння виду $f(x)=g(x)$

П р и к л а д 1. Розв'язати рівняння $x^6=5$.

Р о з в' я з а н н я. Зобразимо ескізи графіків функцій $y=f(x)=x^6$ і $y=g(x)=5$.



Графіки перетинаються в двох точках, тому рівняння має два корені: це абсциси точок перетину. Позначимо їх x_1 і x_2, при цьому $x_1<0<x_2$.

$x_1=-\sqrt[6]{5}$ $\quad x_2=\sqrt[6]{5}$

Додатній корінь рівняння $x^6=5$ називається арифметичним коренем шостого степеня з числа 5 і позначається $\sqrt[6]{5}$, тобто $x_2=\sqrt[6]{5}$.

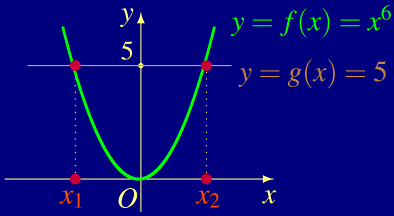
Тоді $x_1=-\sqrt[6]{5}$, оскільки $(-\sqrt[6]{5})^6=(-1)^6(\sqrt[6]{5})^6=1\cdot 5=5$.

В і д п о в і д ь: $x_1=-\sqrt[6]{5}$, $x_2=\sqrt[6]{5}$.

Рівняння виду $f(x)=g(x)$

П р и к л а д 1. Розв'язати рівняння $x^6=5$.

Р о з в' я з а н н я. Зобразимо ескізи графіків функцій $y=f(x)=x^6$ і $y=g(x)=5$.



$x_1=-\sqrt[6]{5}$ $\quad x_2=\sqrt[6]{5}$

Графіки перетинаються в двох точках, тому рівняння має два корені: це абсциси точок перетину. Позначимо їх x_1 і x_2, при цьому $x_1<0<x_2$.

Додатній корінь рівняння $x^6=5$ називається арифметичним коренем шостого степеня з числа 5 і позначається $\sqrt[6]{5}$, тобто $x_2=\sqrt[6]{5}$.

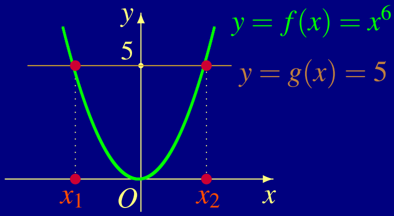
Тоді $x_1=-\sqrt[6]{5}$, оскільки $(-\sqrt[6]{5})^6=(-1)^6(\sqrt[6]{5})^6=1\cdot 5=5$.

В і д п о в і д ь: $x_1=-\sqrt[6]{5}$, $x_2=\sqrt[6]{5}$.

Рівняння виду $f(x) = g(x)$

П р и к л а д 1. Розв'язати рівняння $x^6 = 5$.

Р о з в' я з а н н я. Зобразимо ескізи графіків функцій $y = f(x) = x^6$ і $y = g(x) = 5$.



$x_1 = -\sqrt[6]{5}$ $\quad x_2 = \sqrt[6]{5}$

Графіки перетинаються в двох точках, тому рівняння має два корені: це абсциси точок перетину. Позначимо їх x_1 і x_2, при цьому $x_1 < 0 < x_2$.

Додатній корінь рівняння $x^6 = 5$ називається арифметичним коренем шостого степеня з числа 5 і позначається $\sqrt[6]{5}$, тобто $x_2 = \sqrt[6]{5}$.

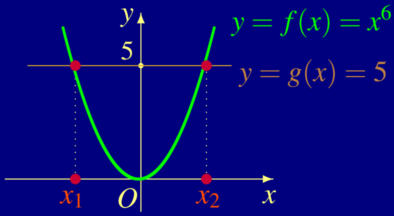
Тоді $x_1 = -\sqrt[6]{5}$, оскільки $(-\sqrt[6]{5})^6 = (-1)^6(\sqrt[6]{5})^6 = 1 \cdot 5 = 5$.

В і д п о в і д ь: $x_1 = -\sqrt[6]{5}$, $x_2 = \sqrt[6]{5}$.

Рівняння виду $f(x)=g(x)$

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x^6=5$.

Розв'язання. Зобразимо ескізи графіків функцій $y=f(x)=x^6$ і $y=g(x)=5$.



$x_1=-\sqrt[6]{5}$ $x_2=\sqrt[6]{5}$

Графіки перетинаються в двох точках, тому рівняння має два корені: це абсциси точок перетину. Позначимо їх x_1 і x_2, при цьому $x_1<0<x_2$.

Додатній корінь рівняння $x^6=5$ називається арифметичним коренем шостого степеня з числа 5 і позначається $\sqrt[6]{5}$, тобто $x_2=\sqrt[6]{5}$.

Тоді $x_1=-\sqrt[6]{5}$, оскільки $(-\sqrt[6]{5})^6=(-1)^6(\sqrt[6]{5})^6=1\cdot 5=5$.

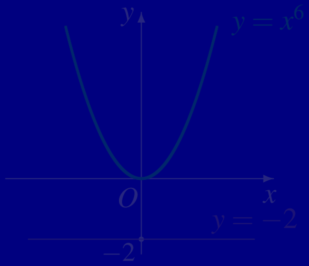
Відповідь: $x_1=-\sqrt[6]{5}$, $x_2=\sqrt[6]{5}$.

Рівняння виду $f(x)=g(x)$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $x^6=-2$.

Розв'язання. Зобразимо ескізи графіків функцій $y=x^6$ і $y=-2$.

Графіки не перетинаються, тому рівняння $x^6=-2$ не має коренів.



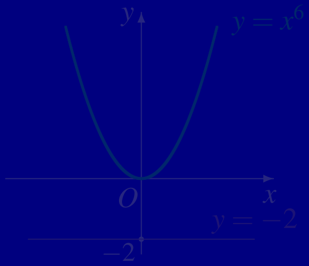
Відповідь: $x\in\varnothing$.

Рівняння виду $f(x) = g(x)$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $x^6 = -2$.

Розв'язання. Зобразимо ескізи графіків функцій $y = x^6$ і $y = -2$.

Графіки не перетинаються, тому рівняння $x^6 = -2$ не має коренів.



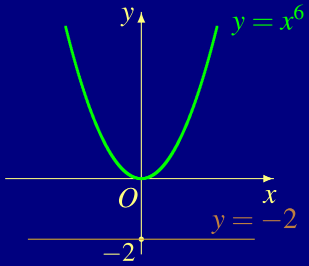
Відповідь: $x \in \varnothing$.

Рівняння виду $f(x) = g(x)$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $x^6 = -2$.

Розв'язання. Зобразимо ескізи графіків функцій $y = x^6$ і $y = -2$.

Графіки не перетинаються, тому рівняння $x^6 = -2$ не має коренів.



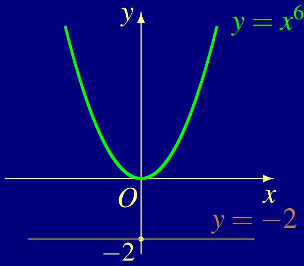
Відповідь: $x \in \varnothing$.

Рівняння виду $f(x)=g(x)$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $x^6=-2$.

Розв'язання. Зобразимо ескізи графіків функцій $y=x^6$ і $y=-2$.

Графіки не перетинаються, тому рівняння $x^6=-2$ не має коренів.

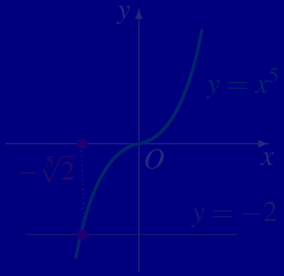


Відповідь: $x\in\varnothing$.

Рівняння виду $f(x)=g(x)$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $x^5=-2$.

Розв'язання. Зобразимо ескізи графіків функцій $y=x^5$ і $y=-2$.



Графіки перетинаються в одній точці, тому рівняння $x^5=-2$ має єдиний корінь $x=\sqrt[5]{-2}$, який називається коренем п'ятого степеня з числа -2.

Оскільки

$$(\sqrt[5]{-2})^5=-2, \quad (-\sqrt[5]{2})^5=(-1)^5(\sqrt[5]{2})^5=(-1)\cdot 2=-2$$

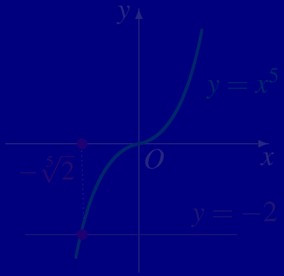
і рівняння $x^5=-2$ має єдиний корінь, то $\sqrt[5]{-2}=-\sqrt[5]{2}$.

Відповідь: $x=-\sqrt[5]{2}$.

Рівняння виду $f(x) = g(x)$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $x^5 = -2$.

Розв'язання. Зобразимо ескізи графіків функцій $y = x^5$ і $y = -2$.



Графіки перетинаються в одній точці, тому рівняння $x^5 = -2$ має єдиний корінь $x = \sqrt[5]{-2}$, який називається коренем п'ятого степеня з числа -2.

Оскільки

$$(\sqrt[5]{-2})^5 = -2, \quad (-\sqrt[5]{2})^5 = (-1)^5(\sqrt[5]{2})^5 = (-1)\cdot 2 = -2$$

і рівняння $x^5 = -2$ має єдиний корінь, то

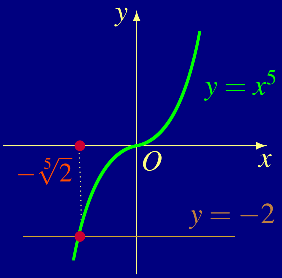
$$\sqrt[5]{-2} = -\sqrt[5]{2}.$$

Відповідь: $x = -\sqrt[5]{2}$.

Рівняння виду $f(x)=g(x)$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $x^5=-2$.

Розв'язання. Зобразимо ескізи графіків функцій $y=x^5$ і $y=-2$.



Графіки перетинаються в одній точці, тому рівняння $x^5=-2$ має єдиний корінь $x=\sqrt[5]{-2}$, який називається коренем п'ятого степеня з числа -2.

Оскільки

$$(\sqrt[5]{-2})^5=-2,\quad (-\sqrt[5]{2})^5=(-1)^5(\sqrt[5]{2})^5=(-1)\cdot 2=-2$$

і рівняння $x^5=-2$ має єдиний корінь, то

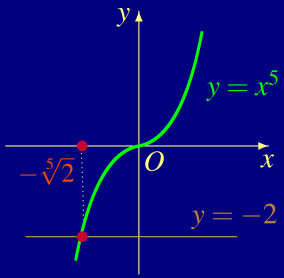
$$\sqrt[5]{-2}=-\sqrt[5]{2}.$$

Відповідь: $x=-\sqrt[5]{2}$.

Рівняння виду $f(x) = g(x)$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $x^5 = -2$.

Розв'язання. Зобразимо ескізи графіків функцій $y = x^5$ і $y = -2$.



Графіки перетинаються в одній точці, тому рівняння $x^5 = -2$ має єдиний корінь $x = \sqrt[5]{-2}$, який називається коренем п'ятого степеня з числа -2.

Оскільки

$$(\sqrt[5]{-2})^5 = -2, \quad (-\sqrt[5]{2})^5 = (-1)^5(\sqrt[5]{2})^5 = (-1)\cdot 2 = -2$$

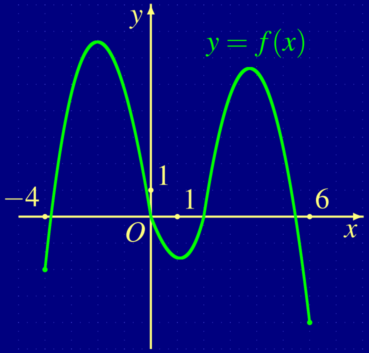
і рівняння $x^5 = -2$ має єдиний корінь, то

$$\sqrt[5]{-2} = -\sqrt[5]{2}.$$

Відповідь: $x = -\sqrt[5]{2}$.

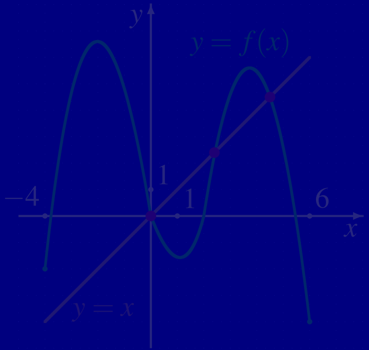
Приклад із ЗНО

П р и к л а д 4 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.). На рисунку зображено графік функції $y=f(x)$, яка визначена на відрізку $[-4;6]$. Скільки всього коренів має рівняння $f(x)=x$ на цьому відрізку?



Приклад із ЗНО

Р о з в' я з а н н я. Зобразимо також графік функції $y=x$, який є бісектрисою першого і третього координатних кутів:

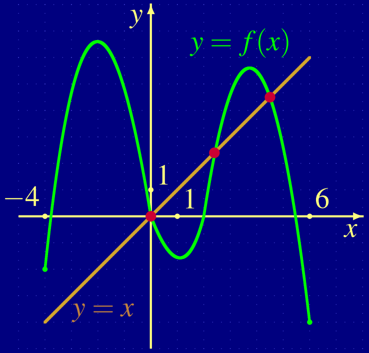


Оскільки графіки перетинаються у трьох точках, то рівняння $f(x)=x$ має три корені на відрізку $[-4;6]$.

В і д п о в і д ь: 3 корені.

Приклад із ЗНО

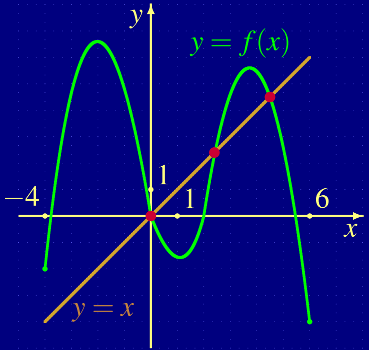
Р о з в' я з а н н я. Зобразимо також графік функції $y = x$, який є бісектрисою першого і третього координатних кутів:



Оскільки графіки перетинаються у трьох точках, то рівняння $f(x) = x$ має три корені на відрізку $[-4; 6]$.
В і д п о в і д ь: 3 корені.

Приклад із ЗНО

Р о з в' я з а н н я. Зобразимо також графік функції $y = x$, який є бісектрисою першого і третього координатних кутів:

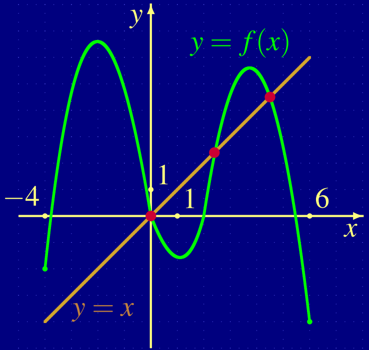


Оскільки графіки перетинаються у трьох точках, то рівняння $f(x) = x$ має три корені на відрізку $[-4; 6]$.

В і д п о в і д ь: 3 корені.

Приклад із ЗНО

Р о з в' я з а н н я. Зобразимо також графік функції $y=x$, який є бісектрисою першого і третього координатних кутів:

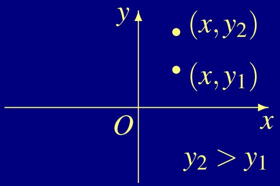


Оскільки графіки перетинаються у трьох точках, то рівняння $f(x)=x$ має три корені на відрізку $[-4;6]$.

В і д п о в і д ь: 3 корені.

Розв'язання нерівностей графічним методом

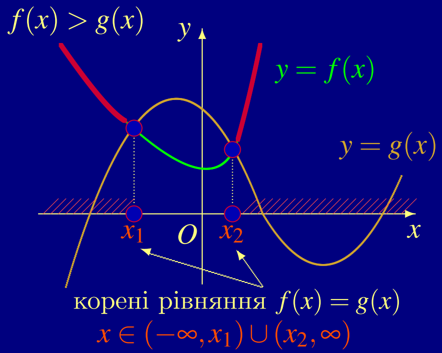
Перш, ніж розглянути розв'язання нерівностей $f(x) > g(x), f(x) < g(x)$, $f(x) \geq g(x), f(x) \leq g(x)$ графічним методом, відзначимо як очевидний факт, що з двох точок $(x, y_1), (x, y_2)$ вище лежить та, у якої більша ордината:



Нерівності виду $f(x) > g(x)$

Тому,

- щоб розв'язати нерівність $f(x) > g(x)$ графічним методом, потрібно знайти ті x, при яких точка графіка функції $y = f(x)$ лежить вище відповідної точки графіка функції $y = g(x)$:

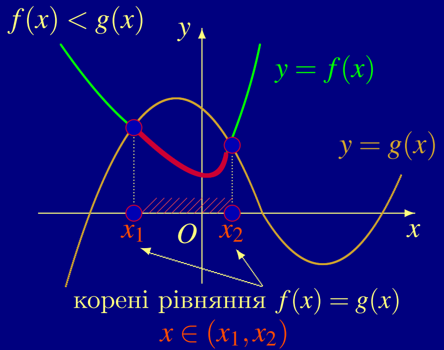


Тут на малюнку множина розв'язків нерівності $f(x) > g(x)$ має вигляд $(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$.

Нерівності виду $f(x) < g(x)$

Аналогічно,

- розв'язки нерівності $f(x) < g(x)$ – це ті x, при яких точка графіка функції $y = f(x)$ лежить нижче відповідної точки графіка функції $y = g(x)$:

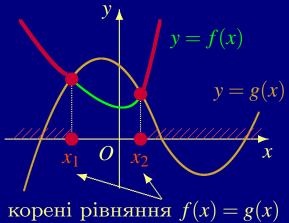


Тут на малюнку множина розв'язків нерівності $f(x) < g(x)$ має вигляд (x_1, x_2).

Нерівності виду $f(x) \geq g(x)$ і $f(x) \leq g(x)$

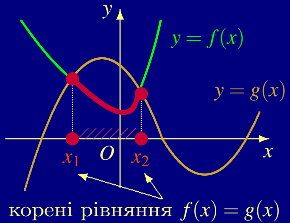
- При розв'язанні нерівності $f(x) \geq g(x)$ (чи $f(x) \leq g(x)$) до розв'язків нерівності $f(x) > g(x)$ (чи, відповідно, $f(x) < g(x)$) слід приєднати корені рівняння $f(x) = g(x)$:

$f(x) \geq g(x)$



$x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty)$

$f(x) \leq g(x)$

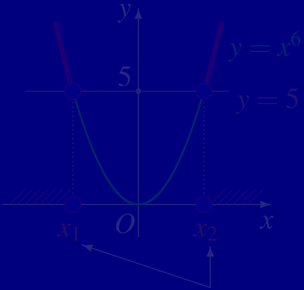


$x \in [x_1, x_2]$

Приклади

Приклад 5. Розв'язати нерівність $x^6 > 5$.

Розв'язання. Зобразимо ескізи графіків функцій $y = x^6$, $y = 5$ і розв'яжемо нерівність графічним методом.



корені рівняння $x^6 = 5$

Відмітимо частини кривої $y = x^6$, розміщені вище прямої (тобто над прямою) $y = 5$ і спроектуємо їх на вісь Ox, відмічаючи штриховкою відповідні проміжки.

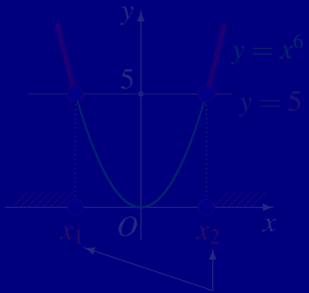
Множина розв'язків нерівності $x^6 > 5$ має вигляд $(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$, де x_1 і x_2 – корені рівняння $x^6 = 5$, тобто $x_1 = -\sqrt[6]{5}$, $x_2 = \sqrt[6]{5}$.

Відповідь: $x \in (-\infty, -\sqrt[6]{5}) \cup (\sqrt[6]{5}, \infty)$.

Приклади

Приклад 5. Розв'язати нерівність $x^6 > 5$.

Розв'язання. Зобразимо ескізи графіків функцій $y = x^6$, $y = 5$ і розв'яжемо нерівність графічним методом.



корені рівняння $x^6 = 5$

Відмітимо частини кривої $y = x^6$, розміщені вище прямої (тобто над прямою) $y = 5$ і спроектуємо їх на вісь Ox, відмічаючи штриховкою відповідні проміжки.

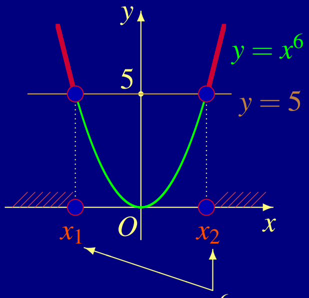
Множина розв'язків нерівності $x^6 > 5$ має вигляд $(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$, де x_1 і x_2 – корені рівняння $x^6 = 5$, тобто $x_1 = -\sqrt[6]{5}$, $x_2 = \sqrt[6]{5}$.

Відповідь: $x \in (-\infty, -\sqrt[6]{5}) \cup (\sqrt[6]{5}, \infty)$.

Приклади

Приклад 5. Розв'язати нерівність $x^6 > 5$.

Розв'язання. Зобразимо ескізи графіків функцій $y = x^6$, $y = 5$ і розв'яжемо нерівність графічним методом.



корені рівняння $x^6 = 5$

Відмітимо частини кривої $y = x^6$, розміщені вище прямої (тобто над прямою) $y = 5$ і спроектуємо їх на вісь Ox, відмічаючи штриховкою відповідні проміжки.

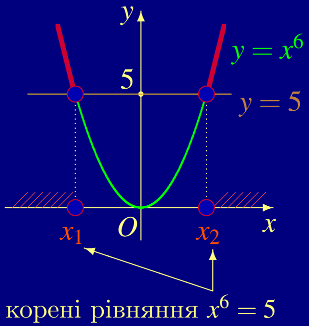
Множина розв'язків нерівності $x^6 > 5$ має вигляд $(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$, де x_1 і x_2 – корені рівняння $x^6 = 5$, тобто $x_1 = -\sqrt[6]{5}$, $x_2 = \sqrt[6]{5}$.

Відповідь: $x \in (-\infty, -\sqrt[6]{5}) \cup (\sqrt[6]{5}, \infty)$.

Приклади

Приклад 5. Розв'язати нерівність $x^6>5$.

Розв'язання. Зобразимо ескізи графіків функцій $y=x^6$, $y=5$ і розв'яжемо нерівність графічним методом.



Відмітимо частини кривої $y=x^6$, розміщені вище прямої (тобто над прямою) $y=5$ і спроектуємо їх на вісь Ox, відмічаючи штриховкою відповідні проміжки.

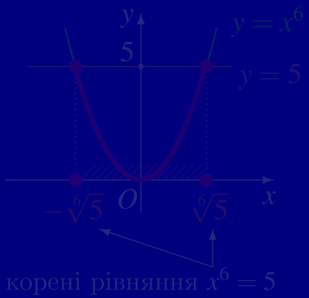
Множина розв'язків нерівності $x^6>5$ має вигляд $(-\infty,x_1)\cup(x_2,\infty)$, де x_1 і x_2 – корені рівняння $x^6=5$, тобто $x_1=-\sqrt[6]{5}$, $x_2=\sqrt[6]{5}$.

Відповідь: $x\in(-\infty,-\sqrt[6]{5})\cup(\sqrt[6]{5},\infty)$.

Приклади

Приклад 6. Розв'язати нерівність $x^6 \le 5$.

Розв'язання. Розв'яжемо нерівність графічним методом.



Відмітимо частину кривої $y = x^6$, розміщену нижче прямої (тобто під прямою) $y = 5$ (включаючи точки перетину графіків) і спроектуємо її на вісь Ox, відмічаючи штриховкою відповідний проміжок.

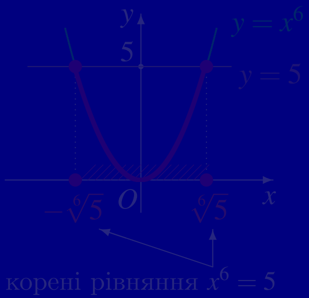
Множина розв'язків нерівності $x^6 \le 5$ має вигляд $[x_1, x_2]$, де $x_1 = -\sqrt[6]{5}$ і $x_2 = \sqrt[6]{5}$ – корені рівняння $x^6 = 5$.

Відповідь: $x \in [-\sqrt[6]{5}, \sqrt[6]{5}]$.

Приклади

Приклад 6. Розв'язати нерівність $x^6 \leq 5$.

Розв'язання. Розв'яжемо нерівність графічним методом.



Відмітимо частину кривої $y=x^6$, розміщену нижче прямої (тобто під прямою) $y=5$ (включаючи точки перетину графіків) і спроектуємо її на вісь Ox, відмічаючи штриховкою відповідний проміжок.

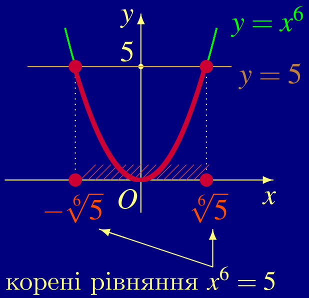
Множина розв'язків нерівності $x^6 \leq 5$ має вигляд $[x_1, x_2]$, де $x_1=-\sqrt[6]{5}$ і $x_2=\sqrt[6]{5}$ – корені рівняння $x^6=5$.

Відповідь: $x \in [-\sqrt[6]{5}, \sqrt[6]{5}]$.

Приклади

Приклад 6. Розв'язати нерівність $x^6 \le 5$.

Розв'язання. Розв'яжемо нерівність графічним методом.



Відмітимо частину кривої $y = x^6$, розміщену нижче прямої (тобто під прямою) $y = 5$ (включаючи точки перетину графіків) і спроектуємо її на вісь Ox, відмічаючи штриховкою відповідний проміжок.

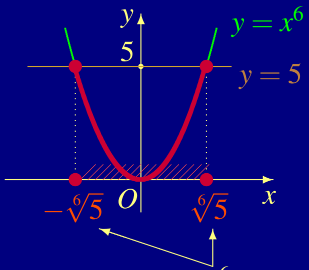
Множина розв'язків нерівності $x^6 \le 5$ має вигляд $[x_1, x_2]$, де $x_1 = -\sqrt[6]{5}$ і $x_2 = \sqrt[6]{5}$ – корені рівняння $x^6 = 5$.

Відповідь: $x \in [-\sqrt[6]{5}, \sqrt[6]{5}]$.

Приклади

Приклад 6. Розв'язати нерівність $x^6 \leq 5$.

Розв'язання. Розв'яжемо нерівність графічним методом.



корені рівняння $x^6 = 5$

Відмітимо частину кривої $y = x^6$, розміщену нижче прямої (тобто під прямою) $y = 5$ (включаючи точки перетину графіків) і спроектуємо її на вісь Ox, відмічаючи штриховкою відповідний проміжок.

Множина розв'язків нерівності $x^6 \leq 5$ має вигляд $[x_1, x_2]$, де $x_1 = -\sqrt[6]{5}$ і $x_2 = \sqrt[6]{5}$ – корені рівняння $x^6 = 5$.

Відповідь: $x \in [-\sqrt[6]{5}, \sqrt[6]{5}]$.

Приклади

Приклад 7. Розв'язати нерівність $x^5 > -7$.

Розв'язання. Розв'яжемо нерівність графічним методом.

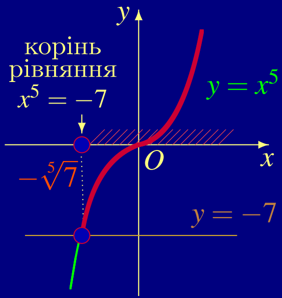
Відмітимо частину кривої $y = x^5$, розміщену вище прямої $y = -7$ і спроектуємо її на вісь Ox, відмічаючи штриховкою відповідний проміжок. При цьому $\sqrt[5]{-7} = -\sqrt[5]{7}$ – корінь рівняння $x^5 = -7$.

Відповідь: $x \in (-\sqrt[5]{7}, \infty)$.

Приклади

Приклад 7. Розв'язати нерівність $x^5 > -7$.

Розв'язання. Розв'яжемо нерівність графічним методом.



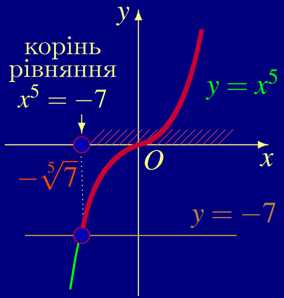
Відмітимо частину кривої $y = x^5$, розміщену вище прямої $y = -7$ і спроектуємо її на вісь Ox, відмічаючи штриховкою відповідний проміжок. При цьому $\sqrt[5]{-7} = -\sqrt[5]{7}$ – корінь рівняння $x^5 = -7$.

Відповідь: $x \in (-\sqrt[5]{7}, \infty)$.

Приклади

Приклад 7. Розв'язати нерівність $x^5 > -7$.

Розв'язання. Розв'яжемо нерівність графічним методом.



Відмітимо частину кривої $y = x^5$, розміщену вище прямої $y = -7$ і спроектуємо її на вісь Ox, відмічаючи штриховкою відповідний проміжок. При цьому $\sqrt[5]{-7} = -\sqrt[5]{7}$ – корінь рівняння $x^5 = -7$.

Відповідь: $x \in (-\sqrt[5]{7}, \infty)$.

Приклади

Приклад 8. Розв'язати нерівність $\frac{1}{x} \le 1$.

Розв'язання. Зобразимо гіперболу $y=\frac{1}{x}$ і пряму $y=1$.

Відмітимо частини гіперболи, розміщені нижче прямої $y=1$ (включаючи спільну точку графіків) і спроектуємо їх на вісь Ox, відмічаючи штриховкою відповідні проміжки.

При цьому відмітимо, що функція $y=\frac{1}{x}$ не визначена в точці $x=0$, тобто ця точка не входить в область допустимих значень (ОДЗ) нерівності.

Відповідь: $x\in(-\infty,0)\cup[1,\infty)$.

Приклади

Приклад 8. Розв'язати нерівність $\frac{1}{x} \le 1$.

Розв'язання. Зобразимо гіперболу $y = \frac{1}{x}$ і пряму $y = 1$.

Відмітимо частини гіперболи, розміщені нижче прямої $y = 1$ (включаючи спільну точку графіків) і спроектуємо їх на вісь Ox, відмічаючи штриховкою відповідні проміжки.

При цьому відмітимо, що функція $y = \frac{1}{x}$ не визначена в точці $x = 0$, тобто ця точка не входить в область допустимих значень (ОДЗ) нерівності.

Відповідь: $x \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$.

Приклади

П р и к л а д 8. Розв'язати нерівність $\frac{1}{x} \leq 1$.

Р о з в' я з а н н я. Зобразимо гіперболу $y = \frac{1}{x}$ і пряму $y = 1$.

Відмітимо частини гіперболи, розміщені нижче прямої $y = 1$ (включаючи спільну точку графіків) і спроектуємо їх на вісь Ox, відмічаючи штриховкою відповідні проміжки.

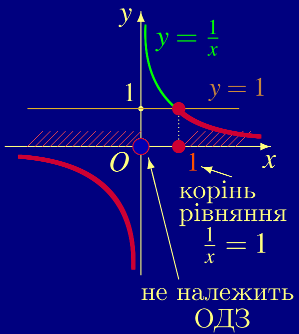
При цьому відмітимо, що функція $y = \frac{1}{x}$ не визначена в точці $x = 0$, тобто ця точка не входить в область допустимих значень (ОДЗ) нерівності.

В і д п о в і д ь: $x \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$.

Приклади

Приклад 8. Розв'язати нерівність $\frac{1}{x} \le 1$.

Розв'язання. Зобразимо гіперболу $y = \frac{1}{x}$ і пряму $y = 1$.



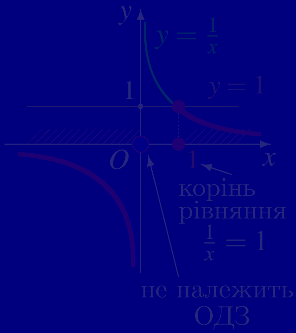
Відмітимо частини гіперболи, розміщені нижче прямої $y = 1$ (включаючи спільну точку графіків) і спроектуємо їх на вісь Ox, відмічаючи штриховкою відповідні проміжки.

При цьому відмітимо, що функція $y = \frac{1}{x}$ не визначена в точці $x = 0$, тобто ця точка не входить в область допустимих значень (ОДЗ) нерівності.

Відповідь: $x \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$.

Приклади

Аналізуючи процес розв'язання нерівностей в прикладах 5 – 8, можна помітити, що використання графічного методу дозволяє процес розв'язання нерівностей звести, по-суті, до розв'язання відповідних рівнянь.



Наприклад, щоб розв'язати нерівність $\frac{1}{x} \leq 1$, достатньо розв'язати рівняння $\frac{1}{x}=1$ і записати відповідь з урахуванням взаємного розміщення графіків функцій $y=\frac{1}{x}$ і $y=1$ (див. малюнок):
$x \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$.

Приклади

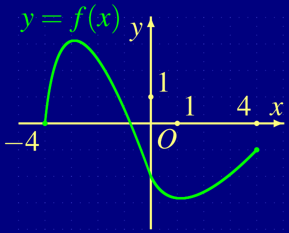
Аналізуючи процес розв'язання нерівностей в прикладах 5 – 8, можна помітити, що використання графічного методу дозволяє процес розв'язання нерівностей звести, по-суті, до розв'язання відповідних рівнянь.

Наприклад, щоб розв'язати нерівність $\frac{1}{x} \le 1$, достатньо розв'язати рівняння $\frac{1}{x}=1$ і записати відповідь з урахуванням взаємного розміщення графіків функцій $y=\frac{1}{x}$ і $y=1$ (див. малюнок):

$x \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$.

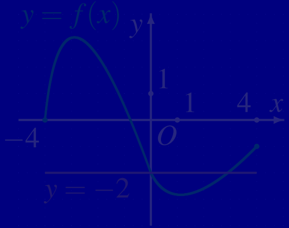
Приклад із ЗНО

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-4;4]$. Знайдіть множину всіх значень x, для яких $f(x) \le -2$.



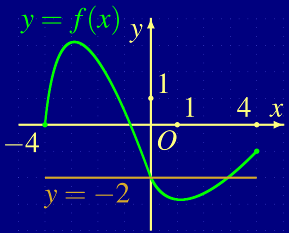
Приклад із ЗНО

Р о з в' я з а н н я. Намалюємо також графік функції $y = -2$ — це пряма, паралельна осі Ox:



Приклад із ЗНО

Р о з в' я з а н н я. Намалюємо також графік функції $y = -2$ — це пряма, паралельна осі Ox:

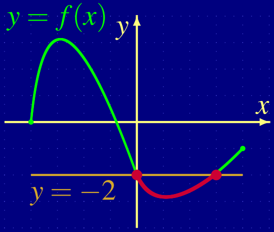


Приклад із ЗНО

Відмітимо частину графіка $y = f(x)$, розміщену нижче прямої (тобто під прямою) $y = -2$, включаючи точки перетину графіків $y = f(x)$ і $y = -2$, в яких виконується рівність $f(x) = -2$, а, отже, і нерівність $f(x) \leq -2$:

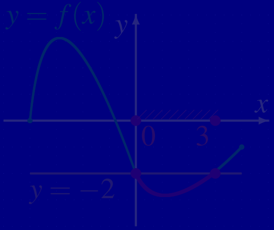
Приклад із ЗНО

Відмітимо частину графіка $y = f(x)$, розміщену нижче прямої (тобто під прямою) $y = -2$, включаючи точки перетину графіків $y = f(x)$ і $y = -2$, в яких виконується рівність $f(x) = -2$, а, отже, і нерівність $f(x) \leq -2$:



Приклад із ЗНО

Спроектуємо на вісь Ox відмічену частину графіка $y = f(x)$ і відповідний проміжок осі Ox відмітимо штриховкою, при цьому кінці проміжка — точки 0 і 3 — є розв'язками нерівності $f(x) \leq -2$:

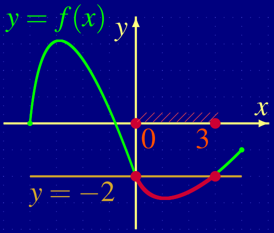


Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in [0;3]$.

Приклад із ЗНО

Спроектуємо на вісь Ox відмічену частину графіка $y = f(x)$ і відповідний проміжок осі Ox відмітимо штриховкою, при цьому кінці проміжка — точки 0 і 3 — є розв'язками нерівності $f(x) \le -2$:

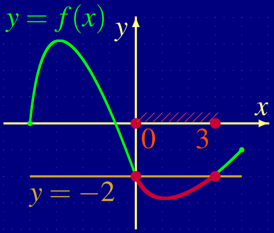


Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in [0;3]$.

Приклад із ЗНО

Спроектуємо на вісь Ox відмічену частину графіка $y = f(x)$ і відповідний проміжок осі Ox відмітимо штриховкою, при цьому кінці проміжка — точки 0 і 3 — є розв'язками нерівності $f(x) \leq -2$:

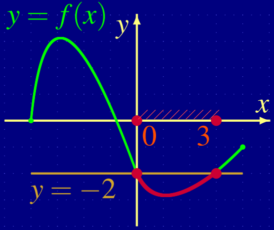


Запишемо відповідь.

Відповідь: $x \in [0;3]$.

Приклад із ЗНО

Спроектуємо на вісь Ox відмічену частину графіка $y = f(x)$ і відповідний проміжок осі Ox відмітимо штриховкою, при цьому кінці проміжка — точки 0 і 3 — є розв'язками нерівності $f(x) \leq -2$:



Запишемо відповідь.

В і д п о в і д ь: $x \in [0;3]$.