Планіметрія-3: Опуклі многокутники

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 16

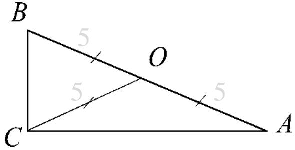
Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Розв'язання задач введенням кількох невідомих

Продовжимо розгляд задач, для розв'язання яких використовується метод введення допоміжної невідомої.

П р и к л а д 1. В прямокутному трикутнику медіана, проведена на гіпотенузу, дорівнює 5, а радіус вписаного кола дорівнює 2. Знайти катети трикутника.



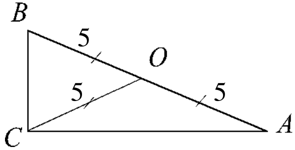
Р о з в' я з а н н я. Нехай O – середина гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC. Оскільки точка O є центром описаного кола, то $OA = OB = OC = 5$, отже, $AB = 10$.

Далі розглянемо два способи розв'язання.

Розв'язання задач введенням кількох невідомих

Продовжимо розгляд задач, для розв'язання яких використовується метод введення допоміжної невідомої.

П р и к л а д 1. В прямокутному трикутнику медіана, проведена на гіпотенузу, дорівнює 5, а радіус вписаного кола дорівнює 2. Знайти катети трикутника.



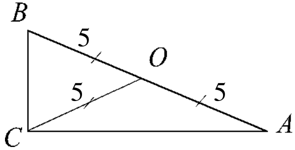
Р о з в' я з а н н я. Нехай O – середина гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC. Оскільки точка O є центром описаного кола, то $OA = OB = OC = 5$, отже, $AB = 10$.

Далі розглянемо два способи розв'язання.

Розв'язання задач введенням кількох невідомих

Продовжимо розгляд задач, для розв'язання яких використовується метод введення допоміжної невідомої.

П р и к л а д 1. В прямокутному трикутнику медіана, проведена на гіпотенузу, дорівнює 5, а радіус вписаного кола дорівнює 2. Знайти катети трикутника.

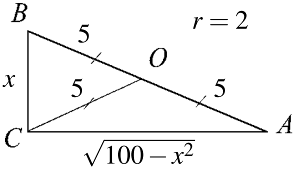


Р о з в' я з а н н я. Нехай O – середина гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC. Оскільки точка O є центром описаного кола, то $OA = OB = OC = 5$, отже, $AB = 10$.

Далі розглянемо два способи розв'язання.

Розв'язання задач введенням кількох невідомих

1-й спосіб. Нехай $BC = x$ – один з катетів трикутника.



Тоді с урахуванням теореми Піфагора виражаємо інший катет: $AC = \sqrt{100-x^2}$.

Тепер, виражаючи через x заданий радіус вписаного кола $r = 2$ за формулою

$$r = \frac{a+b-c}{2},$$

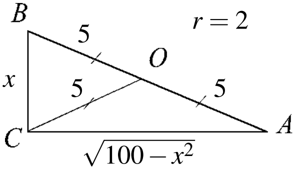
де a, b – катети і c – гіпотенуза трикутника, отримуємо ірраціональне рівняння для знаходження невідомої x:

$$\frac{1}{2}(x + \sqrt{100-x^2} - 10) = 2 \Longleftrightarrow x + \sqrt{100-x^2} - 10 = 4 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{100-x^2} = 14 - x.$$

Розв'язання задач введенням кількох невідомих

1-й спосіб. Нехай $BC = x$ – один з катетів трикутника.



Тоді с урахуванням теореми Піфагора виражаємо інший катет: $AC = \sqrt{100-x^2}$.

Тепер, виражаючи через x заданий радіус вписаного кола $r = 2$ за формулою

$$r = \frac{a+b-c}{2},$$

де a, b – катети і c – гіпотенуза трикутника, отримуємо ірраціональне рівняння для знаходження невідомої x:

$$\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{100-x^2}-10\right) = 2 \iff x+\sqrt{100-x^2}-10 = 4 \iff$$

$$\iff \sqrt{100-x^2} = 14-x.$$

Розв'язання задач введенням кількох невідомих

Перетворюючи отримане рівняння у відповідності з теоремою

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = (g(x))^2, \end{cases}$$

маємо

$$\sqrt{100 - x^2} = 14 - x \Longleftrightarrow \begin{cases} 14 - x \geq 0\,, \\ 100 - x^2 = (14 - x)^2\,. \end{cases}$$

Розв'язуємо квадратне рівняння системи:

$$100 - x^2 = (14 - x)^2 \Longleftrightarrow 100 - x^2 = 196 - 28x + x^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 0 = 2x^2 - 28x + 96 \Longleftrightarrow x^2 - 14x + 48 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6\,, \\ x = 8\,. \end{array} \right.$$

Обидва корені задовольняють нерівність системи.

При $x = 6$ другий катет дорівнює $\sqrt{100 - x^2} = 8$, а у випадку $x = 8$ другий катет знаходимо аналогічно: $\sqrt{100 - x^2} = 6$.

Отже, в будь-якому випадку катети трикутника дорівнюють 6 і 8.

Розв'язання задач введенням кількох невідомих

Перетворюючи отримане рівняння у відповідності з теоремою

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = (g(x))^2, \end{cases}$$

маємо

$$\sqrt{100 - x^2} = 14 - x \Longleftrightarrow \begin{cases} 14 - x \geq 0\,, \\ 100 - x^2 = (14 - x)^2\,. \end{cases}$$

Розв'язуємо квадратне рівняння системи:

$$100 - x^2 = (14 - x)^2 \Longleftrightarrow 100 - x^2 = 196 - 28x + x^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 0 = 2x^2 - 28x + 96 \Longleftrightarrow x^2 - 14x + 48 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6\,, \\ x = 8\,. \end{array} \right.$$

Обидва корені задовольняють нерівність системи.

При $x = 6$ другий катет дорівнює $\sqrt{100 - x^2} = 8$, а у випадку $x = 8$ другий катет знаходимо аналогічно: $\sqrt{100 - x^2} = 6$.

Отже, в будь-якому випадку катети трикутника дорівнюють 6 і 8.

Розв'язання задач введенням кількох невідомих

Перетворюючи отримане рівняння у відповідності з теоремою

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = (g(x))^2, \end{cases}$$

маємо

$$\sqrt{100 - x^2} = 14 - x \Longleftrightarrow \begin{cases} 14 - x \geq 0\,, \\ 100 - x^2 = (14 - x)^2\,. \end{cases}$$

Розв'язуємо квадратне рівняння системи:

$$100 - x^2 = (14 - x)^2 \Longleftrightarrow 100 - x^2 = 196 - 28x + x^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 0 = 2x^2 - 28x + 96 \Longleftrightarrow x^2 - 14x + 48 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6\,, \\ x = 8\,. \end{array} \right.$$

Обидва корені задовольняють нерівність системи.

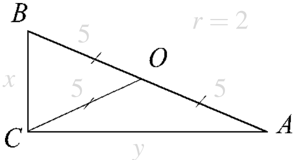
При $x = 6$ другий катет дорівнює $\sqrt{100 - x^2} = 8$, а у випадку $x = 8$ другий катет знаходимо аналогічно: $\sqrt{100 - x^2} = 6$.

Отже, в будь-якому випадку катети трикутника дорівнюють 6 і 8.

Розв'язання задач введенням кількох невідомих

Щоб виключити з розв'язання ірраціональні рівняння вводять кілька невідомих, для знаходження яких потім складають систему рівнянь.

2-й спосіб. Нехай x і y – катети трикутника.



$r = 2$

Тоді для знаходження невідомих x і y з використанням теореми Піфагора $a^2+b^2=c^2$ і формули $r=\frac{a+b-c}{2}$

отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2+y^2=100, \\ \frac{1}{2}(x+y-10)=2. \end{cases}$$

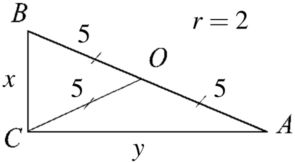
Тепер, виражаючи y з другого рівняння системи і підставляючи отриманий вираз в перше рівняння, отримуємо рівносильну систему

$$\begin{cases} y=14-x, \\ x^2+(14-x)^2=100. \end{cases}$$

Розв'язання задач введенням кількох невідомих

Щоб виключити з розв'язання ірраціональні рівняння вводять кілька невідомих, для знаходження яких потім складають систему рівнянь.

2-й спосіб. Нехай x і y – катети трикутника.



Тоді для знаходження невідомих x і y з використанням теореми Піфагора $a^2+b^2=c^2$ і формули $r=\frac{a+b-c}{2}$

отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2+y^2=100\,, \\ \frac{1}{2}(x+y-10)=2\,. \end{cases}$$

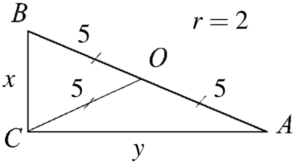
Тепер, виражаючи y з другого рівняння системи і підставляючи отриманий вираз в перше рівняння, отримуємо рівносильну систему

$$\begin{cases} y=14-x\,, \\ x^2+(14-x)^2=100\,. \end{cases}$$

Розв’язання задач введенням кількох невідомих

Щоб виключити з розв’язання ірраціональні рівняння вводять кілька невідомих, для знаходження яких потім складають систему рівнянь.

2-й спосіб. Нехай x і y – катети трикутника.



Тоді для знаходження невідомих x і y з використанням теореми Піфагора $a^2+b^2=c^2$ і формули $r=\frac{a+b-c}{2}$

отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2+y^2=100\,, \\ \frac{1}{2}(x+y-10)=2\,. \end{cases}$$

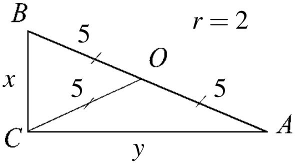
Тепер, виражаючи y з другого рівняння системи і підставляючи отриманий вираз в перше рівняння, отримуємо рівносильну систему

$$\begin{cases} y=14-x\,, \\ x^2+(14-x)^2=100\,. \end{cases}$$

Розв'язання задач введенням кількох невідомих

Щоб виключити з розв'язання ірраціональні рівняння вводять кілька невідомих, для знаходження яких потім складають систему рівнянь.

2-й спосіб. Нехай x і y – катети трикутника.



Тоді для знаходження невідомих x і y з використанням теореми Піфагора $a^2+b^2=c^2$ і формули $r=\frac{a+b-c}{2}$

отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2+y^2=100\,, \\ \frac{1}{2}(x+y-10)=2\,. \end{cases}$$

Тепер, виражаючи y з другого рівняння системи і підставляючи отриманий вираз в перше рівняння, отримуємо рівносильну систему

$$\begin{cases} y=14-x\,, \\ x^2+(14-x)^2=100\,. \end{cases}$$

Розв'язання задач введенням кількох невідомих

Розв'язуємо квадратне рівняння системи:

$$x^2+(14-x)^2=100 \iff x^2+196-28x+x^2=100 \iff$$

$$\iff 2x^2-28x+96=0 \iff x^2-14x+48=0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x=6, \\ x=8. \end{array}\right.$$

В результаті приходимо до системи

$$\begin{cases} y=14-x, \\ \left[\begin{array}{l} x=6, \\ x=8, \end{array}\right. \end{cases}$$

яка має два розв'язки: $x=6$, $y=8$ і $x=8$, $y=6$.

Отже, катети трикутника дорівнюють 6 і 8.

Відповідь: 6 і 8.

Розв'язання задач введенням кількох невідомих

Розв'язуємо квадратне рівняння системи:

$$x^2+(14-x)^2=100 \iff x^2+196-28x+x^2=100 \iff$$

$$\iff 2x^2-28x+96=0 \iff x^2-14x+48=0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x=6, \\ x=8. \end{array}\right.$$

В результаті приходимо до системи

$$\left\{\begin{array}{l} y=14-x, \\ \left[\begin{array}{l} x=6, \\ x=8, \end{array}\right. \end{array}\right.$$

яка має два розв'язки: $x=6$, $y=8$ і $x=8$, $y=6$.

Отже, катети трикутника дорівнюють 6 і 8.

Відповідь: 6 і 8.

Розв'язання задач введенням кількох невідомих

Розв'язуємо квадратне рівняння системи:

$$x^2+(14-x)^2=100 \iff x^2+196-28x+x^2=100 \iff$$

$$\iff 2x^2-28x+96=0 \iff x^2-14x+48=0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x=6, \\ x=8. \end{array}\right.$$

В результаті приходимо до системи

$$\begin{cases} y=14-x, \\ \left[\begin{array}{l} x=6, \\ x=8, \end{array}\right. \end{cases}$$

яка має два розв'язки: $x=6$, $y=8$ і $x=8$, $y=6$.

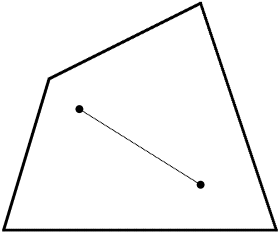
Отже, катети трикутника дорівнюють 6 і 8.

Відповідь: 6 і 8.

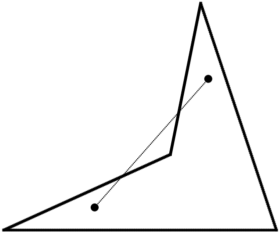
Опуклі чотирикутники

Опуклий чотирикутник має наступну властивість:

- будь-які дві точки, які знаходяться всередині області, обмеженої сторонами чотирикутника, можна сполучити відрізком, що повністю міститься всередині цієї області.



опуклий



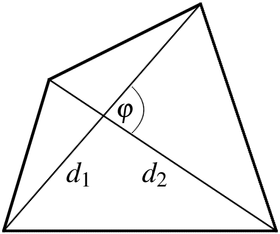
не опуклий

Опуклі чотирикутники

Площа опуклого чотирикутника виражається рівністю

$\boxed{S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi}$,

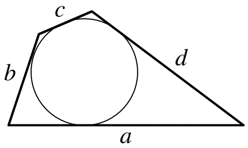
де d_1, d_2 — його діагоналі і φ — кут між ними.



Опуклі чотирикутники. Вписані і описані кола

Не в кожний опуклий чотирикутник вписується коло.

- В опуклий чотирикутник можна вписати коло тоді і тільки тоді, коли суми його протилежних сторін рівні.

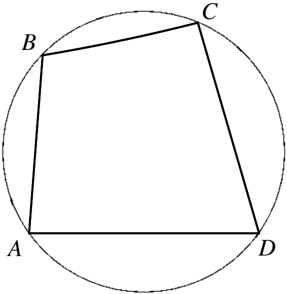


$$\boxed{a+c=b+d}\ .$$

Опуклі чотирикутники. Вписані і описані кола

Навколо опуклого чотирикутника коло описується також не завжди.

- Навколо опуклого чотирикутника можна описати коло тоді і тільки тоді, коли суми його протилежних кутів дорівнюють 180°.

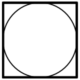


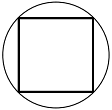
$$\boxed{\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ}.$$

Опуклі чотирикутники. Вписані і описані кола

З цих тверджень випливають наступні властивості деяких видів опуклих чотирикутників:

- коло можна вписати в правильний чотирикутник (квадрат), а також можна описати навколо нього;



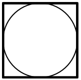


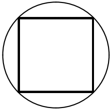
- навколо будь-якого прямокутника можна описати коло, а ось вписати коло в прямокутник можна тільки тоді, коли цей прямокутник є квадратом;

Опуклі чотирикутники. Вписані і описані кола

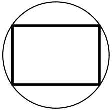
З цих тверджень випливають наступні властивості деяких видів опуклих чотирикутників:

- коло можна вписати в правильний чотирикутник (квадрат), а також можна описати навколо нього;



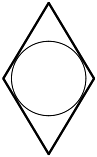


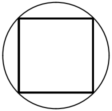
- навколо будь-якого прямокутника можна описати коло, а ось вписати коло в прямокутник можна тільки тоді, коли цей прямокутник є квадратом;



Опуклі чотирикутники. Вписані і описані кола

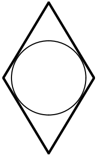
- в будь-який ромб можна вписати коло, а ось описати коло навколо ромба можна тільки тоді, коли цей ромб є квадратом;

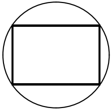




Опуклі чотирикутники. Вписані і описані кола

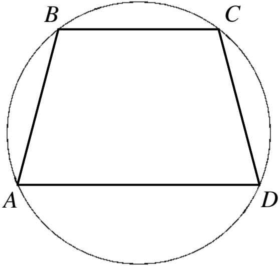
- в паралелограм можна вписати коло тільки тоді, коли паралелограм є ромбом.
  Описати коло навколо паралелограма можна тільки тоді, коли паралелограм є прямокутником;





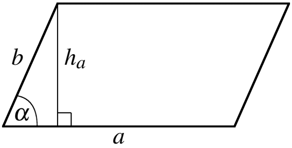
Опуклі чотирикутники. Вписані і описані кола

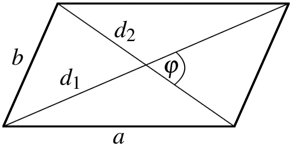
- описати коло навколо трапеції можна тільки тоді, коли ця трапеція є рівнобічною.



$$AB = CD$$

Паралелограм





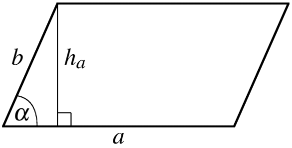
Площа паралелограма виражається рівностями

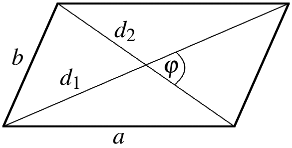
$$\boxed{S = ah_a = ab\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi},$$

де a і b — суміжні сторони паралелограма, α — гострий кут між ними, h_a — висота, проведена на сторону a, d_1 і d_2 — діагоналі паралелограма і φ — кут між ними.

- В паралелограмі сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів усіх сторін: $d_1^2 + d_2^2 = 2(b^2 + c^2)$.

Паралелограм





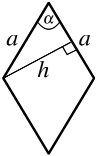
Площа паралелограма виражається рівностями

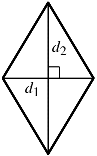
$\boxed{S = ah_a = ab\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi}$,

де a і b — суміжні сторони паралелограма, α — гострий кут між ними, h_a — висота, проведена на сторону a, d_1 і d_2 — діагоналі паралелограма і φ — кут між ними.

- В паралелограмі сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів усіх сторін: $d_1^2 + d_2^2 = 2(b^2 + c^2)$.

Ромб





Площа ромба виражається рівностями

$$\boxed{S = ah = a^2 \sin\alpha = \frac{1}{2}\, d_1 d_2},$$

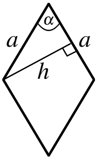
де a — сторона, α — гострий кут, h — висота, d_1 і d_2 — діагоналі ромба.

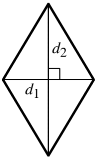
Крім того, справедливі співвідношення

$$h = 2r = a\sin\alpha\ ,$$

де r — радіус вписаного кола.

Ромб

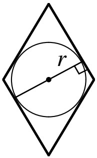




Площа ромба виражається рівностями

$$\boxed{S = ah = a^2 \sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2},$$

де a — сторона, α — гострий кут, h — висота, d_1 і d_2 — діагоналі ромба.

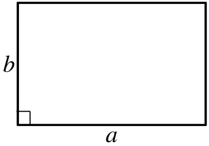


Крім того, справедливі співвідношення

$h = 2r = a\sin\alpha$,

де r — радіус вписаного кола.

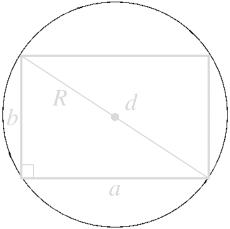
Прямокутник



Площа прямокутника виражається рівністю

$$\boxed{S = ab},$$

де a і b — суміжні сторони прямокутника.

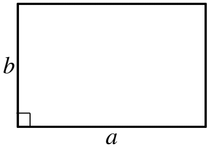


Крім того, справедливі співвідношення

$$d = 2R = \sqrt{a^2 + b^2},$$

де d — діагональ прямокутника, R — радіус описаного кола.

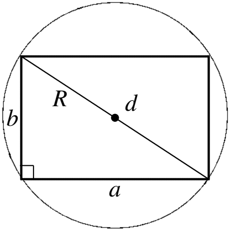
Прямокутник



Площа прямокутника виражається рівністю

$\boxed{S = ab}$,

де a і b — суміжні сторони прямокутника.

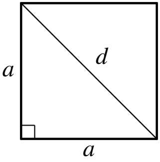


Крім того, справедливі співвідношення

$d = 2R = \sqrt{a^2 + b^2}$,

де d — діагональ прямокутника, R — радіус описаного кола.

Квадрат



Площа квадрата виражається рівностями

$$\boxed{S = a^2 = \frac{1}{2}d^2},$$

де a — сторона квадрата і його діагональ $d = a\sqrt{2}$.

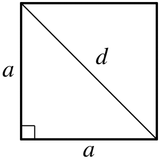
Радіус вписаного кола

$r = \frac{1}{2}a$.

Радіус описаного кола

$R = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

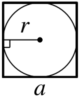
Квадрат



Площа квадрата виражається рівностями

$$\boxed{S = a^2 = \frac{1}{2} d^2},$$

де a — сторона квадрата і його діагональ $d = a\sqrt{2}$.



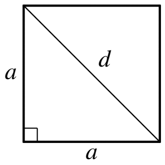
Радіус вписаного кола

$r = \frac{1}{2} a$.

Радіус описаного кола

$R = \frac{\sqrt{2}}{2} a$.

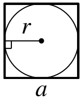
Квадрат



Площа квадрата виражається рівностями

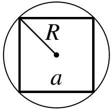
$$\boxed{S = a^2 = \frac{1}{2} d^2},$$

де a — сторона квадрата і його діагональ $d = a\sqrt{2}$.



Радіус вписаного кола

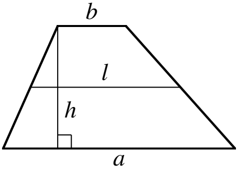
$r = \frac{1}{2} a$.



Радіус описаного кола

$R = \frac{\sqrt{2}}{2} a$.

Трапеція

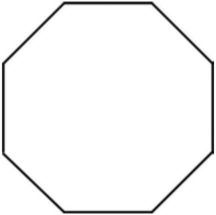


Площа трапеції виражається рівностями

$\boxed{S = \frac{a+b}{2} h = lh}$,

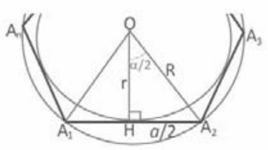
де a і b — основи, h — висота, l — середня лінія трапеції, при цьому $l = \frac{a+b}{2}$.

Правильний многокутник



Правильний многокутник — це опуклий многокутник, у якого всі сторони рівні між собою і всі кути рівні між собою.

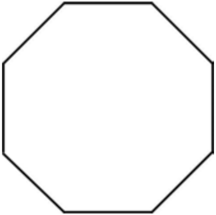
У правильного *n*-кутника сторону $a = A_1A_2$ видно з його центра O під кутом $\alpha = 360°/n$ і радіуси описаного і вписаного кіл виражаються формулами



$$R = \frac{a}{2\sin(\alpha/2)}, \quad r = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}(\alpha/2)}.$$

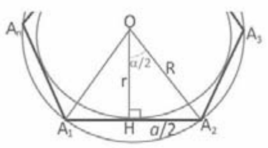
Його площа виражається рівністю $S = \frac{1}{2}nar$ як площа n трикутників A_1OA_2.

Правильний многокутник



Правильний многокутник — це опуклий многокутник, у якого всі сторони рівні між собою і всі кути рівні між собою.

У правильного n-кутника сторону $a = A_1A_2$ видно з його центра O під кутом $\alpha = 360°/n$ і радіуси описаного і вписаного кіл виражаються формулами



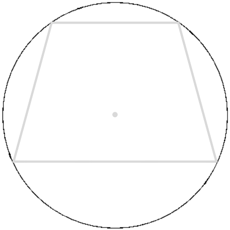
$$R = \frac{a}{2\sin(\alpha/2)}\,, \qquad r = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}(\alpha/2)}\,.$$

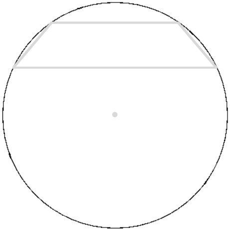
Його площа виражається рівністю $S = \frac{1}{2}nar$ як площа n трикутників A_1OA_2.

Приклади

Приклад 2. Основи рівнобічної трапеції a і b, а гострий кут трапеції дорівнює α. Знайти радіус кола, описаного навколо трапеції.

Розв'язання. Зазначимо, що не відомо розміщення центра описаного кола відносно трапеції (зокрема, центр цього кола може розміщуватися всередині трапеції або поза трапецією).



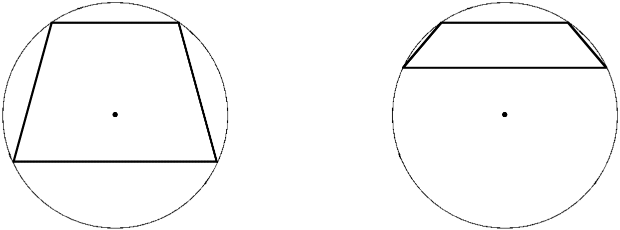


Не зважаючи на це, при розв'язанні задачі вдається уникнути розгляду різних випадків взаємного розміщення трапеції і центра описаного кола.

Приклади

П р и к л а д 2. Основи рівнобічної трапеції a і b, а гострий кут трапеції дорівнює α. Знайти радіус кола, описаного навколо трапеції.

Р о з в'я з а н н я. Зазначимо, що не відомо розміщення центра описаного кола відносно трапеції (зокрема, центр цього кола може розміщуватися всередині трапеції або поза трапецією).

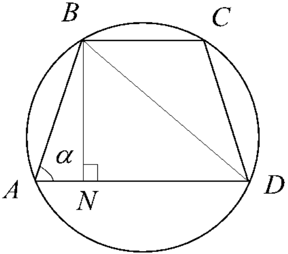


Не зважаючи на це, при розв'язанні задачі вдається уникнути розгляду різних випадків взаємного розміщення трапеції і центра описаного кола.

Приклади

Нехай в трапеції $ABCD$ більша основа $AD = a$ і менша основа $BC = b$.

Помітимо, що описане навколо трапеції коло є також описаним колом навколо $\triangle ABD$. Тому його радіус R можна знайти за формулою



$$R = \frac{BD}{2\sin\alpha}.$$

Отже, розв'язання задачі зводиться до знаходження діагоналі BD трапеції.

Нехай BN – висота трапеції. Тоді $AN = \frac{a-b}{2}$.

В трикутнику ANB: $\frac{AN}{AB} = \cos\alpha$. Звідси виражаємо $AB = \frac{AN}{\cos\alpha} = \frac{a-b}{2\cos\alpha}$.

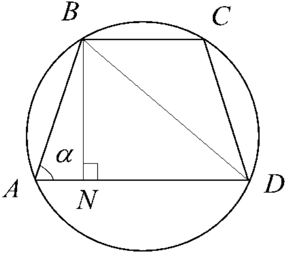
Тепер за теоремою косинусів знаходимо BD:

$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB\cos\alpha}$.

Приклади

Нехай в трапеції $ABCD$ більша основа $AD = a$ і менша основа $BC = b$.

Помітимо, що описане навколо трапеції коло є також описаним колом навколо $\triangle ABD$. Тому його радіус R можна знайти за формулою



$$R = \frac{BD}{2\sin\alpha}.$$

Отже, розв'язання задачі зводиться до знаходження діагоналі BD трапеції.

Нехай BN – висота трапеції. Тоді $AN = \frac{a-b}{2}$.

В трикутнику ANB: $\frac{AN}{AB} = \cos\alpha$. Звідси виражаємо

$AB = \frac{AN}{\cos\alpha} = \frac{a-b}{2\cos\alpha}$.

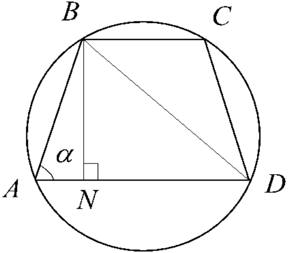
Тепер за теоремою косинусів знаходимо BD:

$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB\cos\alpha}$.

Приклади

Нехай в трапеції $ABCD$ більша основа $AD = a$ і менша основа $BC = b$.

Помітимо, що описане навколо трапеції коло є також описаним колом навколо $\triangle ABD$. Тому його радіус R можна знайти за формулою



$$R = \frac{BD}{2\sin\alpha}.$$

Отже, розв'язання задачі зводиться до знаходження діагоналі BD трапеції.

Нехай BN – висота трапеції. Тоді $AN = \frac{a-b}{2}$.

В трикутнику ANB: $\frac{AN}{AB} = \cos\alpha$. Звідси виражаємо

$AB = \frac{AN}{\cos\alpha} = \frac{a-b}{2\cos\alpha}$.

Тепер за теоремою косинусів знаходимо BD:

$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB\cos\alpha}.$$

Приклади

Підставляючи $AD = a$ і $AB = \frac{a-b}{2\cos\alpha}$ у вираз діагоналі BD, отримуємо

$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2 - 2AD\cdot AB\cos\alpha} = \sqrt{a^2 + \frac{(a-b)^2}{4\cos^2\alpha} - a(a-b)} =$$

$$= \sqrt{\frac{4a^2\cos^2\alpha + (a-b)^2 - 4a(a-b)\cos^2\alpha}{4\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{4a^2\cos^2\alpha + (a-b)^2 - 4a^2\cos^2\alpha + 4ab\cos^2\alpha}{4\cos^2\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{2\cos\alpha}\sqrt{(a-b)^2 + 4ab\cos^2\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha}\sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 4ab\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2\cos\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab(2\cos^2\alpha - 1)} = \frac{1}{2\cos\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\alpha}.$$

Нарешті, підставляючи знайдену діагональ BD в рівність $R = \frac{BD}{2\sin\alpha}$, отримуємо

$$R = \frac{1}{2\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2\sin 2\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\alpha}.$$

Ответ: $R = \frac{1}{2\sin 2\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\alpha}.$

Приклади

Підставляючи $AD = a$ і $AB = \frac{a-b}{2\cos\alpha}$ у вираз діагоналі BD, отримуємо

$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB\cos\alpha} = \sqrt{a^2 + \frac{(a-b)^2}{4\cos^2\alpha} - a(a-b)} =$$

$$= \sqrt{\frac{4a^2\cos^2\alpha + (a-b)^2 - 4a(a-b)\cos^2\alpha}{4\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{4a^2\cos^2\alpha + (a-b)^2 - 4a^2\cos^2\alpha + 4ab\cos^2\alpha}{4\cos^2\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{2\cos\alpha}\sqrt{(a-b)^2 + 4ab\cos^2\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha}\sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 4ab\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2\cos\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab(2\cos^2\alpha - 1)} = \frac{1}{2\cos\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\alpha}.$$

Нарешті, підставляючи знайдену діагональ BD в рівність $R = \frac{BD}{2\sin\alpha}$, отримуємо

$$R = \frac{1}{2 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2\sin 2\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\alpha}.$$

Ответ: $R = \frac{1}{2\sin 2\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\alpha}$.

Приклади

Підставляючи $AD = a$ і $AB = \frac{a-b}{2\cos\alpha}$ у вираз діагоналі BD, отримуємо

$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB\cos\alpha} = \sqrt{a^2 + \frac{(a-b)^2}{4\cos^2\alpha} - a(a-b)} =$$

$$= \sqrt{\frac{4a^2\cos^2\alpha + (a-b)^2 - 4a(a-b)\cos^2\alpha}{4\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{4a^2\cos^2\alpha + (a-b)^2 - 4a^2\cos^2\alpha + 4ab\cos^2\alpha}{4\cos^2\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{2\cos\alpha}\sqrt{(a-b)^2 + 4ab\cos^2\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha}\sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 4ab\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2\cos\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab(2\cos^2\alpha - 1)} = \frac{1}{2\cos\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\alpha}.$$

Нарешті, підставляючи знайдену діагональ BD в рівність $R = \frac{BD}{2\sin\alpha}$, отримуємо

$$R = \frac{1}{2 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2\sin 2\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\alpha}.$$

Ответ: $R = \frac{1}{2\sin 2\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\alpha}$.

Приклади

Підставляючи $AD = a$ і $AB = \frac{a-b}{2\cos\alpha}$ у вираз діагоналі BD, отримуємо

$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB\cos\alpha} = \sqrt{a^2 + \frac{(a-b)^2}{4\cos^2\alpha} - a(a-b)} =$$

$$= \sqrt{\frac{4a^2\cos^2\alpha + (a-b)^2 - 4a(a-b)\cos^2\alpha}{4\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{4a^2\cos^2\alpha + (a-b)^2 - 4a^2\cos^2\alpha + 4ab\cos^2\alpha}{4\cos^2\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{2\cos\alpha}\sqrt{(a-b)^2 + 4ab\cos^2\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha}\sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 4ab\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2\cos\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab(2\cos^2\alpha - 1)} = \frac{1}{2\cos\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\alpha}.$$

Нарешті, підставляючи знайдену діагональ BD в рівність $R = \frac{BD}{2\sin\alpha}$, отримуємо

$$R = \frac{1}{2 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2\sin 2\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\alpha}.$$

Ответ: $R = \frac{1}{2\sin 2\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\alpha}$.

Приклади

Підставляючи $AD = a$ і $AB = \frac{a-b}{2\cos\alpha}$ у вираз діагоналі BD, отримуємо

$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB\cos\alpha} = \sqrt{a^2 + \frac{(a-b)^2}{4\cos^2\alpha} - a(a-b)} =$$

$$= \sqrt{\frac{4a^2\cos^2\alpha + (a-b)^2 - 4a(a-b)\cos^2\alpha}{4\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{4a^2\cos^2\alpha + (a-b)^2 - 4a^2\cos^2\alpha + 4ab\cos^2\alpha}{4\cos^2\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{2\cos\alpha}\sqrt{(a-b)^2 + 4ab\cos^2\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha}\sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 4ab\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2\cos\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab(2\cos^2\alpha - 1)} = \frac{1}{2\cos\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\alpha}.$$

Нарешті, підставляючи знайдену діагональ BD в рівність $R = \frac{BD}{2\sin\alpha}$, отримуємо

$$R = \frac{1}{2 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2\sin 2\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\alpha}.$$

Ответ: $R = \frac{1}{2\sin 2\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\alpha}.$

Приклади

Підставляючи $AD = a$ і $AB = \frac{a-b}{2\cos\alpha}$ у вираз діагоналі BD, отримуємо

$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB\cos\alpha} = \sqrt{a^2 + \frac{(a-b)^2}{4\cos^2\alpha} - a(a-b)} =$$

$$= \sqrt{\frac{4a^2\cos^2\alpha + (a-b)^2 - 4a(a-b)\cos^2\alpha}{4\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{4a^2\cos^2\alpha + (a-b)^2 - 4a^2\cos^2\alpha + 4ab\cos^2\alpha}{4\cos^2\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{2\cos\alpha}\sqrt{(a-b)^2 + 4ab\cos^2\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha}\sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 4ab\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2\cos\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab(2\cos^2\alpha - 1)} = \frac{1}{2\cos\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\alpha}.$$

Нарешті, підставляючи знайдену діагональ BD в рівність $R = \frac{BD}{2\sin\alpha}$, отримуємо

$$R = \frac{1}{2\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2\sin 2\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\alpha}.$$

Ответ: $R = \frac{1}{2\sin 2\alpha}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\alpha}$.

Приклади

Приклад 3. В прямокутну трапецію вписано коло. Знайти його радіус, якщо основи трапеції a і b.

Розв'язання. Нехай в трапеції $ABCD$ більша основа $AD=a$, менша основа $BC=b$ і $\angle A = \angle B = 90°$.

Розглянемо два способи розв'язання.

1-й спосіб. Введемо допоміжні невідомі $x = AB$ і $y = CD$.

Оскільки в трапецію вписано коло, то $x + y = a + b$. Крім того, записуючи теорему Піфагора для $\triangle CND$, в якому $CN = x$ – висота трапеції і $ND = a - b$, отримуємо $y^2 = x^2 + (a-b)^2$.

Отже, для знаходження невідомих x і y маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = a + b, \\ y^2 = x^2 + (a-b)^2. \end{cases}$$

Приклади

Приклад 3. В прямокутну трапецію вписано коло. Знайти його радіус, якщо основи трапеції a і b.

Розв'язання. Нехай в трапеції $ABCD$ більша основа $AD = a$, менша основа $BC = b$ і $\angle A = \angle B = 90°$.

Розглянемо два способи розв'язання.

1-й спосіб. Введемо допоміжні невідомі $x = AB$ і $y = CD$.

Оскільки в трапецію вписано коло, то $x + y = a + b$. Крім того, записуючи теорему Піфагора для $\triangle CND$, в якому $CN = x$ – висота трапеції і $ND = a - b$, отримуємо $y^2 = x^2 + (a-b)^2$.

Отже, для знаходження невідомих x і y маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = a + b, \\ y^2 = x^2 + (a-b)^2. \end{cases}$$

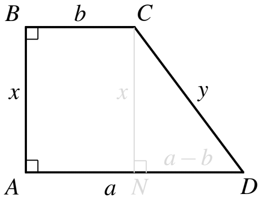
Приклади

Приклад 3. В прямокутну трапецію вписано коло. Знайти його радіус, якщо основи трапеції a і b.

Розв'язання. Нехай в трапеції $ABCD$ більша основа $AD = a$, менша основа $BC = b$ і $\angle A = \angle B = 90°$.

Розглянемо два способи розв'язання.

1-й спосіб. Введемо допоміжні невідомі $x = AB$ і $y = CD$.



Оскільки в трапецію вписано коло, то $x + y = a + b$. Крім того, записуючи теорему Піфагора для $\triangle CND$, в якому $CN = x$ – висота трапеції і $ND = a - b$, отримуємо $y^2 = x^2 + (a - b)^2$.

Отже, для знаходження невідомих x і y маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = a + b, \\ y^2 = x^2 + (a - b)^2. \end{cases}$$

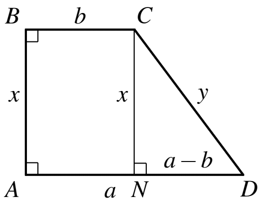
Приклади

Приклад 3. В прямокутну трапецію вписано коло. Знайти його радіус, якщо основи трапеції a і b.

Розв'язання. Нехай в трапеції $ABCD$ більша основа $AD = a$, менша основа $BC = b$ і $\angle A = \angle B = 90^\circ$.

Розглянемо два способи розв'язання.

1-й спосіб. Введемо допоміжні невідомі $x = AB$ і $y = CD$.



Оскільки в трапецію вписано коло, то $x + y = a + b$. Крім того, записуючи теорему Піфагора для $\triangle CND$, в якому $CN = x$ – висота трапеції і $ND = a - b$, отримуємо $y^2 = x^2 + (a-b)^2$.

Отже, для знаходження невідомих x і y маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = a + b, \\ y^2 = x^2 + (a-b)^2. \end{cases}$$

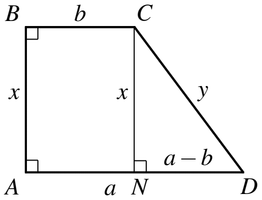
Приклади

П р и к л а д 3. В прямокутну трапецію вписано коло. Знайти його радіус, якщо основи трапеції a і b.

Р о з в' я з а н н я. Нехай в трапеції $ABCD$ більша основа $AD = a$, менша основа $BC = b$ і $\angle A = \angle B = 90^\circ$.

Розглянемо два способи розв'язання.

1-й с п о с і б. Введемо допоміжні невідомі $x = AB$ і $y = CD$.



Оскільки в трапецію вписано коло, то $x + y = a + b$. Крім того, записуючи теорему Піфагора для $\triangle CND$, в якому $CN = x$ – висота трапеції і $ND = a - b$, отримуємо $y^2 = x^2 + (a-b)^2$.

Отже, для знаходження невідомих x і y маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = a + b, \\ y^2 = x^2 + (a-b)^2. \end{cases}$$

Приклади

Тепер, виражаючи y з першого рівняння системи і підставляючи отриманий вираз в друге рівняння, отримуємо

$$\begin{cases} x+y=a+b, \\ y^2=x^2+(a-b)^2, \end{cases} \iff \begin{cases} y=a+b-x, \\ (a+b-x)^2=x^2+(a-b)^2. \end{cases}$$

При розв'язанні другого рівняння системи використаємо формулу скороченого множення

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

Отже, розв'язуючи рівняння системи з невідомою x , отримуємо

$a^2+b^2+x^2+2ab-2ax-2bx=x^2+a^2-2ab+b^2 \iff$

$\iff 4ab=2x(a+b) \iff x=\frac{2ab}{a+b}$.

Шуканий радіус вписаного кола

$r=\frac{x}{2}=\frac{ab}{a+b}$.

Приклади

Тепер, виражаючи y з першого рівняння системи і підставляючи отриманий вираз в друге рівняння, отримуємо

$$\begin{cases} x+y=a+b, \\ y^2=x^2+(a-b)^2, \end{cases} \iff \begin{cases} y=a+b-x, \\ (a+b-x)^2=x^2+(a-b)^2. \end{cases}$$

При розв'язанні другого рівняння системи використаємо формулу скороченого множення

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\ .$$

Отже, розв'язуючи рівняння системи з невідомою x, отримуємо

$$a^2+b^2+x^2+2ab-2ax-2bx=x^2+a^2-2ab+b^2 \iff$$

$$\iff 4ab=2x(a+b) \iff x=\frac{2ab}{a+b}\ .$$

Шуканий радіус вписаного кола

$$r=\frac{x}{2}=\frac{ab}{a+b}\ .$$

Приклади

Тепер, виражаючи y з першого рівняння системи і підставляючи отриманий вираз в друге рівняння, отримуємо

$$\begin{cases} x+y=a+b, \\ y^2=x^2+(a-b)^2, \end{cases} \iff \begin{cases} y=a+b-x, \\ (a+b-x)^2=x^2+(a-b)^2. \end{cases}$$

При розв'язанні другого рівняння системи використаємо формулу скороченого множення

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\ .$$

Отже, розв'язуючи рівняння системи з невідомою x, отримуємо

$$a^2+b^2+x^2+2ab-2ax-2bx=x^2+a^2-2ab+b^2 \iff$$

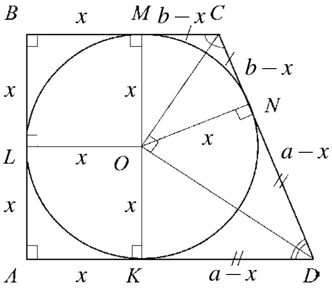
$$\iff 4ab=2x(a+b) \iff x=\frac{2ab}{a+b}\ .$$

Шуканий радіус вписаного кола

$$r=\frac{x}{2}=\frac{ab}{a+b}\ .$$

Приклади

2-й спосіб. Нехай O — центр вписаного кола, а K, L, M і N – точки дотику цього кола відповідно зі сторонами AD, AB, BC і CD.

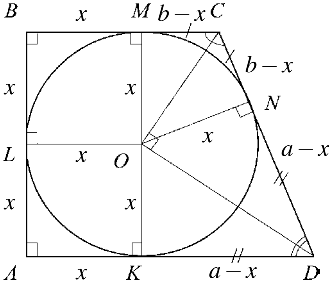


Нехай x – шуканий радіус вписаного кола.
Тоді $AK = AL = LB = BM = x$,
$DN = DK = a - x$,
$CN = CM = b - x$.
Зауважимо, що $\triangle COD$ – прямокутний, оскільки $\angle COD = 90°$.

Доведемо істинність цього зауваження. Так, центр O кола, вписаного в кут ADC, лежить на бісектрисі DO цього кута. Аналогічно встановлюється, що CO – бісектриса кута BCD. Тому справедливі рівності
$\angle ODC + \angle OCD = \frac{1}{2}(\angle ADC + \angle BCD) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$.
Отже, третій кут трикутника COD:
$\angle COD = 180° - (\angle ODC + \angle OCD) = 180° - 90° = 90°$.

Приклади

2-й спосіб. Нехай O — центр вписаного кола, а K, L, M і N – точки дотику цього кола відповідно зі сторонами AD, AB, BC і CD.

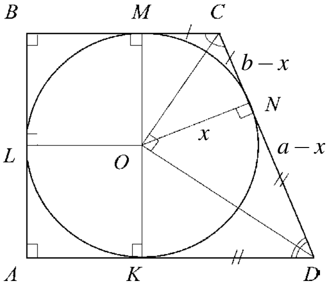


Нехай x – шуканий радіус вписаного кола.
Тоді $AK = AL = LB = BM = x$,
$DN = DK = a - x$,
$CN = CM = b - x$.
Зауважимо, що $\triangle COD$ – прямокутний, оскільки $\angle COD = 90^\circ$.

Доведемо істинність цього зауваження. Так, центр O кола, вписаного в кут ADC, лежить на бісектрисі DO цього кута. Аналогічно встановлюється, що CO – бісектриса кута BCD. Тому справедливі рівності
$\angle ODC + \angle OCD = \frac{1}{2}(\angle ADC + \angle BCD) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$.
Отже, третій кут трикутника COD:
$\angle COD = 180^\circ - (\angle ODC + \angle OCD) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Приклади

Використаємо властивості трикутника COD для того, щоб отримати рівняння з невідомою x. Висотою в $\triangle COD$,



проведеною на його гіпотенузу CD, є радіус вписаного в трапецію кола $ON = x$. Використовуючи властивість цієї висоти: $\frac{CN}{ON} = \frac{ON}{DN}$, отримуємо рівняння для знаходження невідомої x:

$$\frac{b-x}{x} = \frac{x}{a-x}.$$

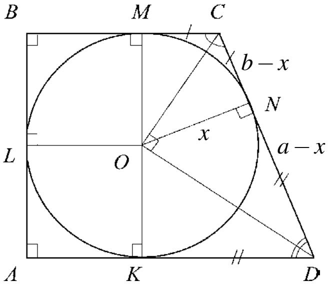
Оскільки знаменники дробів в отриманому рівнянні є довжинами деяких відрізків і не дорівнюють нулю, то перетворимо це рівняння до вигляду

$(b-x)(a-x) = x^2 \iff ab - ax - bx = 0 \iff x = \frac{ab}{a+b}$.

Відповідь: $r = \frac{ab}{a+b}$.

Приклади

Використаємо властивості трикутника COD для того, щоб отримати рівняння з невідомою x. Висотою в $\triangle COD$,



проведеною на його гіпотенузу CD, є радіус вписаного в трапецію кола $ON = x$. Використовуючи властивість цієї висоти: $\frac{CN}{ON} = \frac{ON}{DN}$, отримуємо рівняння для знаходження невідомої x:

$$\frac{b-x}{x} = \frac{x}{a-x}.$$

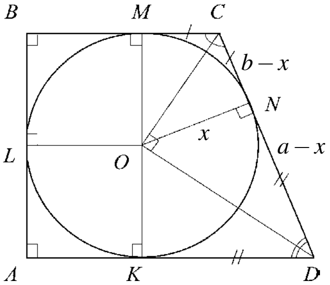
Оскільки знаменники дробів в отриманому рівнянні є довжинами деяких відрізків і не дорівнюють нулю, то перетворимо це рівняння до вигляду

$$(b-x)(a-x) = x^2 \iff ab - ax - bx = 0 \iff x = \frac{ab}{a+b}.$$

Відповідь: $r = \frac{ab}{a+b}$.

Приклади

Використаємо властивості трикутника COD для того, щоб отримати рівняння з невідомою x. Висотою в $\triangle COD$,



проведеною на його гіпотенузу CD, є радіус вписаного в трапецію кола $ON = x$. Використовуючи властивість цієї висоти: $\frac{CN}{ON} = \frac{ON}{DN}$, отримуємо рівняння для знаходження невідомої x:

$$\frac{b-x}{x} = \frac{x}{a-x}.$$

Оскільки знаменники дробів в отриманому рівнянні є довжинами деяких відрізків і не дорівнюють нулю, то перетворимо це рівняння до вигляду

$$(b-x)(a-x) = x^2 \iff ab - ax - bx = 0 \iff x = \frac{ab}{a+b}.$$

Відповідь: $r = \frac{ab}{a+b}$.

Приклади із ЗНО

Приклад 4 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.). Менша сторона прямокутника дорівнює 16 м і утворює з його діагоналлю кут 60°. Середини всіх сторін прямокутника послідовно сполучено. Знайдіть площу утвореного чотирикутника.

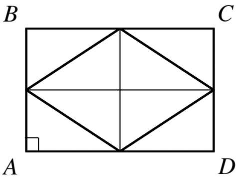
Розв'язання. Помітимо, що ромб, вершинами якого є середини сторін прямокутника $ABCD$, має площу, вдвічі меншу, ніж площа прямокутника $ABCD$:

$$S_{\Diamond} = \frac{1}{2} S_{ABCD}\,.$$

Приклади із ЗНО

Приклад 4 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.). Менша сторона прямокутника дорівнює 16 м і утворює з його діагоналлю кут 60°. Середини всіх сторін прямокутника послідовно сполучено. Знайдіть площу утвореного чотирикутника.

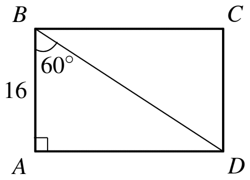
Розв'язання. Помітимо, що ромб, вершинами якого є середини сторін прямокутника $ABCD$, має площу, вдвічі меншу, ніж площа прямокутника $ABCD$:



$$S_{\Diamond} = \frac{1}{2} S_{ABCD}\,.$$

Приклади із ЗНО

Нехай в прямокутнику $ABCD$ сторона $AB = 16$ м і $\angle ABD = 60^\circ$.



Оскільки $\frac{AD}{AB} = \operatorname{tg} 60^\circ$, то $AD = AB \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 16\sqrt{3}$ (м).

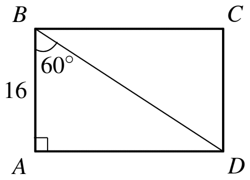
Тоді $S_{ABCD} = AD \cdot AB = 16\sqrt{3} \cdot 16 = 256\sqrt{3}$ (м^2) і

$S_{\diamondsuit} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = 128\sqrt{3}$ (м^2).

Відповідь: $128\sqrt{3}$ м^2.

Приклади із ЗНО

Нехай в прямокутнику $ABCD$ сторона $AB = 16$ м і $\angle ABD = 60^\circ$.



Оскільки $\frac{AD}{AB} = \operatorname{tg} 60^\circ$, то $AD = AB \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 16\sqrt{3}$ (м).

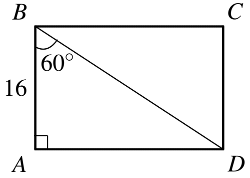
Тоді $S_{ABCD} = AD \cdot AB = 16\sqrt{3} \cdot 16 = 256\sqrt{3}$ (м^2) і

$S_{\diamondsuit} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = 128\sqrt{3}$ (м^2).

Відповідь: $128\sqrt{3}$ м^2.

Приклади із ЗНО

Нехай в прямокутнику $ABCD$ сторона $AB = 16$ м і $\angle ABD = 60^\circ$.



Оскільки $\frac{AD}{AB} = \operatorname{tg} 60^\circ$, то $AD = AB \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 16\sqrt{3}$ (м).

Тоді $S_{ABCD} = AD \cdot AB = 16\sqrt{3} \cdot 16 = 256\sqrt{3}$ (м^2) і

$S_{\diamondsuit} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = 128\sqrt{3}$ (м^2).

Відповідь: $128\sqrt{3}$ м^2.

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2015 р.). З вершини тупого кута B паралелограма $ABCD$ опущено перпендикуляр BO на сторону AD. Коло з центром у точці A проходить через вершину B та перетинає сторону AD в точці K. Відомо, що $AK = 6$ см, $KD = 4$ см, $AO = 5$ см.

1. Визначте периметр паралелограма $ABCD$ (у см).
2. Обчисліть довжину діагоналі BD (у см).

Розв'язання. 1. Оскільки $AD = AK + KD = 6 + 4 = 10$ (см) і $AB = AK = 6$ (см), то периметр паралелограма $ABCD$:

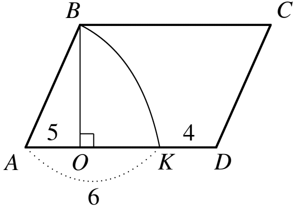
$$P = 2(AD + AB) = 2(10 + 6) = 32 \text{ (см)}.$$

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2015 р.).
З вершини тупого кута B паралелограма $ABCD$ опущено перпендикуляр BO на сторону AD. Коло з центром у точці A проходить через вершину B та перетинає сторону AD в точці K. Відомо, що $AK = 6$ см, $KD = 4$ см, $AO = 5$ см.

1. Визначте периметр паралелограма $ABCD$ (у см).
2. Обчисліть довжину діагоналі BD (у см).

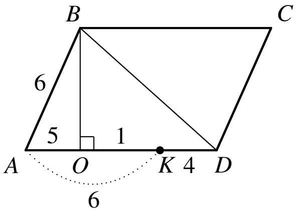
Розв'язання. 1. Оскільки $AD = AK + KD = 6 + 4 = 10$ (см) і $AB = AK = 6$ (см), то периметр паралелограма $ABCD$:



$$P = 2(AD + AB) = 2(10 + 6) = 32 \text{ (см)}.$$

Приклади із ЗНО

2. Оскільки $OK = AK - AO = 6 - 5 = 1$ (см), то $OD = OK + KD = 1 + 4 = 5$ (см).



Тоді $\triangle BOA = \triangle BOD$ за двома катетами: $AO = OD = 5$ і BO – спільний катет цих трикутників.

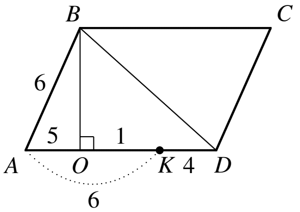
Отже, $BD = AB = 6$ (см).

Відповідь: 1. 32; 2. 6.

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2014 р.). Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута і ділить середню лінію трапеції на відрізки довжиною 13 см і 23 см. Обчисліть (у см^2) площу трапеції.

Приклади із ЗНО

2. Оскільки $OK = AK - AO = 6 - 5 = 1$ (см), то $OD = OK + KD = 1 + 4 = 5$ (см).



Тоді $\triangle BOA = \triangle BOD$ за двома катетами: $AO = OD = 5$ і BO – спільний катет цих трикутників.

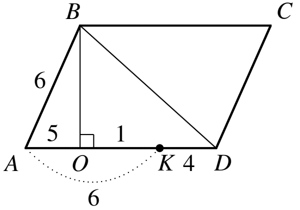
Отже, $BD = AB = 6$ (см).

Відповідь: 1. 32; 2. 6.

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2014 р.). Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута і ділить середню лінію трапеції на відрізки довжиною 13 см і 23 см. Обчисліть (у см^2) площу трапеції.

Приклади із ЗНО

2. Оскільки $OK = AK - AO = 6 - 5 = 1$ (см), то
$OD = OK + KD = 1 + 4 = 5$ (см).



Тоді $\triangle BOA = \triangle BOD$ за двома катетами: $AO = OD = 5$ і BO – спільний катет цих трикутників.

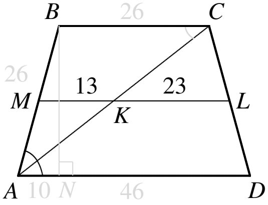
Отже, $BD = AB = 6$ (см).

Відповідь: 1. 32; 2. 6.

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2014 р.). Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута і ділить середню лінію трапеції на відрізки довжиною 13 см і 23 см. Обчисліть (у см^2) площу трапеції.

Приклади із ЗНО

Розв'язання. Нехай діагональ AC трапеції $ABCD$ $(BC \parallel AD,\ AB = CD)$ – бісектриса кута A $(\angle BAC = \angle CAD)$ і ділить середню лінію трапеції на відрізки $MK = 13$ см і $KL = 23$ см. Тоді основи трапеції $AD = 46$ см і $BC = 26$ см.



Оскільки навхрест лежачі кути при паралельних рівні, то $\angle BCA = \angle CAD$. Тому $\angle BCA = \angle BAC$ і $\triangle ABC$ – рівнобедрений, тобто $AB = BC = 26$ см.

Нехай BN – висота трапеції. Тоді $AN = \frac{AD-BC}{2} = \frac{46-26}{2} = 10$ (см).

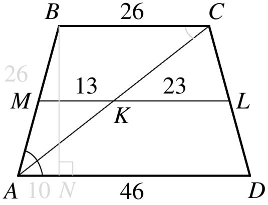
За теоремою Піфагора в $\triangle ANB$ знаходимо $BN = \sqrt{AB^2 - AN^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = 24$ (см).

Нарешті, обчислюємо площу трапеції $S = ML \cdot BN = (13 + 23) \cdot 24 = 36 \cdot 24 = 864$ (см^2).

Відповідь: 864.

Приклади із ЗНО

Розв'язання. Нехай діагональ AC трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $AB = CD$) – бісектриса кута A ($\angle BAC = \angle CAD$) і ділить середню лінію трапеції на відрізки $MK = 13$ см і $KL = 23$ см. Тоді основи трапеції



$AD = 46$ см і $BC = 26$ см.

Оскільки навхрест лежачі кути при паралельних рівні, то $\angle BCA = \angle CAD$. Тому $\angle BCA = \angle BAC$ і $\triangle ABC$ – рівнобедрений, тобто $AB = BC = 26$ см.

Нехай BN – висота трапеції. Тоді $AN = \frac{AD-BC}{2} = \frac{46-26}{2} = 10$ (см).

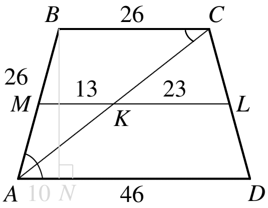
За теоремою Піфагора в $\triangle ANB$ знаходимо $BN = \sqrt{AB^2 - AN^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = 24$ (см).

Нарешті, обчислюємо площу трапеції $S = ML \cdot BN = (13+23) \cdot 24 = 36 \cdot 24 = 864$ (см^2).

Відповідь: 864.

Приклади із ЗНО

Розв'язання. Нехай діагональ AC трапеції $ABCD$ $(BC \parallel AD,\ AB = CD)$ – бісектриса кута A $(\angle BAC = \angle CAD)$ і ділить середню лінію трапеції на відрізки $MK = 13$ см і $KL = 23$ см. Тоді основи трапеції



$AD = 46$ см і $BC = 26$ см.

Оскільки навхрест лежачі кути при паралельних рівні, то $\angle BCA = \angle CAD$. Тому $\angle BCA = \angle BAC$ і $\triangle ABC$ – рівнобедрений, тобто $AB = BC = 26$ см.

Нехай BN – висота трапеції. Тоді $AN = \frac{AD-BC}{2} = \frac{46-26}{2} = 10$ (см).

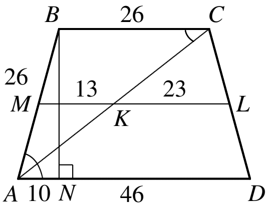
За теоремою Піфагора в $\triangle ANB$ знаходимо $BN = \sqrt{AB^2 - AN^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = 24$ (см).

Нарешті, обчислюємо площу трапеції $S = ML \cdot BN = (13 + 23) \cdot 24 = 36 \cdot 24 = 864$ (см^2).

Відповідь: 864.

Приклади із ЗНО

Розв'язання. Нехай діагональ AC трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $AB = CD$) – бісектриса кута A ($\angle BAC = \angle CAD$) і ділить середню лінію трапеції на відрізки $MK = 13$ см і $KL = 23$ см. Тоді основи трапеції



$AD = 46$ см і $BC = 26$ см. Оскільки навхрест лежачі кути при паралельних рівні, то $\angle BCA = \angle CAD$. Тому $\angle BCA = \angle BAC$ і $\triangle ABC$ – рівнобедрений, тобто $AB = BC = 26$ см.

Нехай BN – висота трапеції. Тоді
$AN = \frac{AD-BC}{2} = \frac{46-26}{2} = 10$ (см).

За теоремою Піфагора в $\triangle ANB$ знаходимо

$$BN = \sqrt{AB^2 - AN^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = 24 \text{ (см)}.$$

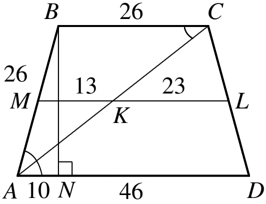
Нарешті, обчислюємо площу трапеції

$$S = ML \cdot BN = (13+23) \cdot 24 = 36 \cdot 24 = 864 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь: 864.

Приклади із ЗНО

Розв'язання. Нехай діагональ AC трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $AB = CD$) – бісектриса кута A ($\angle BAC = \angle CAD$) і ділить середню лінію трапеції на відрізки $MK = 13$ см і $KL = 23$ см. Тоді основи трапеції



$AD = 46$ см і $BC = 26$ см. Оскільки навхрест лежачі кути при паралельних рівні, то $\angle BCA = \angle CAD$. Тому $\angle BCA = \angle BAC$ і $\triangle ABC$ – рівнобедрений, тобто $AB = BC = 26$ см.

Нехай BN – висота трапеції. Тоді $AN = \frac{AD-BC}{2} = \frac{46-26}{2} = 10$ (см).

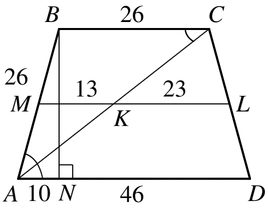
За теоремою Піфагора в $\triangle ANB$ знаходимо $BN = \sqrt{AB^2 - AN^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = 24$ (см).

Нарешті, обчислюємо площу трапеції $S = ML \cdot BN = (13 + 23) \cdot 24 = 36 \cdot 24 = 864$ (см^2).

Відповідь: 864.

Приклади із ЗНО

Розв'язання. Нехай діагональ AC трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $AB = CD$) – бісектриса кута A ($\angle BAC = \angle CAD$) і ділить середню лінію трапеції на відрізки $MK = 13$ см і $KL = 23$ см. Тоді основи трапеції



$AD = 46$ см і $BC = 26$ см. Оскільки навхрест лежачі кути при паралельних рівні, то $\angle BCA = \angle CAD$. Тому $\angle BCA = \angle BAC$ і $\triangle ABC$ – рівнобедрений, тобто $AB = BC = 26$ см.

Нехай BN – висота трапеції. Тоді $AN = \frac{AD-BC}{2} = \frac{46-26}{2} = 10$ (см).

За теоремою Піфагора в $\triangle ANB$ знаходимо $BN = \sqrt{AB^2 - AN^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = 24$ (см).

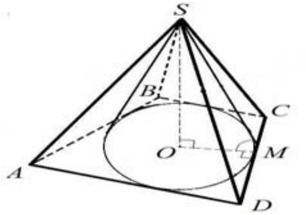
Нарешті, обчислюємо площу трапеції $S = ML \cdot BN = (13 + 23) \cdot 24 = 36 \cdot 24 = 864$ (см^2).

Відповідь: 864.

Приклади із ЗНО

В наступному прикладі істотним кроком розв'язання стереометричної задачі є знаходження радіуса кола, вписаного в рівнобічну трапецію.

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2011 р.). У чотирикутну піраміду, в основі якої лежить рівнобічна трапеція з основами 18 см і 8 см, вписано конус. Знайдіть площу бічної поверхні конуса $S_{\text{біч}}$ (у см^2), якщо всі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом $60°$. У відповідь запишіть значення $S_{\text{біч}}/\pi$.

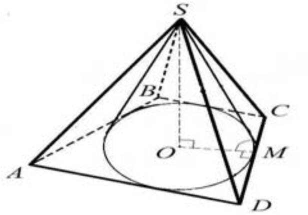


Розв'язання. Нехай $SABCD$ – піраміда з рівнобічною трапецією $ABCD$ в основі. Піраміда і вписаний конус мають спільну висоту SO, основа конуса — вписаний в трапецію $ABCD$ круг.

Приклади із ЗНО

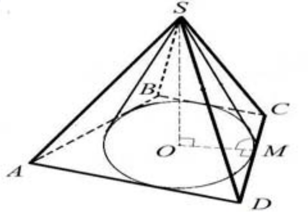
В наступному прикладі істотним кроком розв'язання стереометричної задачі є знаходження радіуса кола, вписаного в рівнобічну трапецію.

П р и к л а д 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2011 р.). У чотирикутну піраміду, в основі якої лежить рівнобічна трапеція з основами 18 см і 8 см, вписано конус. Знайдіть площу бічної поверхні конуса $S_{\text{біч}}$ (у см^2), якщо всі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом $60°$. У відповідь запишіть значення $S_{\text{біч}}/\pi$.



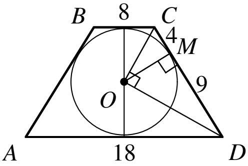
Р о з в' я з а н н я. Нехай $SABCD$ – піраміда з рівнобічною трапецією $ABCD$ в основі. Піраміда і вписаний конус мають спільну висоту SO, основа конуса — вписаний в трапецію $ABCD$ круг.

Приклади із ЗНО

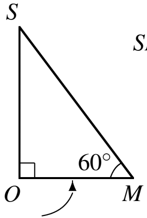


Площа бічної поверхні конуса обчислюється за формулою $S_{\text{бок}} = \pi R l$, де R – радіус основи конуса і l – твірна конуса.

Радіус основи конуса знайдемо як радіус кола, вписаного в рівнобічну трапецію $ABCD$, після чого знайдемо твірну $l = SM$ з $\triangle SOM$, в якому $\angle SMO = 60^\circ$ – це лінійний кут заданого двогранного кута при ребрі основи піраміди:

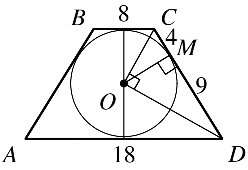


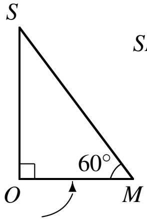
OM–?



SM–?

Приклади із ЗНО





1) для знаходження радіуса OM використаємо властивість висоти OM прямокутного $\triangle COD$ ($\angle COD = 90°$), проведеної на гіпотенузу CD: $\frac{CM}{OM} = \frac{OM}{DM}$.

Звідси $OM = \sqrt{CM \cdot DM} = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$ (см);

2) в прямокутному $\triangle SOM$ знаходимо гіпотенузу SM: $\frac{OM}{SM} = \cos 60°$, звідки $SM = \frac{OM}{\cos 60°} = \frac{6}{0{,}5} = 12$ (см).

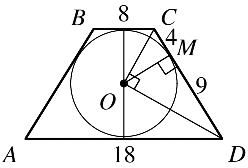
Тепер обчислюємо бічну поверхню конуса:

$S_{\text{біч}} = \pi R l = \pi \cdot 6 \cdot 12 = 72\pi$ (см^2).

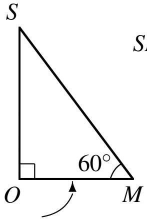
Нарешті, знаходимо $S_{\text{біч}}/\pi = 72$.

Відповідь: 72.

Приклади із ЗНО



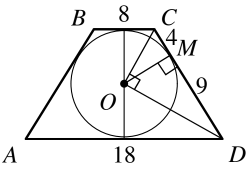
OM–?

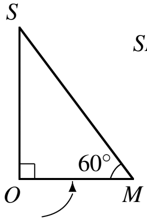


SM–?

1) для знаходження радіуса OM використаємо властивість висоти OM прямокутного $\triangle COD$ ($\angle COD = 90^\circ$), проведеної на гіпотенузу CD: $\frac{CM}{OM} = \frac{OM}{DM}$.
Звідси $OM = \sqrt{CM \cdot DM} = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$ (см);
2) в прямокутному $\triangle SOM$ знаходимо гіпотенузу SM:
$\frac{OM}{SM} = \cos 60^\circ$, звідки $SM = \frac{OM}{\cos 60^\circ} = \frac{6}{0{,}5} = 12$ (см).
Тепер обчислюємо бічну поверхню конуса:
$S_{\text{біч}} = \pi R l = \pi \cdot 6 \cdot 12 = 72\pi$ (см^2).
Нарешті, знаходимо $S_{\text{біч}}/\pi = 72$.
Відповідь: 72.

Приклади із ЗНО

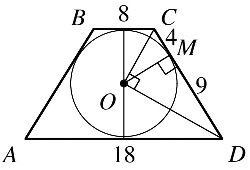


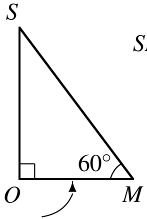


1) для знаходження радіуса OM використаємо властивість висоти OM прямокутного $\triangle COD$ ($\angle COD = 90^\circ$), проведеної на гіпотенузу CD: $\frac{CM}{OM} = \frac{OM}{DM}$.
Звідси $OM = \sqrt{CM \cdot DM} = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$ (см);
2) в прямокутному $\triangle SOM$ знаходимо гіпотенузу SM:
$\frac{OM}{SM} = \cos 60^\circ$, звідки $SM = \frac{OM}{\cos 60^\circ} = \frac{6}{0{,}5} = 12$ (см).
Тепер обчислюємо бічну поверхню конуса:
$S_{\text{біч}} = \pi R l = \pi \cdot 6 \cdot 12 = 72\pi$ (см^2).
Нарешті, знаходимо $S_{\text{біч}}/\pi = 72$.

Відповідь: 72.

Приклади із ЗНО





1) для знаходження радіуса OM використаємо властивість висоти OM прямокутного $\triangle COD$ ($\angle COD = 90°$), проведеної на гіпотенузу CD: $\frac{CM}{OM} = \frac{OM}{DM}$.
Звідси $OM = \sqrt{CM \cdot DM} = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$ (см);
2) в прямокутному $\triangle SOM$ знаходимо гіпотенузу SM:
$\frac{OM}{SM} = \cos 60°$, звідки $SM = \frac{OM}{\cos 60°} = \frac{6}{0{,}5} = 12$ (см).
Тепер обчислюємо бічну поверхню конуса:
$S_{\text{біч}} = \pi R l = \pi \cdot 6 \cdot 12 = 72\pi$ (см^2).
Нарешті, знаходимо $S_{\text{біч}}/\pi = 72$.
Відповідь: 72.