

Техніка розв'язання рівнянь і нерівностей з параметром, III

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 12



Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Рівняння і нерівності з параметром

В цьому уроці розглядаються такі складові елементи процесу розв'язання рівнянь і нерівностей з параметром:

- сукупності рівнянь з параметром;
- системи нерівностей з параметром;
- сукупності нерівностей з параметром;
- системи, які містять рівняння і нерівності з параметром.

Рівняння і нерівності з параметром

В цьому уроці розглядаються такі складові елементи процесу розв'язання рівнянь і нерівностей з параметром:

- сукупності рівнянь з параметром;
- системи нерівностей з параметром;
- сукупності нерівностей з параметром;
- системи, які містять рівняння і нерівності з параметром.

Рівняння і нерівності з параметром

В цьому уроці розглядаються такі складові елементи процесу розв'язання рівнянь і нерівностей з параметром:

- сукупності рівнянь з параметром;
- системи нерівностей з параметром;
- сукупності нерівностей з параметром;
- системи, які містять рівняння і нерівності з параметром.

Рівняння і нерівності з параметром

В цьому уроці розглядаються такі складові елементи процесу розв'язання рівнянь і нерівностей з параметром:

- сукупності рівнянь з параметром;
- системи нерівностей з параметром;
- сукупності нерівностей з параметром;
- системи, які містять рівняння і нерівності з параметром.

Сукупності рівнянь з параметром

Відзначимо, що при різних значеннях параметра сукупність рівнянь з параметром має, взагалі кажучи, різну кількість розв'язків. Розглянемо приклад.

Приклад 1. Розв'язати сукупність рівнянь з параметром a :

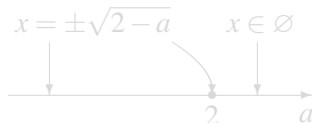
$$\begin{cases} x^2 = a, \\ x^2 = 2 - a. \end{cases}$$

Розв'язання.

Результат розв'язання рівняння $x^2 = a$ зображено на діаграмі:



Рівняння $x^2 = 2 - a$ має розв'язки тільки при $2 - a \geq 0$, тобто при $a \leq 2$. Результат розв'язання рівняння $x^2 = 2 - a$ зображено на діаграмі:



Сукупності рівнянь з параметром

Відзначимо, що при різних значеннях параметра сукупність рівнянь з параметром має, взагалі кажучи, різну кількість розв'язків. Розглянемо приклад.

Приклад 1. Розв'язати сукупність рівнянь з параметром a :

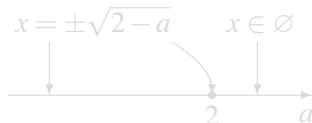
$$\begin{cases} x^2 = a, \\ x^2 = 2 - a. \end{cases}$$

Розв'язання.

Результат розв'язання рівняння $x^2 = a$ зображено на діаграмі:



Рівняння $x^2 = 2 - a$ має розв'язки тільки при $2 - a \geq 0$, тобто при $a \leq 2$. Результат розв'язання рівняння $x^2 = 2 - a$ зображено на діаграмі:



Сукупності рівнянь з параметром

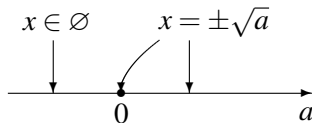
Відзначимо, що при різних значеннях параметра сукупність рівнянь з параметром має, взагалі кажучи, різну кількість розв'язків. Розглянемо приклад.

Приклад 1. Розв'язати сукупність рівнянь з параметром a :

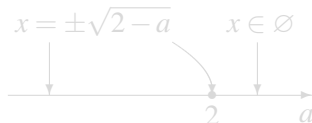
$$\begin{cases} x^2 = a, \\ x^2 = 2 - a. \end{cases}$$

Розв'язання.

Результат розв'язання рівняння $x^2 = a$ зображено на діаграмі:



Рівняння $x^2 = 2 - a$ має розв'язки тільки при $2 - a \geq 0$, тобто при $a \leq 2$. Результат розв'язання рівняння $x^2 = 2 - a$ зображено на діаграмі:



Сукупності рівнянь з параметром

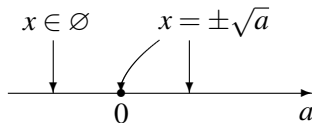
Відзначимо, що при різних значеннях параметра сукупність рівнянь з параметром має, взагалі кажучи, різну кількість розв'язків. Розглянемо приклад.

Приклад 1. Розв'язати сукупність рівнянь з параметром a :

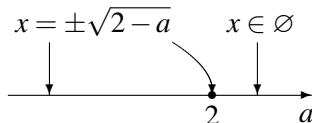
$$\begin{cases} x^2 = a, \\ x^2 = 2 - a. \end{cases}$$

Розв'язання.

Результат розв'язання рівняння $x^2 = a$ зображено на діаграмі:

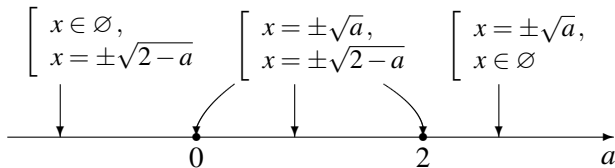


Рівняння $x^2 = 2 - a$ має розв'язки тільки при $2 - a \geq 0$, тобто при $a \leq 2$. Результат розв'язання рівняння $x^2 = 2 - a$ зображено на діаграмі:

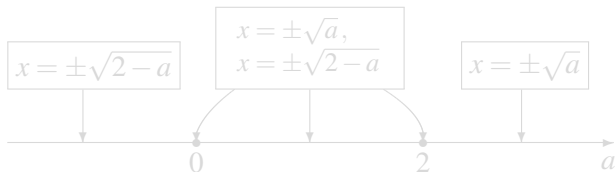


Сукупності рівнянь з параметром

Для розв'язання сукупності розглянутих рівнянь накладаємо одна на одну діаграми з їх розв'язками і при цьому отримуємо наступну діаграму:

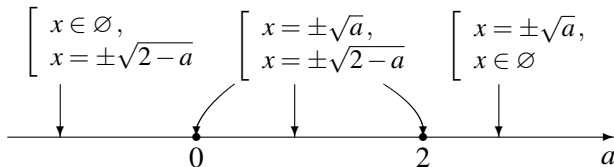


В результаті розв'язання сукупностей при різних значеннях параметра a отримуємо наступну діаграму розв'язків:

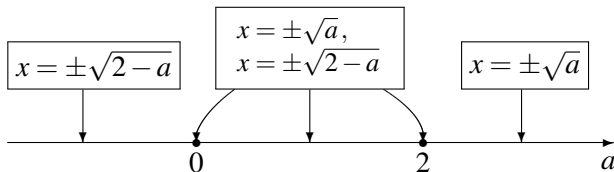


Сукупності рівнянь з параметром

Для розв'язання сукупності розглянутих рівнянь накладаємо одна на одну діаграми з їх розв'язками і при цьому отримуємо наступну діаграму:

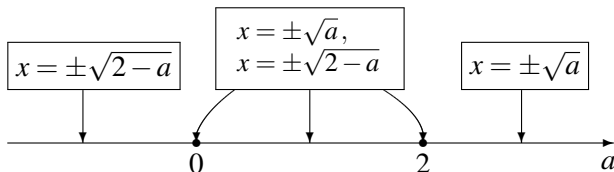


В результаті розв'язання сукупностей при різних значеннях параметра a отримуємо наступну діаграму розв'язків:



Сукупності рівнянь з параметром

За допомогою діаграми розв'язків



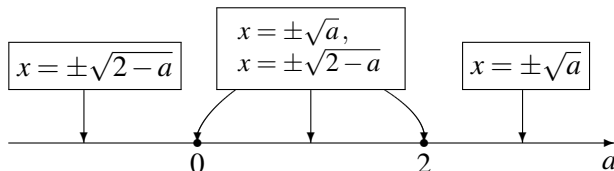
запишемо відповідь, що складається з трьох пунктів.

Відповідь: 1) при $a < 0$ $x = \pm\sqrt{2-a}$; 2) при $a \in [0; 2]$ $x = \pm\sqrt{a}$, $x = \pm\sqrt{2-a}$; 3) при $a > 2$ $x = \pm\sqrt{a}$.

Зазначимо, що коли потрібно знайти кількість розв'язків сукупності, розглянутої в попередньому прикладі, при різних значеннях параметра a , то дослідження необхідно продовжити.

Сукупності рівнянь з параметром

За допомогою діаграми розв'язків



запишемо відповідь, що складається з трьох пунктів.

Відповідь: 1) при $a < 0$ $x = \pm\sqrt{2-a}$; 2) при $a \in [0; 2]$ $x = \pm\sqrt{a}, x = \pm\sqrt{2-a}$; 3) при $a > 2$ $x = \pm\sqrt{a}$.

Зазначимо, що коли потрібно знайти кількість розв'язків сукупності, розглянутої в попередньому прикладі, при різних значеннях параметра a , то дослідження необхідно продовжити.

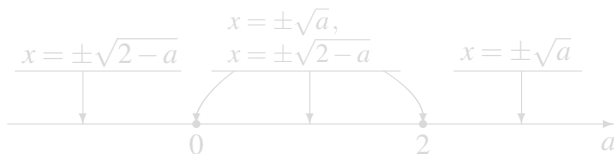
Сукупності рівнянь з параметром

Приклад 2. Скільки розв'язків має сукупність рівнянь

$$\begin{cases} x^2 = a, \\ x^2 = 2 - a. \end{cases}$$

в залежності від параметра a ?

Розв'язання. Задану сукупність розв'язано в попередньому прикладі. Її розв'язки при різних значеннях параметра a зображені на діаграмі:



Продовжимо дослідження для того, щоб визначити кількість розв'язків при різних значеннях параметра a .

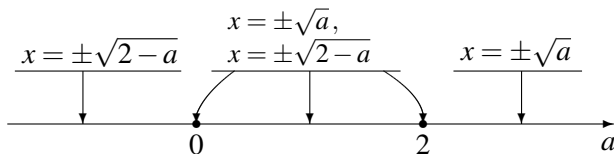
Сукупності рівнянь з параметром

Приклад 2. Скільки розв'язків має сукупність рівнянь

$$\begin{cases} x^2 = a, \\ x^2 = 2 - a. \end{cases}$$

в залежності від параметра a ?

Розв'язання. Задану сукупність розв'язано в попередньому прикладі. Її розв'язки при різних значеннях параметра a зображені на діаграмі:



Продовжимо дослідження для того, щоб визначити кількість розв'язків при різних значеннях параметра a .

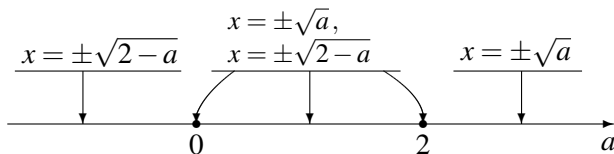
Сукупності рівнянь з параметром

Приклад 2. Скільки розв'язків має сукупність рівнянь

$$\begin{cases} x^2 = a, \\ x^2 = 2 - a. \end{cases}$$

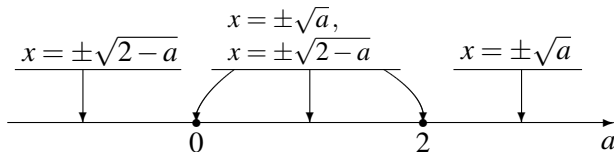
в залежності від параметра a ?

Розв'язання. Задану сукупність розв'язано в попередньому прикладі. Її розв'язки при різних значеннях параметра a зображені на діаграмі:



Продовжимо дослідження для того, щоб визначити кількість розв'язків при різних значеннях параметра a .

Сукупності рівнянь з параметром



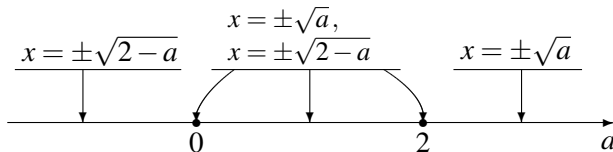
Так, легко помітити, що при $a < 0$ числа $x = \pm\sqrt{2-a}$ різні, тобто сукупність має 2 розв'язки. Аналогічно при $a > 2$ сукупність має 2 розв'язки $x = \pm\sqrt{a}$.

Проте помилковим (!) буде висновок, що при $a \in [0; 2]$ сукупність має 4 розв'язки.

Дійсно, при $a = 0$ виконуються рівності $x = \pm\sqrt{a} = \pm\sqrt{0} = 0$, $x = \pm\sqrt{2-a} = \pm\sqrt{2}$ і, таким чином, сукупність має 3 розв'язки.

Аналогічно, при $a = 2$ сукупність має 3 розв'язки, оскільки $x = \pm\sqrt{a} = \pm\sqrt{2}$, $x = \pm\sqrt{2-a} = \pm\sqrt{0} = 0$.

Сукупності рівнянь з параметром



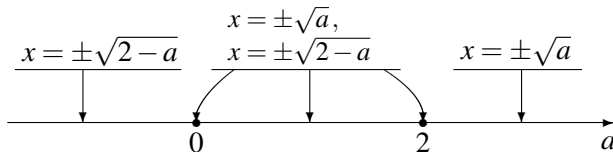
Так, легко помітити, що при $a < 0$ числа $x = \pm\sqrt{2-a}$ різні, тобто сукупність має 2 розв'язки. Аналогічно при $a > 2$ сукупність має 2 розв'язки $x = \pm\sqrt{a}$.

Проте помилковим (!) буде висновок, що при $a \in [0; 2]$ сукупність має 4 розв'язки.

Дійсно, при $a = 0$ виконуються рівності $x = \pm\sqrt{a} = \pm\sqrt{0} = 0$, $x = \pm\sqrt{2-a} = \pm\sqrt{2}$ і, таким чином, сукупність має 3 розв'язки.

Аналогічно, при $a = 2$ сукупність має 3 розв'язки, оскільки $x = \pm\sqrt{a} = \pm\sqrt{2}$, $x = \pm\sqrt{2-a} = \pm\sqrt{0} = 0$.

Сукупності рівнянь з параметром



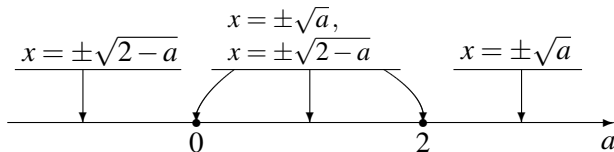
Так, легко помітити, що при $a < 0$ числа $x = \pm\sqrt{2-a}$ різні, тобто сукупність має 2 розв'язки. Аналогічно при $a > 2$ сукупність має 2 розв'язки $x = \pm\sqrt{a}$.

Проте помилковим (!) буде висновок, що при $a \in [0; 2]$ сукупність має 4 розв'язки.

Дійсно, при $a = 0$ виконуються рівності $x = \pm\sqrt{a} = \pm\sqrt{0} = 0$, $x = \pm\sqrt{2-a} = \pm\sqrt{2}$ і, таким чином, сукупність має 3 розв'язки.

Аналогічно, при $a = 2$ сукупність має 3 розв'язки, оскільки $x = \pm\sqrt{a} = \pm\sqrt{2}$, $x = \pm\sqrt{2-a} = \pm\sqrt{0} = 0$.

Сукупності рівнянь з параметром



При $a = 1$ пари $x = \pm\sqrt{a}$ і $x = \pm\sqrt{2-a}$ співпадають (!), оскільки $\sqrt{a} = \sqrt{2-a} = 1$, і, таким чином, сукупність має 2 розв'язки: $x = \pm 1$.

Нарешті, при $a \in (0; 1)$ виконуються нерівності

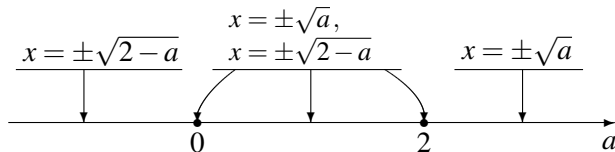
$$-\sqrt{2-a} < -\sqrt{a} < \sqrt{a} < \sqrt{2-a},$$

а при $a \in (1; 2)$ – нерівності

$$-\sqrt{a} < -\sqrt{2-a} < \sqrt{2-a} < \sqrt{a}.$$

Отже, при $a \in (0; 1) \cup (1; 2)$ сукупність має 4 розв'язки.

Сукупності рівнянь з параметром



При $a = 1$ пари $x = \pm\sqrt{a}$ і $x = \pm\sqrt{2-a}$ співпадають (!), оскільки $\sqrt{a} = \sqrt{2-a} = 1$, і, таким чином, сукупність має 2 розв'язки: $x = \pm 1$.

Нарешті, при $a \in (0; 1)$ виконуються нерівності

$$-\sqrt{2-a} < -\sqrt{a} < \sqrt{a} < \sqrt{2-a},$$

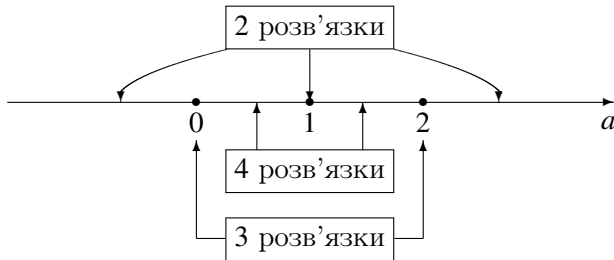
а при $a \in (1; 2)$ – нерівності

$$-\sqrt{a} < -\sqrt{2-a} < \sqrt{2-a} < \sqrt{a}.$$

Отже, при $a \in (0; 1) \cup (1; 2)$ сукупність має 4 розв'язки.

Сукупності рівнянь з параметром

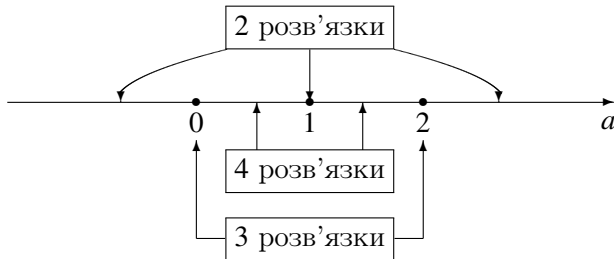
Отже, кількість розв'язків сукупності при різних значеннях параметра a наведено на наступній діаграмі:



Відповідь: 1) при $a \in (-\infty; 0) \cup \{1\} \cup (2; \infty)$ 2 розв'язки;
2) при $a \in \{0; 2\}$ 3 розв'язки; 3) при $a \in (0; 1) \cup (1; 2)$
4 розв'язки.

Сукупності рівнянь з параметром

Отже, кількість розв'язків сукупності при різних значеннях параметра a наведено на наступній діаграмі:



Відповідь: 1) при $a \in (-\infty; 0) \cup \{1\} \cup (2; \infty)$ 2 розв'язки;
2) при $a \in \{0; 2\}$ 3 розв'язки; 3) при $a \in (0; 1) \cup (1; 2)$
4 розв'язки.

Системи нерівностей з параметром

При розв'язанні систем нерівностей з параметром, виконуючи перетин відповідних множин, необхідно, насамперед, визначити **взаємне розташування** точок, що обмежують ці множини.

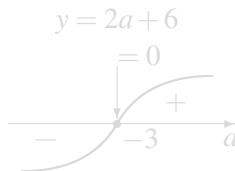
Приклад 3. Розв'язати систему нерівностей з параметром a :

$$\begin{cases} x \leq 3a + 4, \\ x \geq a - 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Перш, ніж виконати перетин множин

$I = (-\infty, 3a + 4]$ і $II = [a - 2, \infty)$, визначимо **взаємне розташування** точок $x_1 = 3a + 4$ і $x_2 = a - 2$ на числовій прямій при різних значеннях параметра a .

Для цього розглянемо різницю $x_1 - x_2 = 2a + 6$ і зобразимо криву знаків отриманого виразу (див. мал.).



Системи нерівностей з параметром

При розв'язанні систем нерівностей з параметром, виконуючи перетин відповідних множин, необхідно, насамперед, визначити **взаємне розташування** точок, що обмежують ці множини.

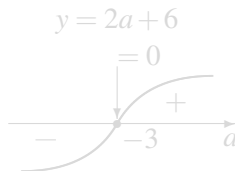
Приклад 3. Розв'язати систему нерівностей з параметром a :

$$\begin{cases} x \leq 3a + 4, \\ x \geq a - 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Перш, ніж виконати перетин множин

$I = (-\infty, 3a + 4]$ і $\Pi = [a - 2, \infty)$, визначимо **взаємне розташування** точок $x_1 = 3a + 4$ і $x_2 = a - 2$ на числовій прямій при різних значеннях параметра a .

Для цього розглянемо різницю $x_1 - x_2 = 2a + 6$ і зобразимо криву знаків отриманого виразу (див. мал.).



Системи нерівностей з параметром

При розв'язанні систем нерівностей з параметром, виконуючи перетин відповідних множин, необхідно, насамперед, визначити **взаємне розташування** точок, що обмежують ці множини.

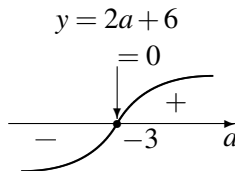
Приклад 3. Розв'язати систему нерівностей з параметром a :

$$\begin{cases} x \leq 3a + 4, \\ x \geq a - 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Перш, ніж виконати перетин множин

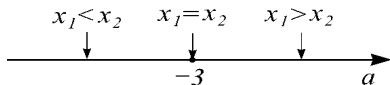
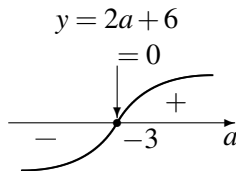
$I = (-\infty, 3a + 4]$ і $II = [a - 2, \infty)$, визначимо **взаємне розташування** точок $x_1 = 3a + 4$ і $x_2 = a - 2$ на числовій прямій при різних значеннях параметра a .

Для цього розглянемо різницю $x_1 - x_2 = 2a + 6$ і зобразимо криву знаків отриманого виразу (див. мал.).

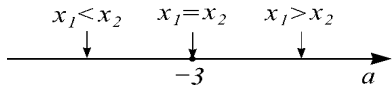


Системи нерівностей з параметром

Використовуючи криву знаків
різниці $x_1 - x_2 = 2a + 6$,
отримуємо наступний результат
порівняння точок x_1 і x_2 , який зображено на діаграмі:



Системи нерівностей з параметром

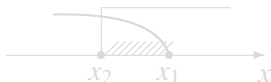


$$x_1 = 3a + 4, \quad x_2 = a - 2$$

Тепер виконуємо перетин множин

$I = (-\infty, x_1]$ і $\Pi = [x_2, \infty)$ в кожному з таких випадків:

$$a > -3:$$



$$x \in [x_2, x_1]$$

$$a = -3:$$



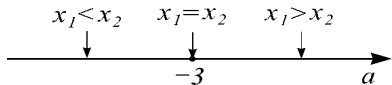
$$x = -5$$

$$a < -3:$$



$$x \in \emptyset$$

Системи нерівностей з параметром

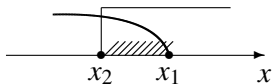


$$x_1 = 3a + 4, \quad x_2 = a - 2$$

Тепер виконуємо перетин множин

$I = (-\infty, x_1]$ і $\Pi = [x_2, \infty)$ в кожному з таких випадків:

$$a > -3:$$



$$x \in [x_2, x_1]$$

$$a = -3:$$



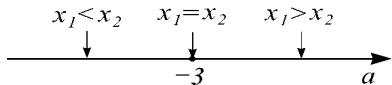
$$x = -5$$

$$a < -3:$$



$$x \in \emptyset$$

Системи нерівностей з параметром

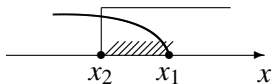


$$x_1 = 3a + 4, \quad x_2 = a - 2$$

Тепер виконуємо перетин множин

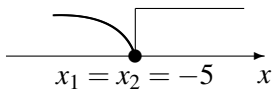
$I = (-\infty, x_1]$ і $\Pi = [x_2, \infty)$ в кожному з таких випадків:

$$a > -3:$$



$$x \in [x_2, x_1]$$

$$a = -3:$$



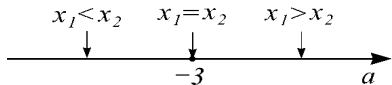
$$x = -5$$

$$a < -3:$$



$$x \in \emptyset$$

Системи нерівностей з параметром

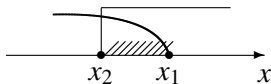


$$x_1 = 3a + 4, \quad x_2 = a - 2$$

Тепер виконуємо перетин множин

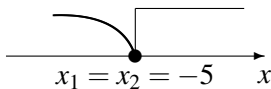
$I = (-\infty, x_1]$ і $\Pi = [x_2, \infty)$ в кожному з таких випадків:

$$a > -3:$$



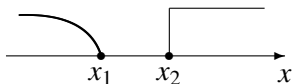
$$x \in [x_2, x_1]$$

$$a = -3:$$



$$x = -5$$

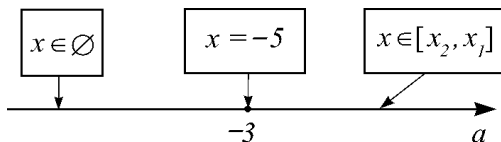
$$a < -3:$$



$$x \in \emptyset$$

Системи нерівностей з параметром

Результат розв'язання системи відображає наступна діаграма:



де $x_1 = 3a + 4$ і $x_2 = a - 2$.

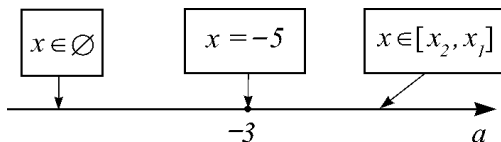
Відповідь: 1) при $a > -3$ $x \in [a - 2; 3a + 4]$;
2) при $a = -3$ $x = -5$; 3) при $a < -3$ $x \in \emptyset$.

Приклад 4. Розв'язати систему нерівностей з параметром a :

$$\begin{cases} x > \frac{1}{a+2}, \\ (2-a)x \leq 1. \end{cases}$$

Системи нерівностей з параметром

Результат розв'язання системи відображає наступна діаграма:



де $x_1 = 3a + 4$ і $x_2 = a - 2$.

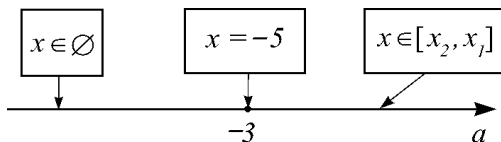
Відповідь: 1) при $a > -3$ $x \in [a - 2; 3a + 4]$;
2) при $a = -3$ $x = -5$; 3) при $a < -3$ $x \in \emptyset$.

Приклад 4. Розв'язати систему нерівностей з параметром a :

$$\begin{cases} x > \frac{1}{a+2}, \\ (2-a)x \leq 1. \end{cases}$$

Системи нерівностей з параметром

Результат розв'язання системи відображає наступна діаграма:



де $x_1 = 3a + 4$ і $x_2 = a - 2$.

Відповідь: 1) при $a > -3$ $x \in [a - 2; 3a + 4]$;
2) при $a = -3$ $x = -5$; 3) при $a < -3$ $x \in \emptyset$.

Приклад 4. Розв'язати систему нерівностей з параметром a :

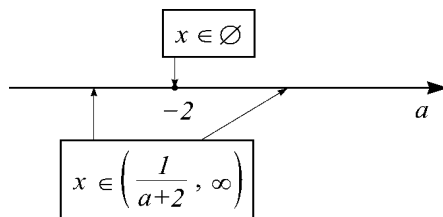
$$\begin{cases} x > \frac{1}{a+2}, \\ (2-a)x \leq 1. \end{cases}$$

Системи нерівностей з параметром

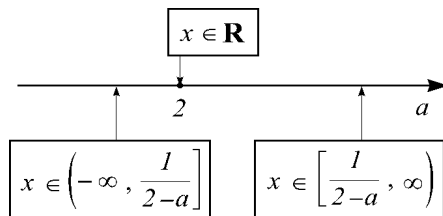
Розв'язання.

Результат розв'язання

першої нерівності $x > \frac{1}{a+2}$ зображено на діаграмі (при $a = -2$ вираз в правій частині цієї нерівності не визначений. В таких випадках покладають, що $x \in \emptyset$):



Результат розв'язання другої нерівності $(2-a)x \leq 1$ зображено на діаграмі:



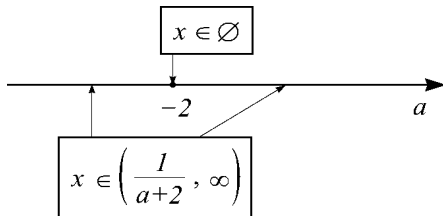
Системи нерівностей з параметром

Розв'язання.

Результат розв'язання

першої нерівності $x > \frac{1}{a+2}$

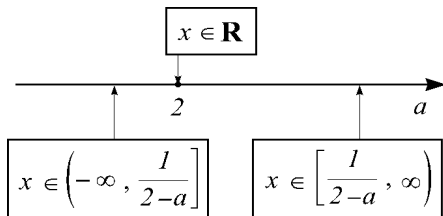
зображено на діаграмі (при $a = -2$ вираз в правій частині цієї нерівності не визначений. В таких випадках покладають, що $x \in \emptyset$):



Результат розв'язання

другої нерівності

$(2-a)x \leq 1$ зображено на діаграмі:



Системи нерівностей з параметром

Таким чином, при різних значеннях параметра a задана система нерівностей рівносильна різним системам:

The diagram shows a horizontal number line with arrows at both ends, labeled a on the right. Two points are marked on the line with solid dots: -2 and 2 . Above the line, two sets of inequalities are listed, each corresponding to a region on the number line:

- For the region to the left of -2 (indicated by an arrow pointing left from -2):

$$\begin{cases} x \in \emptyset \\ x \in \left(-\infty, \frac{1}{2-a}\right] \end{cases}$$
- For the region between -2 and 2 (indicated by an arrow pointing right from -2):

$$\begin{cases} x \in \left(\frac{1}{2+a}, \infty\right) \\ x \in \mathbf{R} \end{cases}$$
- For the region to the right of 2 (indicated by an arrow pointing right from 2):

$$\begin{cases} x \in \left(\frac{1}{2+a}, \infty\right) \\ x \in \left[-\frac{1}{2-a}, \infty\right) \end{cases}$$

Системи нерівностей з параметром

Дійсно, при $a = -2$ маємо

$$\begin{cases} x \in \emptyset, \\ x \in \left(-\infty, \frac{1}{2-a}\right], \end{cases} \iff x \in \emptyset,$$

а при $a = 2$ отримуємо

$$\begin{cases} x \in \left(\frac{1}{a+2}, \infty\right) = \left(\frac{1}{4}, \infty\right), \\ x \in \mathbf{R}, \end{cases} \iff x \in \left(\frac{1}{4}, \infty\right).$$

Щоб знайти розв'язки відповідних систем при $a \neq \pm 2$, необхідно визначити взаємне розташування точок

$x_1 = \frac{1}{a+2}$ і $x_2 = \frac{1}{2-a}$ на числовій прямій при різних значеннях параметра a . Для цього розглянемо різницю:

$$x_1 - x_2 = \frac{1}{a+2} - \frac{1}{2-a} = \frac{1}{a+2} + \frac{1}{a-2} = \frac{2a}{(a+2)(a-2)}.$$

Системи нерівностей з параметром

Дійсно, при $a = -2$ маємо

$$\begin{cases} x \in \emptyset, \\ x \in \left(-\infty, \frac{1}{2-a}\right], \end{cases} \iff x \in \emptyset,$$

а при $a = 2$ отримуємо

$$\begin{cases} x \in \left(\frac{1}{a+2}, \infty\right) = \left(\frac{1}{4}, \infty\right), \\ x \in \mathbf{R}, \end{cases} \iff x \in \left(\frac{1}{4}, \infty\right).$$

Щоб знайти розв'язки відповідних систем при $a \neq \pm 2$, необхідно визначити **взаємне розташування** точок

$x_1 = \frac{1}{a+2}$ і $x_2 = \frac{1}{2-a}$ на числовій прямій при різних значеннях параметра a . Для цього розглянемо різницю:

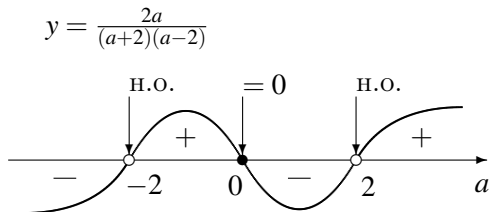
$$x_1 - x_2 = \frac{1}{a+2} - \frac{1}{2-a} = \frac{1}{a+2} + \frac{1}{a-2} = \frac{2a}{(a+2)(a-2)}.$$

Системи нерівностей з параметром

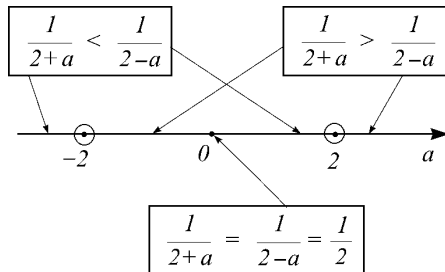
Кривая знаків
виразу

$$x_1 - x_2 = \frac{2a}{(a+2)(a-2)}$$

зображена на мал.:

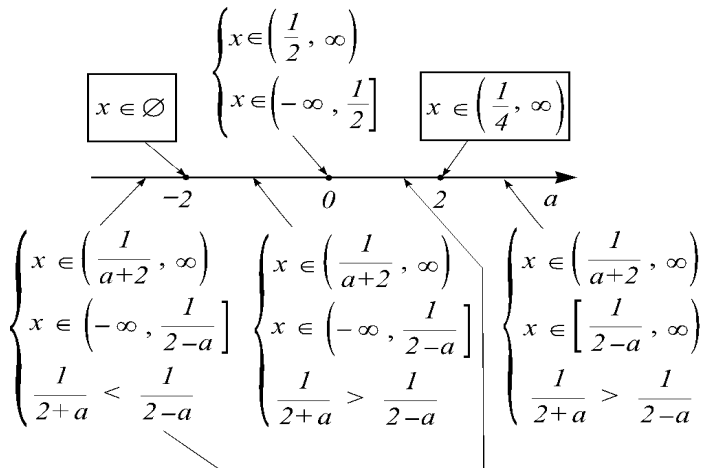


Її наслідком є результат
порівняння точок $x_1 = \frac{1}{a+2}$
і $x_2 = \frac{1}{2-a}$, який зображено
на діаграмі:



Системи нерівностей з параметром

Тепер з урахуванням порівняння точок $x_1 = \frac{1}{a+2}$ і $x_2 = \frac{1}{2-a}$, а також отриманих вище розв'язків заданої системи нерівностей при $a = \pm 2$, отримуємо діаграму:



Системи нерівностей з параметром

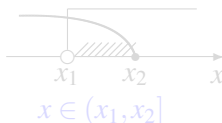
Нарешті, розв'язання прикладу закінчується перетином відповідних множин у кожній із систем, що містяться на останній діаграмі. При цьому $x_1 = \frac{1}{a+2}$, $x_2 = \frac{1}{2-a}$.

При $a \in (-\infty, -2) \cup (0; 2)$

маємо систему

$$\begin{cases} x \in (x_1, \infty), \\ x \in (-\infty, x_2], \\ x_1 < x_2, \end{cases}$$

розв'язуючи яку, отримуємо

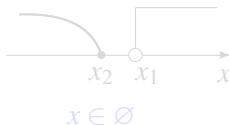


При $a \in (-2; 0)$ маємо

систему

$$\begin{cases} x \in (x_1, \infty), \\ x \in (-\infty, x_2], \\ x_1 > x_2, \end{cases}$$

розв'язуючи яку, отримуємо



Системи нерівностей з параметром

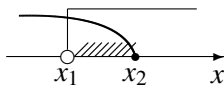
Нарешті, розв'язання прикладу закінчується перетином відповідних множин у кожній із систем, що містяться на останній діаграмі. При цьому $x_1 = \frac{1}{a+2}$, $x_2 = \frac{1}{2-a}$.

При $a \in (-\infty, -2) \cup (0; 2)$

маємо систему

$$\begin{cases} x \in (x_1, \infty), \\ x \in (-\infty, x_2], \\ x_1 < x_2, \end{cases}$$

розв'язуючи яку, отримуємо



$$x \in (x_1, x_2]$$

При $a \in (-2; 0)$ маємо

систему

$$\begin{cases} x \in (x_1, \infty), \\ x \in (-\infty, x_2], \\ x_1 > x_2, \end{cases}$$

розв'язуючи яку, отримуємо



$$x \in \emptyset$$

Системи нерівностей з параметром

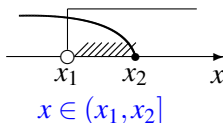
Нарешті, розв'язання прикладу закінчується перетином відповідних множин у кожній із систем, що містяться на останній діаграмі. При цьому $x_1 = \frac{1}{a+2}$, $x_2 = \frac{1}{2-a}$.

При $a \in (-\infty, -2) \cup (0; 2)$

маємо систему

$$\begin{cases} x \in (x_1, \infty), \\ x \in (-\infty, x_2], \\ x_1 < x_2, \end{cases}$$

розв'язуючи яку, отримуємо

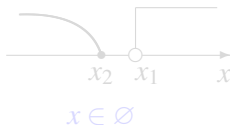


При $a \in (-2; 0)$ маємо

систему

$$\begin{cases} x \in (x_1, \infty), \\ x \in (-\infty, x_2], \\ x_1 > x_2, \end{cases}$$

розв'язуючи яку, отримуємо



Системи нерівностей з параметром

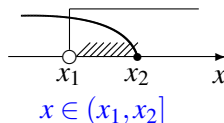
Нарешті, розв'язання прикладу закінчується перетином відповідних множин у кожній із систем, що містяться на останній діаграмі. При цьому $x_1 = \frac{1}{a+2}$, $x_2 = \frac{1}{2-a}$.

При $a \in (-\infty, -2) \cup (0; 2)$

маємо систему

$$\begin{cases} x \in (x_1, \infty), \\ x \in (-\infty, x_2], \\ x_1 < x_2, \end{cases}$$

розв'язуючи яку, отримуємо

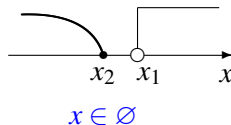


При $a \in (-2; 0)$ маємо

систему

$$\begin{cases} x \in (x_1, \infty), \\ x \in (-\infty, x_2], \\ x_1 > x_2, \end{cases}$$

розв'язуючи яку, отримуємо



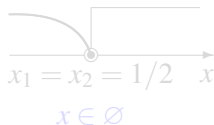
Системи нерівностей з параметром

Використовуємо позначення $x_1 = \frac{1}{a+2}$, $x_2 = \frac{1}{2-a}$.

При $a = 0$ маємо систему

$$\begin{cases} x \in (x_1, \infty), \\ x \in (-\infty, x_2], \\ x_1 = x_2, \end{cases}$$

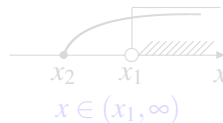
розв'язуючи яку, отримуємо



При $a > 2$ маємо систему

$$\begin{cases} x \in (x_1, \infty), \\ x \in [x_2, \infty), \\ x_1 > x_2, \end{cases}$$

розв'язуючи яку, отримуємо



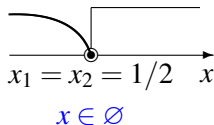
Системи нерівностей з параметром

Використовуємо позначення $x_1 = \frac{1}{a+2}$, $x_2 = \frac{1}{2-a}$.

При $a = 0$ маємо систему

$$\begin{cases} x \in (x_1, \infty), \\ x \in (-\infty, x_2], \\ x_1 = x_2, \end{cases}$$

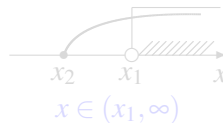
розв'язуючи яку, отримуємо



При $a > 2$ маємо систему

$$\begin{cases} x \in (x_1, \infty), \\ x \in [x_2, \infty), \\ x_1 > x_2, \end{cases}$$

розв'язуючи яку, отримуємо



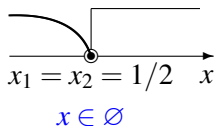
Системи нерівностей з параметром

Використовуємо позначення $x_1 = \frac{1}{a+2}$, $x_2 = \frac{1}{2-a}$.

При $a = 0$ маємо систему

$$\begin{cases} x \in (x_1, \infty), \\ x \in (-\infty, x_2], \\ x_1 = x_2, \end{cases}$$

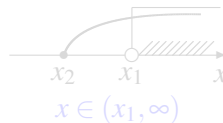
розв'язуючи яку, отримуємо



При $a > 2$ маємо систему

$$\begin{cases} x \in (x_1, \infty), \\ x \in [x_2, \infty), \\ x_1 > x_2, \end{cases}$$

розв'язуючи яку, отримуємо



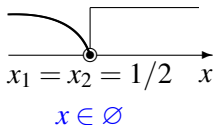
Системи нерівностей з параметром

Використовуємо позначення $x_1 = \frac{1}{a+2}$, $x_2 = \frac{1}{2-a}$.

При $a = 0$ маємо систему

$$\begin{cases} x \in (x_1, \infty), \\ x \in (-\infty, x_2], \\ x_1 = x_2, \end{cases}$$

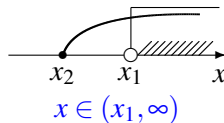
розв'язуючи яку, отримуємо



При $a > 2$ маємо систему

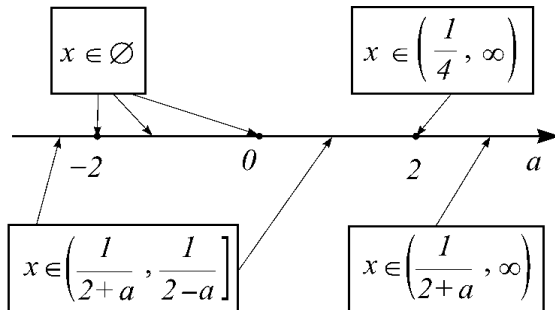
$$\begin{cases} x \in (x_1, \infty), \\ x \in [x_2, \infty), \\ x_1 > x_2, \end{cases}$$

розв'язуючи яку, отримуємо



Системи нерівностей з параметром

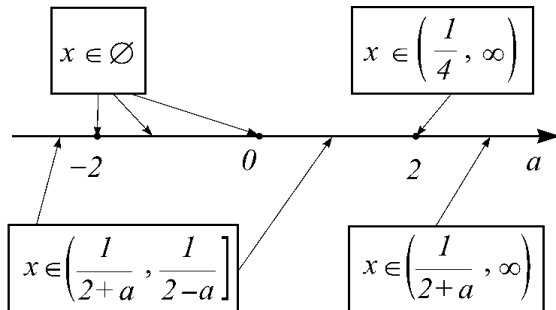
Остаточний результат розв'язання заданої системи нерівностей зображено на наступній діаграмі:



Відповідь: 1) при $a \in (-\infty, -2) \cup (0; 2)$ $x \in \left(\frac{1}{a+2}, \frac{1}{2-a} \right]$;
 2) при $a \in [-2; 0]$ $x \in \emptyset$; 3) при $a \geq 2$ $x \in \left(\frac{1}{a+2}, \infty \right)$.

Системи нерівностей з параметром

Остаточний результат розв'язання заданої системи нерівностей зображено на наступній діаграмі:



Відповідь: 1) при $a \in (-\infty, -2) \cup (0; 2)$ $x \in \left(\frac{1}{a+2}, \frac{1}{2-a} \right]$;
 2) при $a \in [-2; 0]$ $x \in \emptyset$; 3) при $a \geq 2$ $x \in \left(\frac{1}{a+2}, \infty \right)$.

Сукупності нерівностей з параметром

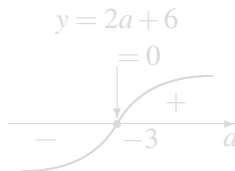
При розв'язанні сукупностей нерівностей з параметром, виконуючи об'єднання відповідних множин, необхідно, насамперед, визначити **взаємне розташування** точок, що обмежують ці множини.

Приклад 5. Розв'язати сукупність нерівностей з параметром a :

$$\begin{cases} x < 3a + 4, \\ x \geq a - 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Перш, ніж виконати об'єднання множин $A = (-\infty, 3a + 4)$ і $B = [a - 2, \infty)$, визначимо **взаємне розташування** точок $x_1 = 3a + 4$ і $x_2 = a - 2$.

Для цього розглянемо різницю $x_1 - x_2 = 2a + 6$ і зобразимо криву знаків отриманого виразу (див. мал.).



Сукупності нерівностей з параметром

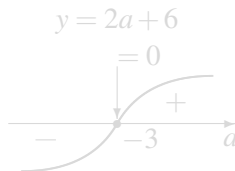
При розв'язанні сукупностей нерівностей з параметром, виконуючи об'єднання відповідних множин, необхідно, насамперед, визначити **взаємне розташування** точок, що обмежують ці множини.

Приклад 5. Розв'язати сукупність нерівностей з параметром a :

$$\begin{cases} x < 3a + 4, \\ x \geq a - 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Перш, ніж виконати об'єднання множин $A = (-\infty, 3a + 4)$ і $B = [a - 2, \infty)$, визначимо **взаємне розташування** точок $x_1 = 3a + 4$ і $x_2 = a - 2$.

Для цього розглянемо різницю $x_1 - x_2 = 2a + 6$ і зобразимо криву знаків отриманого виразу (див. мал.).



Сукупності нерівностей з параметром

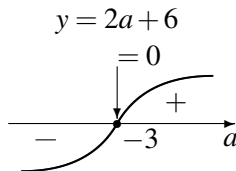
При розв'язанні сукупностей нерівностей з параметром, виконуючи об'єднання відповідних множин, необхідно, насамперед, визначити **взаємне розташування** точок, що обмежують ці множини.

Приклад 5. Розв'язати сукупність нерівностей з параметром a :

$$\begin{cases} x < 3a + 4, \\ x \geq a - 2. \end{cases}$$

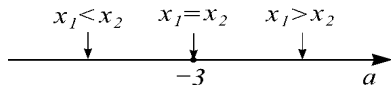
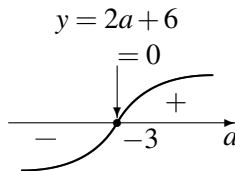
Розв'язання. Перш, ніж виконати об'єднання множин $A = (-\infty, 3a + 4)$ і $B = [a - 2, \infty)$, визначимо **взаємне розташування** точок $x_1 = 3a + 4$ і $x_2 = a - 2$.

Для цього розглянемо різницю $x_1 - x_2 = 2a + 6$ і зобразимо криву знаків отриманого виразу (див. мал.).

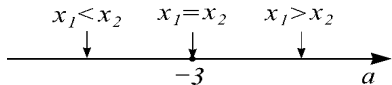


Сукупності нерівностей з параметром

Використовуючи криву знаків
різниці $x_1 - x_2 = 2a + 6$,
отримуємо наступний результат
порівняння точок x_1 і x_2 , який зображено на діаграмі:



Сукупності нерівностей з параметром

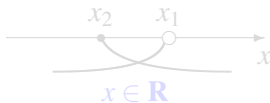


$$x_1 = 3a + 4, \quad x_2 = a - 2$$

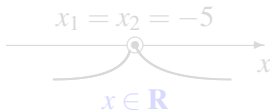
Тепер виконуємо об'єднання множин

$A = (-\infty, x_1)$ і $B = [x_2, \infty)$ в кожному з таких випадків:

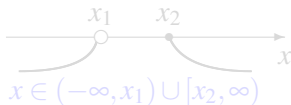
$$a > -3:$$



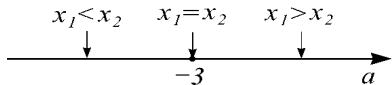
$$a = -3:$$



$$a < -3:$$



Сукупності нерівностей з параметром

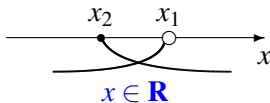


$$x_1 = 3a + 4, \quad x_2 = a - 2$$

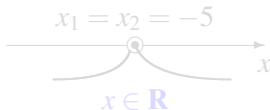
Тепер виконуємо об'єднання множин

$A = (-\infty, x_1)$ і $B = [x_2, \infty)$ в кожному з таких випадків:

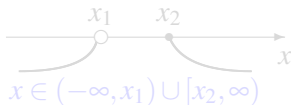
$$a > -3:$$



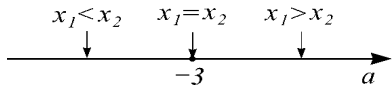
$$a = -3:$$



$$a < -3:$$



Сукупності нерівностей з параметром

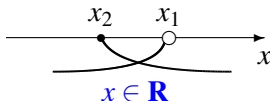


$$x_1 = 3a + 4, \quad x_2 = a - 2$$

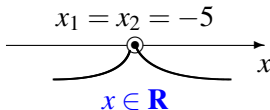
Тепер виконуємо об'єднання множин

$A = (-\infty, x_1)$ і $B = [x_2, \infty)$ в кожному з таких випадків:

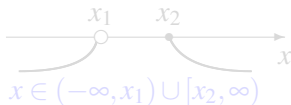
$$a > -3:$$



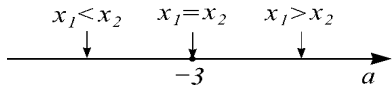
$$a = -3:$$



$$a < -3:$$



Сукупності нерівностей з параметром

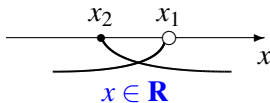


$$x_1 = 3a + 4, \quad x_2 = a - 2$$

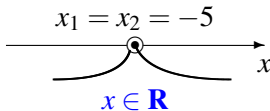
Тепер виконуємо об'єднання множин

$A = (-\infty, x_1)$ і $B = [x_2, \infty)$ в кожному з таких випадків:

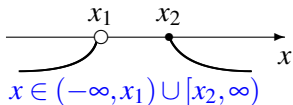
$$a > -3:$$



$$a = -3:$$

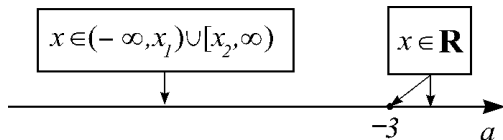


$$a < -3:$$



Сукупності нерівностей з параметром

Результат розв'язання сукупності відображає наступна діаграма:



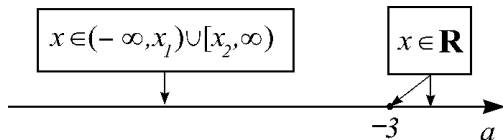
де $x_1 = 3a + 4$ і $x_2 = a - 2$.

Відповідь: 1) при $a \geq -3$ $x \in \mathbf{R}$;

2) при $a < -3$ $x \in (-\infty, 3a + 4) \cup [a - 2, \infty)$.

Сукупності нерівностей з параметром

Результат розв'язання сукупності відображає наступна діаграма:



де $x_1 = 3a + 4$ і $x_2 = a - 2$.

Відповідь: 1) при $a \geq -3$ $x \in \mathbf{R}$;

2) при $a < -3$ $x \in (-\infty, 3a + 4) \cup [a - 2, \infty)$.

Системи, які містять рівняння і нерівності

Якщо в системі з параметром є рівняння і нерівності, то, розв'язавши спочатку рівняння, потім, як правило, доцільно визначити ті значення параметра, при яких кожний з коренів рівняння задовольняє нерівності системи.

Приклад 6. Розв'язати систему з параметром a :

$$\begin{cases} x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8 = 0, \\ x^2 + 2a > 0, \\ x - 4a^2 \leq 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язуючи рівняння

$$x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8 = 0,$$

$$\text{маємо } D/4 = (a-1)^2 + 8a + 8 = a^2 + 6a + 9 = (a+3)^2 \geq 0.$$

Отже, рівняння має розв'язки:

$$x_{1,2} = -(a-1) \pm \sqrt{(a+3)^2} = 1-a \pm |a+3| = 1-a \pm (a+3)$$

(ми скористались тут співвідношенням $\pm|f(a)| = \pm f(a)$ (!)).

Таким чином, отримуємо корені $x_1 = 4$, $x_2 = -2a - 2$, які співпадають у випадку $D = 0$, тобто при $a = -3$.

Системи, які містять рівняння і нерівності

Якщо в системі з параметром є рівняння і нерівності, то, розв'язавши спочатку рівняння, потім, як правило, доцільно визначити ті значення параметра, при яких кожний з коренів рівняння задовольняє нерівності системи.

Приклад 6. Розв'язати систему з параметром a :

$$\begin{cases} x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8 = 0, \\ x^2 + 2a > 0, \\ x - 4a^2 \leq 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язуючи рівняння

$$x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8 = 0,$$

$$\text{маємо } D/4 = (a-1)^2 + 8a + 8 = a^2 + 6a + 9 = (a+3)^2 \geq 0.$$

Отже, рівняння має розв'язки:

$$x_{1,2} = -(a-1) \pm \sqrt{(a+3)^2} = 1-a \pm |a+3| = 1-a \pm (a+3)$$

(ми скористались тут співвідношенням $\pm|f(a)| = \pm f(a)$ (!)).

Таким чином, отримуємо корені $x_1 = 4$, $x_2 = -2a - 2$, які співпадають у випадку $D = 0$, тобто при $a = -3$.

Системи, які містять рівняння і нерівності

Якщо в системі з параметром є рівняння і нерівності, то, розв'язавши спочатку рівняння, потім, як правило, доцільно визначити ті значення параметра, при яких кожний з коренів рівняння задовольняє нерівності системи.

Приклад 6. Розв'язати систему з параметром a :

$$\begin{cases} x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8 = 0, \\ x^2 + 2a > 0, \\ x - 4a^2 \leq 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язуючи рівняння

$$x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8 = 0,$$

$$\text{маємо } D/4 = (a-1)^2 + 8a + 8 = a^2 + 6a + 9 = (a+3)^2 \geq 0.$$

Отже, рівняння має розв'язки:

$$x_{1,2} = -(a-1) \pm \sqrt{(a+3)^2} = 1-a \pm |a+3| = 1-a \pm (a+3)$$

(ми скористались тут співвідношенням $\pm|f(a)| = \pm f(a)$ (!)).

Таким чином, отримуємо корені $x_1 = 4$, $x_2 = -2a - 2$, які співпадають у випадку $D = 0$, тобто при $a = -3$.

Системи, які містять рівняння і нерівності

Тепер визначимо ті значення параметра a , при яких значення $x_1 = 4$ задовольняє нерівності системи. Для цього необхідно розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} 4^2 + 2a > 0, \\ 4 - 4a^2 \leq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} a > -8, \\ a \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty), \end{cases} \iff \\ \iff a \in (-8, -1] \cup [1, \infty).$$

Аналогічно знаходимо ті значення параметра a , при яких значення $x_2 = -2a - 2$ задовольняє нерівності заданої системи, розв'язуючи систему нерівностей

$$\begin{cases} (-2a - 2)^2 + 2a > 0, \\ -2a - 2 - 4a^2 \leq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 2a^2 + 5a + 2 > 0, \\ 2a^2 + a + 1 \geq 0, \end{cases} \iff \\ \iff \begin{cases} a \in (-\infty, -2) \cup (-1/2, \infty), \\ a \in \mathbf{R}, \end{cases} \iff a \in (-\infty, -2) \cup (-1/2, \infty).$$

Отже, $x_1 = 4$ є розв'язком заданої системи, якщо $a \in (-8, -1] \cup [1, \infty)$; $x_2 = -2a - 2$ є розв'язком заданої системи, якщо $a \in (-\infty, -2) \cup (-1/2, \infty)$.

Системи, які містять рівняння і нерівності

Тепер визначимо ті значення параметра a , при яких значення $x_1 = 4$ задовольняє нерівності системи. Для цього необхідно розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} 4^2 + 2a > 0, \\ 4 - 4a^2 \leq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} a > -8, \\ a \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty), \end{cases} \iff \\ \iff a \in (-8, -1] \cup [1, \infty).$$

Аналогічно знаходимо ті значення параметра a , при яких значення $x_2 = -2a - 2$ задовольняє нерівності заданої системи, розв'язуючи систему нерівностей

$$\begin{cases} (-2a - 2)^2 + 2a > 0, \\ -2a - 2 - 4a^2 \leq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 2a^2 + 5a + 2 > 0, \\ 2a^2 + a + 1 \geq 0, \end{cases} \iff \\ \iff \begin{cases} a \in (-\infty, -2) \cup (-1/2, \infty), \\ a \in \mathbf{R}, \end{cases} \iff a \in (-\infty, -2) \cup (-1/2, \infty).$$

Отже, $x_1 = 4$ є розв'язком заданої системи, якщо $a \in (-8, -1] \cup [1, \infty)$; $x_2 = -2a - 2$ є розв'язком заданої системи, якщо $a \in (-\infty, -2) \cup (-1/2, \infty)$.

Системи, які містять рівняння і нерівності

Тепер визначимо ті значення параметра a , при яких значення $x_1 = 4$ задовольняє нерівності системи. Для цього необхідно розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} 4^2 + 2a > 0, \\ 4 - 4a^2 \leq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} a > -8, \\ a \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty), \end{cases} \iff \\ \iff a \in (-8, -1] \cup [1, \infty).$$

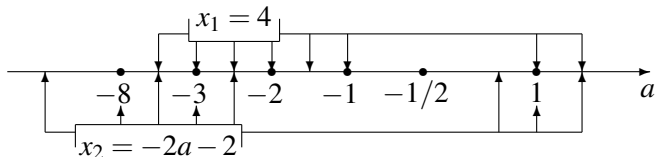
Аналогічно знаходимо ті значення параметра a , при яких значення $x_2 = -2a - 2$ задовольняє нерівності заданої системи, розв'язуючи систему нерівностей

$$\begin{cases} (-2a - 2)^2 + 2a > 0, \\ -2a - 2 - 4a^2 \leq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 2a^2 + 5a + 2 > 0, \\ 2a^2 + a + 1 \geq 0, \end{cases} \iff \\ \iff \begin{cases} a \in (-\infty, -2) \cup (-1/2, \infty), \\ a \in \mathbf{R}, \end{cases} \iff a \in (-\infty, -2) \cup (-1/2, \infty).$$

Отже, $x_1 = 4$ є розв'язком заданої системи, якщо $a \in (-8, -1] \cup [1, \infty)$; $x_2 = -2a - 2$ є розв'язком заданої системи, якщо $a \in (-\infty, -2) \cup (-1/2, \infty)$.

Системи, які містять рівняння і нерівності

Далі потрібно розглянути значення $a = -8; -2; -1; -1/2; 1$ і $a = -3$, коли $x_1 = x_2 = 4$, а також інтервали між сусідніми із вказаних значень (всього 13 випадків).



При $a \in (-8, -3) \cup (-3, -2) \cup [1, \infty)$ розв'язками заданої системи є обидва корені квадратного рівняння $x = 4$ і $x = -2a - 2$.

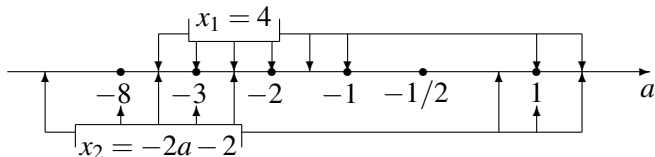
Система має єдиний розв'язок $x = 4$, якщо $a \in \{-3\} \cup [-2, -1]$.

Система має єдиний розв'язок $x = -2a - 2$, якщо $a \in (-\infty, -8] \cup (-1/2; 1)$.

При решті значень, тобто при $a \in (-1, -1/2]$ система розв'язків не має.

Системи, які містять рівняння і нерівності

Далі потрібно розглянути значення $a = -8; -2; -1; -1/2; 1$ і $a = -3$, коли $x_1 = x_2 = 4$, а також інтервали між сусідніми із вказаних значень (всього 13 випадків).



При $a \in (-8, -3) \cup (-3, -2) \cup [1, \infty)$ розв'язками заданої системи є обидва корені квадратного рівняння $x = 4$ і $x = -2a - 2$.

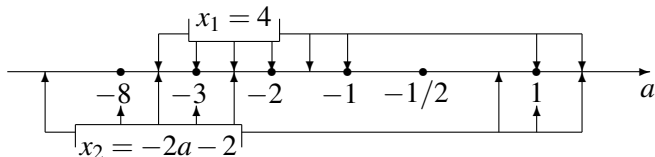
Система має єдиний розв'язок $x = 4$, якщо $a \in \{-3\} \cup [-2, -1]$.

Система має єдиний розв'язок $x = -2a - 2$, якщо $a \in (-\infty, -8] \cup (-1/2; 1)$.

При решті значень, тобто при $a \in (-1, -1/2]$ система розв'язків не має.

Системи, які містять рівняння і нерівності

Далі потрібно розглянути значення $a = -8; -2; -1; -1/2; 1$ і $a = -3$, коли $x_1 = x_2 = 4$, а також інтервали між сусідніми із вказаних значень (всього 13 випадків).



При $a \in (-8, -3) \cup (-3, -2) \cup [1, \infty)$ розв'язками заданої системи є обидва корені квадратного рівняння $x = 4$ і $x = -2a - 2$.

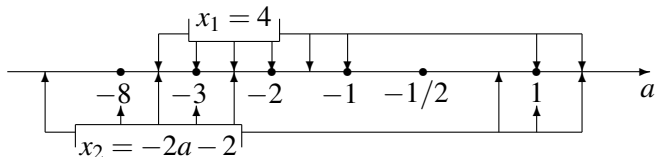
Система має єдиний розв'язок $x = 4$, якщо $a \in \{-3\} \cup [-2, -1]$.

Система має єдиний розв'язок $x = -2a - 2$, якщо $a \in (-\infty, -8] \cup (-1/2; 1)$.

При решті значень, тобто при $a \in (-1, -1/2]$ система розв'язків не має.

Системи, які містять рівняння і нерівності

Далі потрібно розглянути значення $a = -8; -2; -1; -1/2; 1$ і $a = -3$, коли $x_1 = x_2 = 4$, а також інтервали між сусідніми із вказаних значень (всього 13 випадків).



При $a \in (-8, -3) \cup (-3, -2) \cup [1, \infty)$ розв'язками заданої системи є обидва корені квадратного рівняння $x = 4$ і $x = -2a - 2$.

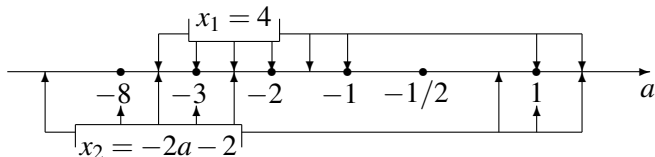
Система має єдиний розв'язок $x = 4$, якщо $a \in \{-3\} \cup [-2, -1]$.

Система має єдиний розв'язок $x = -2a - 2$, якщо $a \in (-\infty, -8] \cup (-1/2; 1)$.

При решті значень, тобто при $a \in (-1, -1/2]$ система розв'язків не має.

Системи, які містять рівняння і нерівності

Далі потрібно розглянути значення $a = -8; -2; -1; -1/2; 1$ і $a = -3$, коли $x_1 = x_2 = 4$, а також інтервали між сусідніми із вказаних значень (всього 13 випадків).



При $a \in (-8, -3) \cup (-3, -2) \cup [1, \infty)$ розв'язками заданої системи є обидва корені квадратного рівняння $x = 4$ і $x = -2a - 2$.

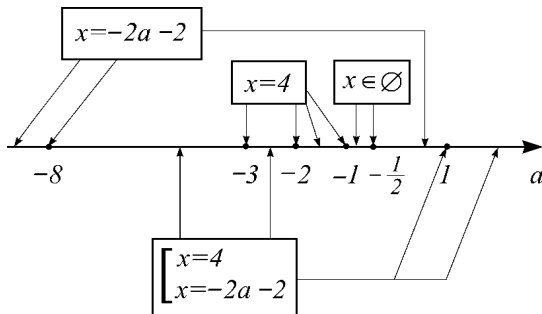
Система має єдиний розв'язок $x = 4$, якщо $a \in \{-3\} \cup [-2, -1]$.

Система має єдиний розв'язок $x = -2a - 2$, якщо $a \in (-\infty, -8] \cup (-1/2; 1)$.

При решті значень, тобто при $a \in (-1, -1/2]$ система розв'язків не має.

Системи, які містять рівняння і нерівності

Таким чином, при різних значеннях параметра a задана система має такі розв'язки:

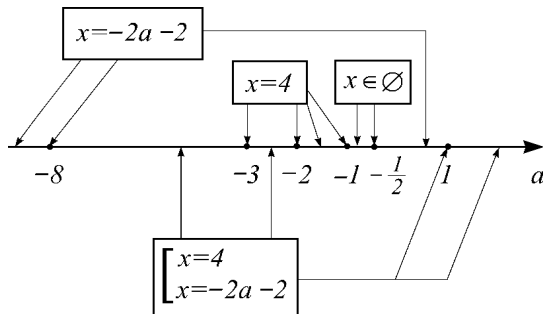


Зазначимо, що на наведений діаграмі кількість стрілочок від рамок на вісь a дорівнює 13, тобто кількості всіх можливих випадків.

- Відповідь: 1) при $a \in (-\infty, -8] \cup (-1/2; 1)$ $x = -2a - 2$;
 2) при $a \in (-8; -3) \cup (-3; -2) \cup [1, \infty)$ $x \in \{4; -2a - 2\}$;
 3) при $a \in \{-3\} \cup [-2, -1]$ $x = 4$; 4) при $a \in (-1, -1/2]$ $x \in \emptyset$.

Системи, які містять рівняння і нерівності

Таким чином, при різних значеннях параметра a задана система має такі розв'язки:



Зазначимо, що на наведений діаграмі кількість стрілочок від рамок на вісь a дорівнює 13, тобто кількості всіх можливих випадків.

- Відповідь: 1) при $a \in (-\infty, -8] \cup (-1/2; 1)$ $x = -2a - 2$;
 2) при $a \in (-8; -3) \cup (-3; -2) \cup [1, \infty)$ $x \in \{4; -2a - 2\}$;
 3) при $a \in \{-3\} \cup [-2, -1]$ $x = 4$; 4) при $a \in (-1, -1/2]$ $x \in \emptyset$.