

Техніка розв'язання рівнянь і нерівностей з параметром, I

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 10 (частина перша)



Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Рівняння і нерівності з параметром

Завдання підвищеної складності є невід'ємним атрибутом конкурсних іспитів з математики. Традиційно такі завдання викликають найбільші труднощі у абітурієнтів. В зв'язку з цим видається очевидним той факт, що учням необхідна спеціальна підготовка до розв'язання завдань підвищеної складності.

Така підготовка, в першу чергу, передбачає вдосконалення технічних навичок учнів при розв'язанні ускладнених завдань стандартного типу, включаючи **завдання з параметром**.

Рівняння і нерівності з параметром

Рівняння з однією невідомою x і параметром a — це вираз вигляду

$$f(x, a) = g(x, a), \quad (1)$$

де $f(x, a)$ і $g(x, a)$ — деякі функції від x і a .

При цьому на відміну від рівняння з двома невідомими

- рівняння (1) з параметром a — це скорочений, символічний запис цілої сім'ї (тобто нескінченної множини) рівнянь з однією невідомою x .

Окремі представники цієї сім'ї рівнянь отримуються при підстановці в рівність (1) конкретних числових значень параметра a .

Наприклад, окремі представники сім'ї рівнянь $ax = 1$ (чи одного рівняння з параметром a) — це рівняння: $1x = 1$ (тут $a = 1$), $0x = 1$ (тут $a = 0$), $-\pi x = 1$ (тут $a = -\pi$) тощо.

Рівняння і нерівності з параметром

Рівняння з однією невідомою x і параметром a — це вираз вигляду

$$f(x, a) = g(x, a), \quad (1)$$

де $f(x, a)$ і $g(x, a)$ — деякі функції від x і a .

При цьому на відміну від рівняння з двома невідомими

- рівняння (1) з параметром a — це скорочений, символічний запис цілої сім'ї (тобто нескінченної множини) рівнянь з однією невідомою x .

Окремі представники цієї сім'ї рівнянь отримуються при підстановці в рівність (1) конкретних числових значень параметра a .

Наприклад, окремі представники сім'ї рівнянь $ax = 1$ (чи одного рівняння з параметром a) — це рівняння: $1x = 1$ (тут $a = 1$), $0x = 1$ (тут $a = 0$), $-\pi x = 1$ (тут $a = -\pi$) тощо.

Рівняння і нерівності з параметром

- Розв'язати рівняння з параметром — це означає розв'язати **всі** рівняння нескінченної сім'ї рівнянь.

Наприклад, рівняння $2x = a$ з параметром a має своїми представниками, зокрема, рівняння:

$$2x = 1 \text{ (тут } a = 1) \iff x = 1/2,$$

$$2x = \pi \text{ (тут } a = \pi) \iff x = \pi/2,$$

$$2x = 0 \text{ (тут } a = 0) \iff x = 0,$$

$$2x = -1 \text{ (тут } a = -1) \iff x = -1/2,$$

$$2x = -3 \text{ (тут } a = -3) \iff x = -3/2 \text{ тощо.}$$

В цьому випадку всі представники сім'ї рівнянь $2x = a$ розв'язуються однаково за допомогою ділення обох частин рівняння на число 2, тобто рівняння $2x = a$ має розв'язок $x = a/2$ при будь-якому значенні параметра a .

Рівняння і нерівності з параметром

- Розв'язати рівняння з параметром — це означає розв'язати **всі** рівняння нескінченної сім'ї рівнянь.

Наприклад, рівняння $2x = a$ з параметром a має своїми представниками, зокрема, рівняння:

$$2x = 1 \text{ (тут } a = 1) \iff x = 1/2,$$

$$2x = \pi \text{ (тут } a = \pi) \iff x = \pi/2,$$

$$2x = 0 \text{ (тут } a = 0) \iff x = 0,$$

$$2x = -1 \text{ (тут } a = -1) \iff x = -1/2,$$

$$2x = -3 \text{ (тут } a = -3) \iff x = -3/2 \text{ тощо.}$$

В цьому випадку всі представники сім'ї рівнянь $2x = a$ розв'язуються однаково за допомогою ділення обох частин рівняння на число 2, тобто рівняння $2x = a$ має розв'язок $x = a/2$ при будь-якому значенні параметра a .

Рівняння і нерівності з параметром

Проте, слід мати на увазі, що хід розв'язання рівняння з параметром, як правило, залежить від параметра, тобто

- при різних значеннях параметра рівняння з параметром розв'язується по-різному. Внаслідок цього, при різних значеннях параметра рівняння з параметром має різні розв'язки, тобто множина розв'язків залежить від параметра.

Так, серед представників сім'ї рівнянь $ax = 1$ (з параметром a) є, зокрема, рівняння:

$$1x = 1 \text{ (тут } a = 1) \iff x = 1,$$

$$0x = 1 \text{ (тут } a = 0) \iff x \in \emptyset, \text{ оскільки } 0 = 1 \text{ – це хибна рівність,}$$

$$-\pi x = 1 \text{ (тут } a = -\pi) \iff x = -1/\pi \text{ тощо.}$$

Отже, є, принаймні, одне рівняння (при $a = 0$), яке розв'язується не так, як інші представники цієї сім'ї рівнянь.

Рівняння і нерівності з параметром

Проте, слід мати на увазі, що хід розв'язання рівняння з параметром, як правило, залежить від параметра, тобто

- при різних значеннях параметра рівняння з параметром розв'язується по-різному. Внаслідок цього, при різних значеннях параметра рівняння з параметром має різні розв'язки, тобто множина розв'язків залежить від параметра.

Так, серед представників сім'ї рівнянь $ax = 1$ (з параметром a) є, зокрема, рівняння:

$$1x = 1 \text{ (тут } a = 1) \iff x = 1,$$

$$0x = 1 \text{ (тут } a = 0) \iff x \in \emptyset, \text{ оскільки } 0 = 1 \text{ – це хибна рівність,}$$

$$-\pi x = 1 \text{ (тут } a = -\pi) \iff x = -1/\pi \text{ тощо.}$$

Отже, є, принаймні, одне рівняння (при $a = 0$), яке розв'язується не так, як інші представники цієї сім'ї рівнянь.

Рівняння і нерівності з параметром

Розглянемо уважніше розв'язання рівняння $ax = 1$ з параметром a в наступному прикладі.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $ax = 1$ з параметром a .

Розв'язання. Відзначимо, що $ax = 1 \not\Leftrightarrow x = 1/a$, оскільки при $a = 0$ ділення на число 0 неможливе.

Отже, в сім'ї рівнянь $ax = 1$ є рівняння $0x = 1$, яке розв'язується не так, як усі інші представники цієї сім'ї рівнянь.

Дійсно, при $a = 0$ отримуємо $0x = 1$ (хибна рівність) $\Leftrightarrow \Leftrightarrow x \in \emptyset$ у той час, як при $a \neq 0$ розв'язком рівняння $ax = 1$ є $x = 1/a$.

Отже, залежність множини розв'язків рівняння $ax = 1$ від параметра a виражає наступна відповідь, яка складається з двох пунктів.

Відповідь: 1) при $a \neq 0$ $x = 1/a$; 2) при $a = 0$ $x \in \emptyset$.

Рівняння і нерівності з параметром

Розглянемо уважніше розв'язання рівняння $ax = 1$ з параметром a в наступному прикладі.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $ax = 1$ з параметром a .

Розв'язання. Відзначимо, що $ax = 1 \not\Leftrightarrow x = 1/a$, оскільки при $a = 0$ ділення на число 0 неможливе.

Отже, в сім'ї рівнянь $ax = 1$ є рівняння $0x = 1$, яке розв'язується не так, як усі інші представники цієї сім'ї рівнянь.

Дійсно, при $a = 0$ отримуємо $0x = 1$ (хибна рівність) $\Leftrightarrow \Leftrightarrow x \in \emptyset$ у той час, як при $a \neq 0$ розв'язком рівняння $ax = 1$ є $x = 1/a$.

Отже, залежність множини розв'язків рівняння $ax = 1$ від параметра a виражає наступна відповідь, яка складається з двох пунктів.

Відповідь: 1) при $a \neq 0$ $x = 1/a$; 2) при $a = 0$ $x \in \emptyset$.

Рівняння і нерівності з параметром

Розглянемо уважніше розв'язання рівняння $ax = 1$ з параметром a в наступному прикладі.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $ax = 1$ з параметром a .

Розв'язання. Відзначимо, що $ax = 1 \not\Rightarrow x = 1/a$, оскільки при $a = 0$ ділення на число 0 неможливе.

Отже, в сім'ї рівнянь $ax = 1$ є рівняння $0x = 1$, яке розв'язується не так, як усі інші представники цієї сім'ї рівнянь.

Дійсно, при $a = 0$ отримуємо $0x = 1$ (хибна рівність) $\iff \iff x \in \emptyset$ у той час, як при $a \neq 0$ розв'язком рівняння $ax = 1$ є $x = 1/a$.

Отже, залежність множини розв'язків рівняння $ax = 1$ від параметра a виражає наступна відповідь, яка складається з двох пунктів.

Відповідь: 1) при $a \neq 0$ $x = 1/a$; 2) при $a = 0$ $x \in \emptyset$.

Рівняння і нерівності з параметром

Розглянемо уважніше розв'язання рівняння $ax = 1$ з параметром a в наступному прикладі.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $ax = 1$ з параметром a .

Розв'язання. Відзначимо, що $ax = 1 \not\Rightarrow x = 1/a$, оскільки при $a = 0$ ділення на число 0 неможливе.

Отже, в сім'ї рівнянь $ax = 1$ є рівняння $0x = 1$, яке розв'язується не так, як усі інші представники цієї сім'ї рівнянь.

Дійсно, при $a = 0$ отримуємо $0x = 1$ (хибна рівність) $\iff \iff x \in \emptyset$ у той час, як при $a \neq 0$ розв'язком рівняння $ax = 1$ є $x = 1/a$.

Отже, залежність множини розв'язків рівняння $ax = 1$ від параметра a виражає наступна відповідь, яка складається з двох пунктів.

Відповідь: 1) при $a \neq 0$ $x = 1/a$; 2) при $a = 0$ $x \in \emptyset$.

Рівняння і нерівності з параметром

Отже,

- розв'язати рівняння з параметром a — означає знайти залежність множини розв'язків рівняння від параметра a . При цьому відповідь, як правило, складається з кількох пунктів.

Підкреслимо тут, що відповідь " $x = 1/a$ при $a \neq 0$ " для рівняння $ax = 1$ є неповною, оскільки очевидно, що при цьому вказана множина розв'язків не для всіх представників сім'ї рівнянь $ax = 1$.

Рівняння і нерівності з параметром

Отже,

- розв'язати рівняння з параметром a — означає знайти залежність множини розв'язків рівняння від параметра a . При цьому відповідь, як правило, складається з кількох пунктів.

Підкреслимо тут, що відповідь " $x = 1/a$ при $a \neq 0$ " для рівняння $ax = 1$ є неповною, оскільки очевидно, що при цьому вказана множина розв'язків не для всіх представників сім'ї рівнянь $ax = 1$.

Рівняння і нерівності з параметром

Зазначимо, що все те, що було сказано про розв'язання рівнянь з параметром, із урахуванням очевидних поправок переноситься також і на розв'язання нерівностей з параметром.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $ax < 1$ з параметром a .
Розв'язання. Звернемо увагу на те, що поспішні висновки типу $x \in \emptyset$ при $a = 0$ і $x < 1/a$ при $a \neq 0$ є повністю помилковими !

Дійсно, по-перше, при $a = 0$ маємо істинну нерівність $0x < 1$, розв'язком якої є будь-яке $x \in \mathbb{R}$.

По-друге, при $a \neq 0$ в сім'ї нерівностей $ax < 1$ є такі її представники, для яких множини розв'язків істотно відрізняються за своїм виглядом.

Так, при $a = 1$ маємо нерівність $x < 1$ у той час, як при $a = -1$ отримуємо $-x < 1 \iff x > -1$. Тому запис " $x < 1/a$ при $a \neq 0$ " є помилковим, оскільки не враховує необхідність зміни знака нерівності $ax < 1$ при діленні обох його частин на від'ємне число a .

Рівняння і нерівності з параметром

Зазначимо, що все те, що було сказано про розв'язання рівнянь з параметром, із урахуванням очевидних поправок переноситься також і на розв'язання нерівностей з параметром.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $ax < 1$ з параметром a .

Розв'язання. Звернемо увагу на те, що поспішні висновки типу $x \in \emptyset$ при $a = 0$ і $x < 1/a$ при $a \neq 0$ є **повністю помилковими** !

Дійсно, по-перше, при $a = 0$ маємо **істинну** нерівність $0x < 1$, розв'язком якої є будь-яке $x \in \mathbf{R}$.

По-друге, **при $a \neq 0$** в сім'ї нерівностей $ax < 1$ є такі її представники, для яких **множини розв'язків істотно відрізняються за своїм виглядом**.

Так, при $a = 1$ маємо нерівність $x < 1$ у той час, як при $a = -1$ отримуємо $-x < 1 \iff x > -1$. Тому запис " $x < 1/a$ при $a \neq 0$ " є помилковим, оскільки не враховує необхідність зміни знака нерівності $ax < 1$ при діленні обох його частин на **від'ємне** число a .

Рівняння і нерівності з параметром

Зазначимо, що все те, що було сказано про розв'язання рівнянь з параметром, із урахуванням очевидних поправок переноситься також і на розв'язання нерівностей з параметром.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $ax < 1$ з параметром a .
Розв'язання. Звернемо увагу на те, що поспішні висновки типу $x \in \emptyset$ при $a = 0$ і $x < 1/a$ при $a \neq 0$ є **повністю помилковими** !

Дійсно, по-перше, при $a = 0$ маємо **істинну** нерівність $0x < 1$, розв'язком якої є будь-яке $x \in \mathbf{R}$.

По-друге, при $a \neq 0$ в сім'ї нерівностей $ax < 1$ є такі її представники, для яких **множини розв'язків істотно відрізняються за своїм виглядом**.

Так, при $a = 1$ маємо нерівність $x < 1$ у той час, як при $a = -1$ отримуємо $-x < 1 \iff x > -1$. Тому запис " $x < 1/a$ при $a \neq 0$ " є помилковим, оскільки не враховує необхідність зміни знака нерівності $ax < 1$ при діленні обох його частин на **від'ємне** число a .

Рівняння і нерівності з параметром

Зазначимо, що все те, що було сказано про розв'язання рівнянь з параметром, із урахуванням очевидних поправок переноситься також і на розв'язання нерівностей з параметром.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $ax < 1$ з параметром a .
Розв'язання. Звернемо увагу на те, що поспішні висновки типу $x \in \emptyset$ при $a = 0$ і $x < 1/a$ при $a \neq 0$ є **повністю помилковими** !

Дійсно, по-перше, при $a = 0$ маємо **істинну** нерівність $0x < 1$, розв'язком якої є будь-яке $x \in \mathbf{R}$.

По-друге, при $a \neq 0$ в сім'ї нерівностей $ax < 1$ є такі її представники, для яких **множини розв'язків істотно відрізняються за своїм виглядом**.

Так, при $a = 1$ маємо нерівність $x < 1$ у той час, як при $a = -1$ отримуємо $-x < 1 \iff x > -1$. Тому запис " $x < 1/a$ при $a \neq 0$ " є помилковим, оскільки не враховує необхідність зміни знака нерівності $ax < 1$ при діленні обох його частин на **від'ємне** число a .

Рівняння і нерівності з параметром

Зазначимо, що все те, що було сказано про розв'язання рівнянь з параметром, із урахуванням очевидних поправок переноситься також і на розв'язання нерівностей з параметром.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $ax < 1$ з параметром a .
Розв'язання. Звернемо увагу на те, що поспішні висновки типу $x \in \emptyset$ при $a = 0$ і $x < 1/a$ при $a \neq 0$ є **повністю помилковими** !

Дійсно, по-перше, при $a = 0$ маємо **істинну** нерівність $0x < 1$, розв'язком якої є будь-яке $x \in \mathbf{R}$.

По-друге, **при $a \neq 0$** в сім'ї нерівностей $ax < 1$ є такі її представники, для яких **множини розв'язків істотно відрізняються за своїм виглядом**.

Так, при $a = 1$ маємо нерівність $x < 1$ у той час, як при $a = -1$ отримуємо $-x < 1 \iff x > -1$. Тому запис " $x < 1/a$ при $a \neq 0$ " є помилковим, оскільки не враховує необхідність зміни знака нерівності $ax < 1$ при діленні обох його частин на **від'ємне** число a .

Рівняння і нерівності з параметром

Отже, при розв'язанні нерівності $ax < 1$, крім випадку $a = 0$, необхідно також окремо виділити випадки $a > 0$ і $a < 0$.

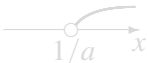
Так, при $a > 0$ отримуємо $x < 1/a$ у той час як при $a < 0$, виконуючи ділення обох частин нерівності $ax < 1$ на від'ємне значення a , отримуємо множину його розв'язків у вигляді $x > 1/a$.

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x < 1/a$; 2) при $a = 0$ $x \in \mathbf{R}$; 3) при $a < 0$ $x > 1/a$.

Підкреслимо, що три пункти відповіді відображають три різних види множини розв'язків нерівності, а саме:

1) при $a > 0$:  $x \in (-\infty, 1/a)$

2) при $a = 0$:  $x \in \mathbf{R}$

3) при $a < 0$:  $x \in (1/a, \infty)$

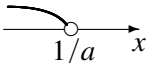
Рівняння і нерівності з параметром

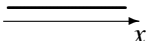
Отже, при розв'язанні нерівності $ax < 1$, крім випадку $a = 0$, необхідно також окремо виділити випадки $a > 0$ і $a < 0$.

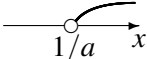
Так, при $a > 0$ отримуємо $x < 1/a$ у той час як при $a < 0$, виконуючи ділення обох частин нерівності $ax < 1$ на від'ємне значення a , отримуємо множину його розв'язків у вигляді $x > 1/a$.

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x < 1/a$; 2) при $a = 0$ $x \in \mathbf{R}$; 3) при $a < 0$ $x > 1/a$.

Підкреслимо, що три пункти відповіді відображають три різних види множини розв'язків нерівності, а саме:

1) при $a > 0$:  $x \in (-\infty, 1/a)$

2) при $a = 0$:  $x \in \mathbf{R}$

3) при $a < 0$:  $x \in (1/a, \infty)$

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Легко помітити, що для рівняння $ax = 1$ і нерівності $ax < 1$ відповіді фактично повторюють викладені розв'язання (після виключення наших коментарів до цих розв'язань) розглянутих прикладів 1 і 2. Така особливість найпростіших рівнянь і нерівностей з параметром.

Наведемо також відповіді-розв'язання ряду найпростіших рівнянь і нерівностей з параметром a , супроводжуючи деякі з них короткими коментарями чи розгорнутими розв'язаннями.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $ax = 0$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \neq 0$ $x = 0$; 2) при $a = 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $ax \geq 1$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \geq 1/a$; 2) при $a = 0$ $x \in \emptyset$;
3) при $a < 0$ $x \leq 1/a$.

Приклад 5. Розв'язати нерівність $ax \leq 1$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \leq 1/a$; 2) при $a = 0$ $x \in \mathbf{R}$;
3) при $a < 0$ $x \geq 1/a$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Легко помітити, що для рівняння $ax = 1$ і нерівності $ax < 1$ відповіді фактично повторюють викладені розв'язання (після виключення наших коментарів до цих розв'язань) розглянутих прикладів 1 і 2. Така особливість найпростіших рівнянь і нерівностей з параметром.

Наведемо також відповіді-розв'язання ряду найпростіших рівнянь і нерівностей з параметром a , супроводжуючи деякі з них короткими коментарями чи розгорнутими розв'язаннями.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $ax = 0$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \neq 0$ $x = 0$; 2) при $a = 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $ax \geq 1$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \geq 1/a$; 2) при $a = 0$ $x \in \emptyset$;
3) при $a < 0$ $x \leq 1/a$.

Приклад 5. Розв'язати нерівність $ax \leq 1$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \leq 1/a$; 2) при $a = 0$ $x \in \mathbf{R}$;
3) при $a < 0$ $x \geq 1/a$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Легко помітити, що для рівняння $ax = 1$ і нерівності $ax < 1$ відповіді фактично повторюють викладені розв'язання (після виключення наших коментарів до цих розв'язань) розглянутих прикладів 1 і 2. Така особливість найпростіших рівнянь і нерівностей з параметром.

Наведемо також відповіді-розв'язання ряду найпростіших рівнянь і нерівностей з параметром a , супроводжуючи деякі з них короткими коментарями чи розгорнутими розв'язаннями.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $ax = 0$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \neq 0$ $x = 0$; 2) при $a = 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $ax \geq 1$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \geq 1/a$; 2) при $a = 0$ $x \in \emptyset$;
3) при $a < 0$ $x \leq 1/a$.

Приклад 5. Розв'язати нерівність $ax \leq 1$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \leq 1/a$; 2) при $a = 0$ $x \in \mathbf{R}$;
3) при $a < 0$ $x \geq 1/a$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Легко помітити, що для рівняння $ax = 1$ і нерівності $ax < 1$ відповіді фактично повторюють викладені розв'язання (після виключення наших коментарів до цих розв'язань) розглянутих прикладів 1 і 2. Така особливість найпростіших рівнянь і нерівностей з параметром.

Наведемо також відповіді-розв'язання ряду найпростіших рівнянь і нерівностей з параметром a , супроводжуючи деякі з них короткими коментарями чи розгорнутими розв'язаннями.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $ax = 0$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \neq 0$ $x = 0$; 2) при $a = 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $ax \geq 1$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \geq 1/a$; 2) при $a = 0$ $x \in \emptyset$;
3) при $a < 0$ $x \leq 1/a$.

Приклад 5. Розв'язати нерівність $ax \leq 1$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \leq 1/a$; 2) при $a = 0$ $x \in \mathbf{R}$;
3) при $a < 0$ $x \geq 1/a$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Легко помітити, що для рівняння $ax = 1$ і нерівності $ax < 1$ відповіді фактично повторюють викладені розв'язання (після виключення наших коментарів до цих розв'язань) розглянутих прикладів 1 і 2. Така особливість найпростіших рівнянь і нерівностей з параметром.

Наведемо також відповіді-розв'язання ряду найпростіших рівнянь і нерівностей з параметром a , супроводжуючи деякі з них короткими коментарями чи розгорнутими розв'язаннями.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $ax = 0$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \neq 0$ $x = 0$; 2) при $a = 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $ax \geq 1$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \geq 1/a$; 2) при $a = 0$ $x \in \emptyset$;
3) при $a < 0$ $x \leq 1/a$.

Приклад 5. Розв'язати нерівність $ax \leq 1$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \leq 1/a$; 2) при $a = 0$ $x \in \mathbf{R}$;
3) при $a < 0$ $x \geq 1/a$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Легко помітити, що для рівняння $ax = 1$ і нерівності $ax < 1$ відповіді фактично повторюють викладені розв'язання (після виключення наших коментарів до цих розв'язань) розглянутих прикладів 1 і 2. Така особливість найпростіших рівнянь і нерівностей з параметром.

Наведемо також відповіді-розв'язання ряду найпростіших рівнянь і нерівностей з параметром a , супроводжуючи деякі з них короткими коментарями чи розгорнутими розв'язаннями.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $ax = 0$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \neq 0$ $x = 0$; 2) при $a = 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $ax \geq 1$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \geq 1/a$; 2) при $a = 0$ $x \in \emptyset$;
3) при $a < 0$ $x \leq 1/a$.

Приклад 5. Розв'язати нерівність $ax \leq 1$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \leq 1/a$; 2) при $a = 0$ $x \in \mathbf{R}$;
3) при $a < 0$ $x \geq 1/a$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Легко помітити, що для рівняння $ax = 1$ і нерівності $ax < 1$ відповіді фактично повторюють викладені розв'язання (після виключення наших коментарів до цих розв'язань) розглянутих прикладів 1 і 2. Така особливість найпростіших рівнянь і нерівностей з параметром.

Наведемо також відповіді-розв'язання ряду найпростіших рівнянь і нерівностей з параметром a , супроводжуючи деякі з них короткими коментарями чи розгорнутими розв'язаннями.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $ax = 0$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \neq 0$ $x = 0$; 2) при $a = 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $ax \geq 1$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \geq 1/a$; 2) при $a = 0$ $x \in \emptyset$;
3) при $a < 0$ $x \leq 1/a$.

Приклад 5. Розв'язати нерівність $ax \leq 1$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \leq 1/a$; 2) при $a = 0$ $x \in \mathbf{R}$;
3) при $a < 0$ $x \geq 1/a$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Легко помітити, що для рівняння $ax = 1$ і нерівності $ax < 1$ відповіді фактично повторюють викладені розв'язання (після виключення наших коментарів до цих розв'язань) розглянутих прикладів 1 і 2. Така особливість найпростіших рівнянь і нерівностей з параметром.

Наведемо також відповіді-розв'язання ряду найпростіших рівнянь і нерівностей з параметром a , супроводжуючи деякі з них короткими коментарями чи розгорнутими розв'язаннями.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $ax = 0$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \neq 0$ $x = 0$; 2) при $a = 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $ax \geq 1$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \geq 1/a$; 2) при $a = 0$ $x \in \emptyset$;
3) при $a < 0$ $x \leq 1/a$.

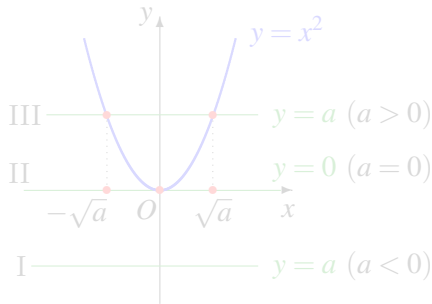
Приклад 5. Розв'язати нерівність $ax \leq 1$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \leq 1/a$; 2) при $a = 0$ $x \in \mathbf{R}$;
3) при $a < 0$ $x \geq 1/a$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Приклад 6а. Розв'язати рівняння $x^2 = a$ з параметром a .

Розв'язання. Розглянемо розв'язання цього рівняння з параметром графічним методом.



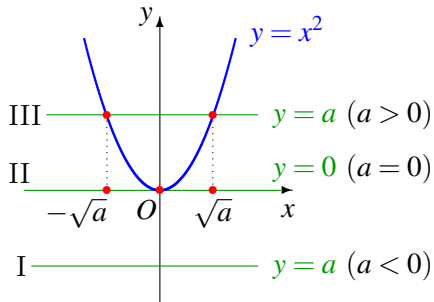
Можливі три різні випадки розміщення прямої $y = a$ відносно параболи $y = x^2$ (див. мал.).

Положенню I прямої $y = a$ відповідають від'ємні значення параметра a . В цьому випадку графіки $y = x^2$ і $y = a$ не перетинаються, тобто рівняння $x^2 = a$ не має розв'язків.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Приклад 6а. Розв'язати рівняння $x^2 = a$ з параметром a .

Розв'язання. Розглянемо розв'язання цього рівняння з параметром графічним методом.



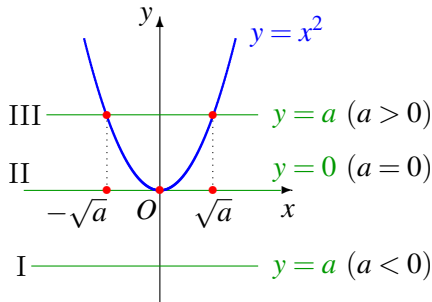
Можливі три різні випадки розміщення прямої $y = a$ відносно параболи $y = x^2$ (див. мал.).

Положенню I прямої $y = a$ відповідають від'ємні значення параметра a . В цьому випадку графіки $y = x^2$ і $y = a$ не перетинаються, тобто рівняння $x^2 = a$ не має розв'язків.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Приклад 6а. Розв'язати рівняння $x^2 = a$ з параметром a .

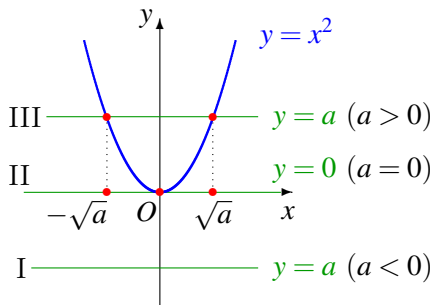
Розв'язання. Розглянемо розв'язання цього рівняння з параметром графічним методом.



Можливі три різні випадки розміщення прямої $y = a$ відносно параболи $y = x^2$ (див. мал.).

Положенню I прямої $y = a$ відповідають від'ємні значення параметра a . В цьому випадку графіки $y = x^2$ і $y = a$ не перетинаються, тобто рівняння $x^2 = a$ не має розв'язків.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром



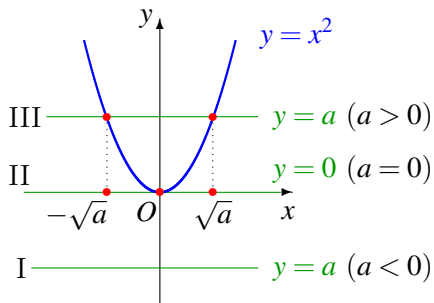
У випадку II $a = 0$, при цьому парабола $y = x^2$ і пряма $y = 0$ мають єдину спільну точку, а рівняння $x^2 = 0$ – єдиний розв'язок $x = 0$.

Нарешті, у випадку III при $a > 0$ пряма $y = a$ перетинає параболу $y = x^2$ у двох точках і рівняння $x^2 = a$ має два корені $x = \pm\sqrt{a}$.

Отже, отримуємо наступну відповідь із трьох пунктів.

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x = \pm\sqrt{a}$; 2) при $a = 0$ $x = 0$;
3) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром



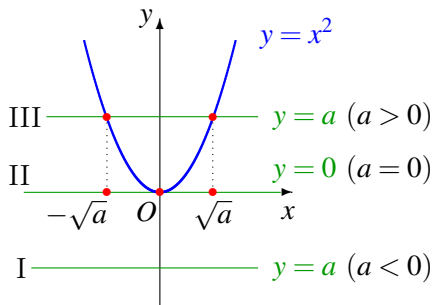
У випадку II $a = 0$, при цьому парабола $y = x^2$ і пряма $y = 0$ мають єдину спільну точку, а рівняння $x^2 = 0$ – єдиний розв'язок $x = 0$.

Нарешті, у випадку III при $a > 0$ пряма $y = a$ перетинає параболу $y = x^2$ у двох точках і рівняння $x^2 = a$ має два корені $x = \pm\sqrt{a}$.

Отже, отримуємо наступну відповідь із трьох пунктів.

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x = \pm\sqrt{a}$; 2) при $a = 0$ $x = 0$;
3) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром



У випадку II $a = 0$, при цьому парабола $y = x^2$ і пряма $y = 0$ мають єдину спільну точку, а рівняння $x^2 = 0$ – єдиний розв'язок $x = 0$.

Нарешті, у випадку III при $a > 0$ пряма $y = a$ перетинає параболу $y = x^2$ у двох точках і рівняння $x^2 = a$ має два корені $x = \pm\sqrt{a}$.

Отже, отримуємо наступну відповідь із трьох пунктів.

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x = \pm\sqrt{a}$; 2) при $a = 0$ $x = 0$;
3) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Зазначимо, що перші два пункти відповіді, а саме:

$$1) \text{ при } a > 0 \quad x = \pm\sqrt{a}; \quad 2) \text{ при } a = 0 \quad x = 0$$

можна об'єднати в один пункт:

$$1) \text{ при } a \geq 0 \quad x = \pm\sqrt{a},$$

оскільки при $a = 0$ виконуються рівності $x = \pm\sqrt{a} = 0$.

Таким чином, отримана відповідь допускає більш короткий запис, що складається з двох пунктів:

$$1) \text{ при } a \geq 0 \quad x = \pm\sqrt{a}; \quad 2) \text{ при } a < 0 \quad x \in \emptyset.$$

Приклад 6b. Розв'язати нерівність $x^2 > a$ з параметром a .

Розв'язання. Розглянемо розв'язання цієї нерівності з параметром графічним методом. При цьому можливі три різні випадки розміщення прямої $y = a$ відносно параболи $y = x^2$ (див. мал. до попереднього прикладу).

Розглянемо окремо кожен із випадків.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Зазначимо, що перші два пункти відповіді, а саме:

$$1) \text{ при } a > 0 \quad x = \pm\sqrt{a}; \quad 2) \text{ при } a = 0 \quad x = 0$$

можна об'єднати в один пункт:

$$1) \text{ при } a \geq 0 \quad x = \pm\sqrt{a},$$

оскільки при $a = 0$ виконуються рівності $x = \pm\sqrt{a} = 0$.

Таким чином, отримана відповідь допускає більш короткий запис, що складається з двох пунктів:

$$1) \text{ при } a \geq 0 \quad x = \pm\sqrt{a}; \quad 2) \text{ при } a < 0 \quad x \in \emptyset.$$

Приклад 6b. Розв'язати нерівність $x^2 > a$ з параметром a .

Розв'язання. Розглянемо розв'язання цієї нерівності з параметром графічним методом. При цьому можливі три різні випадки розміщення прямої $y = a$ відносно параболи $y = x^2$ (див. мал. до попереднього прикладу).

Розглянемо окремо кожен із випадків.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Зазначимо, що перші два пункти відповіді, а саме:

$$1) \text{ при } a > 0 \quad x = \pm\sqrt{a}; \quad 2) \text{ при } a = 0 \quad x = 0$$

можна об'єднати в один пункт:

$$1) \text{ при } a \geq 0 \quad x = \pm\sqrt{a},$$

оскільки при $a = 0$ виконуються рівності $x = \pm\sqrt{a} = 0$.

Таким чином, отримана відповідь допускає більш короткий запис, що складається з двох пунктів:

$$1) \text{ при } a \geq 0 \quad x = \pm\sqrt{a}; \quad 2) \text{ при } a < 0 \quad x \in \emptyset.$$

Приклад 6b. Розв'язати нерівність $x^2 > a$ з параметром a .

Розв'язання. Розглянемо розв'язання цієї нерівності з параметром графічним методом. При цьому можливі три різні випадки розміщення прямої $y = a$ відносно параболи $y = x^2$ (див. мал. до попереднього прикладу).

Розглянемо окремо кожен із випадків.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Зазначимо, що перші два пункти відповіді, а саме:

$$1) \text{ при } a > 0 \quad x = \pm\sqrt{a}; \quad 2) \text{ при } a = 0 \quad x = 0$$

можна об'єднати в один пункт:

$$1) \text{ при } a \geq 0 \quad x = \pm\sqrt{a},$$

оскільки при $a = 0$ виконуються рівності $x = \pm\sqrt{a} = 0$.

Таким чином, отримана відповідь допускає більш короткий запис, що складається з двох пунктів:

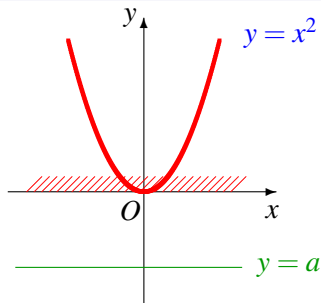
$$1) \text{ при } a \geq 0 \quad x = \pm\sqrt{a}; \quad 2) \text{ при } a < 0 \quad x \in \emptyset.$$

Приклад 6b. Розв'язати нерівність $x^2 > a$ з параметром a .

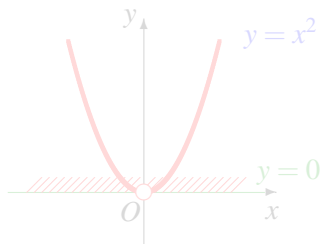
Розв'язання. Розглянемо розв'язання цієї нерівності з параметром графічним методом. При цьому можливі три різні випадки розміщення прямої $y = a$ відносно параболи $y = x^2$ (див. мал. до попереднього прикладу).

Розглянемо окремо кожен із випадків.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

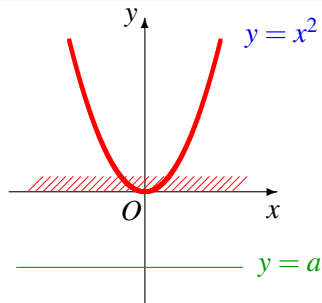


При $a < 0$ парабола $y = x^2$ цілком лежить вище прямої $y = a$. Тому в цьому випадку нерівність $x^2 > a$ має розв'язки $x \in \mathbf{R}$.

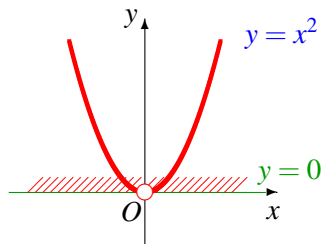


При $a = 0$ нерівність $x^2 > 0$ порушується тільки в точці $x = 0$, де парабола $y = x^2$ дотикається до осі Ox . В цьому випадку нерівність $x^2 > 0$ має розв'язки $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

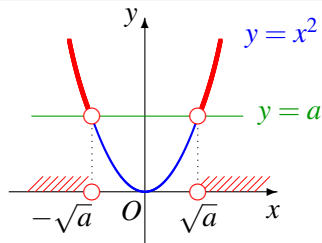


При $a < 0$ парабола $y = x^2$ цілком лежить вище прямої $y = a$. Тому в цьому випадку нерівність $x^2 > a$ має розв'язки $x \in \mathbf{R}$.



При $a = 0$ нерівність $x^2 > 0$ порушується тільки в точці $x = 0$, де парабола $y = x^2$ дотикається до осі Ox . В цьому випадку нерівність $x^2 > 0$ має розв'язки $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

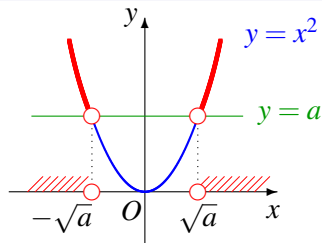


При $a > 0$ відмічаємо частини параболи $y = x^2$, розміщені вище прямої $y = a$, і, проектуючи їх на вісь Ox , отримуємо: $x^2 > a \iff \iff x \in (-\infty, -\sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}, \infty)$.

Випадки $a > 0$ і $a = 0$ можна об'єднати в один пункт відповіді, оскільки в цих випадках множини розв'язків однакового вигляду. Таким чином, отримуємо наступну відповідь із двох пунктів.

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x \in (-\infty, -\sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}, \infty)$;
2) при $a < 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром



При $a > 0$ відмічаємо частини параболи $y = x^2$, розміщені вище прямої $y = a$, і, проектуючи їх на вісь Ox , отримуємо: $x^2 > a \iff \iff x \in (-\infty, -\sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}, \infty)$.

Випадки $a > 0$ і $a = 0$ можна об'єднати в один пункт відповіді, оскільки в цих випадках множини розв'язків однакового вигляду. Таким чином, отримуємо наступну відповідь із двох пунктів.

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x \in (-\infty, -\sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}, \infty)$;
2) при $a < 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Приклад 6с. Розв'язати нерівність $x^2 < a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-\sqrt{a}, \sqrt{a})$;

2) при $a \leq 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 6d. Розв'язати нерівність $x^2 \geq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-\infty, -\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a}, \infty)$;

2) при $a \leq 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 6е. Розв'язати нерівність $x^2 \leq a$ з параметром a .

Розв'язання. Розглянемо розв'язання цієї нерівності з параметром графічним методом. При цьому можливі три різні випадки розміщення прямої $y = a$ відносно параболи $y = x^2$ (див. мал. до Прикладу 6а).

Розглянемо окремо кожен із випадків.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Приклад 6с. Розв'язати нерівність $x^2 < a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-\sqrt{a}, \sqrt{a})$;

2) при $a \leq 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 6d. Розв'язати нерівність $x^2 \geq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-\infty, -\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a}, \infty)$;

2) при $a \leq 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 6е. Розв'язати нерівність $x^2 \leq a$ з параметром a .

Розв'язання. Розглянемо розв'язання цієї нерівності з параметром графічним методом. При цьому можливі три різні випадки розміщення прямої $y = a$ відносно параболи $y = x^2$ (див. мал. до Прикладу 6а).

Розглянемо окремо кожен із випадків.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Приклад 6с. Розв'язати нерівність $x^2 < a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-\sqrt{a}, \sqrt{a})$;

2) при $a \leq 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 6d. Розв'язати нерівність $x^2 \geq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-\infty, -\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a}, \infty)$;

2) при $a \leq 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 6е. Розв'язати нерівність $x^2 \leq a$ з параметром a .

Розв'язання. Розглянемо розв'язання цієї нерівності з параметром графічним методом. При цьому можливі три різні випадки розміщення прямої $y = a$ відносно параболи $y = x^2$ (див. мал. до Прикладу 6а).

Розглянемо окремо кожен із випадків.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Приклад 6с. Розв'язати нерівність $x^2 < a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-\sqrt{a}, \sqrt{a})$;

2) при $a \leq 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 6d. Розв'язати нерівність $x^2 \geq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-\infty, -\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a}, \infty)$;

2) при $a \leq 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 6е. Розв'язати нерівність $x^2 \leq a$ з параметром a .

Розв'язання. Розглянемо розв'язання цієї нерівності з параметром графічним методом. При цьому можливі три різні випадки розміщення прямої $y = a$ відносно параболи $y = x^2$ (див. мал. до Прикладу 6а).

Розглянемо окремо кожен із випадків.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Приклад 6с. Розв'язати нерівність $x^2 < a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-\sqrt{a}, \sqrt{a})$;

2) при $a \leq 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 6d. Розв'язати нерівність $x^2 \geq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-\infty, -\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a}, \infty)$;

2) при $a \leq 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 6е. Розв'язати нерівність $x^2 \leq a$ з параметром a .

Розв'язання. Розглянемо розв'язання цієї нерівності з параметром графічним методом. При цьому можливі три різні випадки розміщення прямої $y = a$ відносно параболи $y = x^2$ (див. мал. до Прикладу 6а).

Розглянемо окремо кожен із випадків.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Приклад 6с. Розв'язати нерівність $x^2 < a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-\sqrt{a}, \sqrt{a})$;

2) при $a \leq 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 6d. Розв'язати нерівність $x^2 \geq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-\infty, -\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a}, \infty)$;

2) при $a \leq 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 6е. Розв'язати нерівність $x^2 \leq a$ з параметром a .

Розв'язання. Розглянемо розв'язання цієї нерівності з параметром графічним методом. При цьому можливі три різні випадки розміщення прямої $y = a$ відносно параболи $y = x^2$ (див. мал. до Прикладу 6а).

Розглянемо окремо кожен із випадків.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Приклад 6с. Розв'язати нерівність $x^2 < a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-\sqrt{a}, \sqrt{a})$;

2) при $a \leq 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 6d. Розв'язати нерівність $x^2 \geq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-\infty, -\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a}, \infty)$;

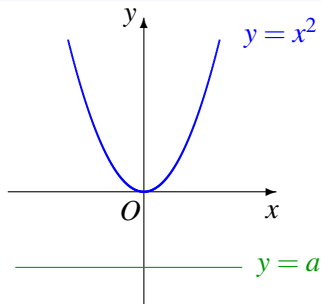
2) при $a \leq 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 6е. Розв'язати нерівність $x^2 \leq a$ з параметром a .

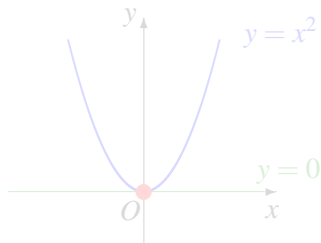
Розв'язання. Розглянемо розв'язання цієї нерівності з параметром графічним методом. При цьому можливі три різні випадки розміщення прямої $y = a$ відносно параболи $y = x^2$ (див. мал. до Прикладу 6а).

Розглянемо окремо кожен із випадків.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

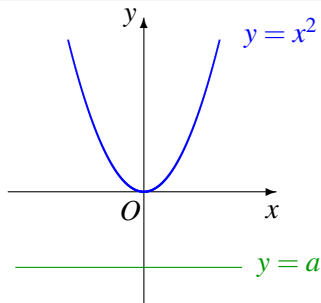


При $a < 0$ немає точок параболи $y = x^2$, розміщених **не вище** прямої $y = a$. Тому в цьому випадку **нерівність $x^2 \leq a$ не має розв'язків.**

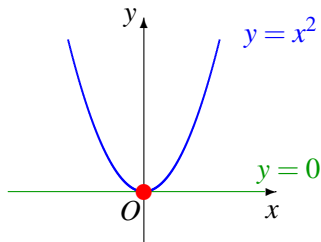


При $a = 0$ нерівність $x^2 \leq 0$ виконується тільки в точці $x = 0$, де парабола $y = x^2$ дотикається до осі Ox .

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

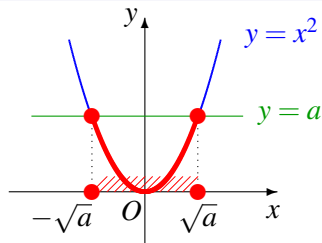


При $a < 0$ немає точок параболи $y = x^2$, розміщених **не вище** прямої $y = a$. Тому в цьому випадку **нерівність $x^2 \leq a$ не має розв'язків.**



При $a = 0$ нерівність $x^2 \leq 0$ виконується тільки в точці $x = 0$, де парабола $y = x^2$ дотикається до осі Ox .

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

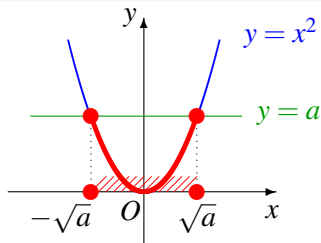


При $a > 0$ відмічаємо частину параболи $y = x^2$, розміщену **не вище** прямої $y = a$, і, проєктуючи її на вісь Ox , отримуємо: $x^2 \leq a \iff x \in [-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$.

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$;
2) при $a = 0$ $x = 0$; 3) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Зазначимо, що тут перші два пункти записаної відповіді не можна об'єднати в один пункт, оскільки в цих випадках нерівність має множини розв'язків різного виду: при $a > 0$ множиною розв'язків є відрізок, а при $a = 0$ множина розв'язків складається з єдиної точки.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

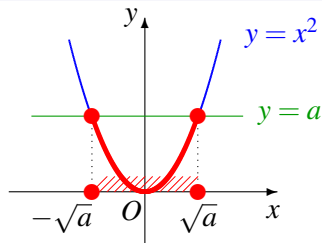


При $a > 0$ відмічаємо частину параболи $y = x^2$, розміщену **не вище** прямої $y = a$, і, проєктуючи її на вісь Ox , отримуємо: $x^2 \leq a \iff x \in [-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$.

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$;
2) при $a = 0$ $x = 0$; 3) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Зазначимо, що тут перші два пункти записаної відповіді не можна об'єднати в один пункт, оскільки в цих випадках нерівність має множини розв'язків різного виду: при $a > 0$ множиною розв'язків є відрізок, а при $a = 0$ множина розв'язків складається з єдиної точки.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром



При $a > 0$ відмічаємо частину параболи $y = x^2$, розміщену **не вище** прямої $y = a$, і, проєктуючи її на вісь Ox , отримуємо: $x^2 \leq a \iff x \in [-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$.

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$;
2) при $a = 0$ $x = 0$; 3) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Зазначимо, що тут перші два пункти записаної відповіді не можна об'єднати в один пункт, оскільки в цих випадках нерівність має множини розв'язків різного виду: при $a > 0$ множиною розв'язків є відрізок, а при $a = 0$ множина розв'язків складається з єдиної точки.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Приклад 7а. Розв'язати рівняння $|x| = a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x = \pm a$; 2) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 7b. Розв'язати нерівність $|x| > a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$;

2) при $a < 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 7с. Розв'язати нерівність $|x| < a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-a, a)$; 2) при $a \leq 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 7d. Розв'язати нерівність $|x| \geq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$;

2) при $a \leq 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 7е. Розв'язати нерівність $|x| \leq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [-a, a]$; 2) при $a = 0$ $x = 0$;

3) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Приклад 7а. Розв'язати рівняння $|x| = a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x = \pm a$; 2) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 7b. Розв'язати нерівність $|x| > a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$;

2) при $a < 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 7c. Розв'язати нерівність $|x| < a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-a, a)$; 2) при $a \leq 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 7d. Розв'язати нерівність $|x| \geq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$;

2) при $a \leq 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 7e. Розв'язати нерівність $|x| \leq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [-a, a]$; 2) при $a = 0$ $x = 0$;

3) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Приклад 7а. Розв'язати рівняння $|x| = a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x = \pm a$; 2) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 7b. Розв'язати нерівність $|x| > a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$;

2) при $a < 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 7с. Розв'язати нерівність $|x| < a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-a, a)$; 2) при $a \leq 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 7d. Розв'язати нерівність $|x| \geq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$;

2) при $a \leq 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 7е. Розв'язати нерівність $|x| \leq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [-a, a]$; 2) при $a = 0$ $x = 0$;

3) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Приклад 7а. Розв'язати рівняння $|x| = a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x = \pm a$; 2) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 7b. Розв'язати нерівність $|x| > a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$;

2) при $a < 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 7с. Розв'язати нерівність $|x| < a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-a, a)$; 2) при $a \leq 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 7d. Розв'язати нерівність $|x| \geq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$;

2) при $a \leq 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 7е. Розв'язати нерівність $|x| \leq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [-a, a]$; 2) при $a = 0$ $x = 0$;

3) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Приклад 7а. Розв'язати рівняння $|x| = a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x = \pm a$; 2) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 7b. Розв'язати нерівність $|x| > a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$;

2) при $a < 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 7с. Розв'язати нерівність $|x| < a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-a, a)$; 2) при $a \leq 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 7d. Розв'язати нерівність $|x| \geq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$;

2) при $a \leq 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 7е. Розв'язати нерівність $|x| \leq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [-a, a]$; 2) при $a = 0$ $x = 0$;

3) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Приклад 7а. Розв'язати рівняння $|x| = a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x = \pm a$; 2) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 7b. Розв'язати нерівність $|x| > a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$;

2) при $a < 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 7с. Розв'язати нерівність $|x| < a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-a, a)$; 2) при $a \leq 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 7d. Розв'язати нерівність $|x| \geq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$;

2) при $a \leq 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 7е. Розв'язати нерівність $|x| \leq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [-a, a]$; 2) при $a = 0$ $x = 0$;

3) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Приклад 7а. Розв'язати рівняння $|x| = a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x = \pm a$; 2) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 7б. Розв'язати нерівність $|x| > a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$;

2) при $a < 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 7с. Розв'язати нерівність $|x| < a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-a, a)$; 2) при $a \leq 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 7d. Розв'язати нерівність $|x| \geq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$;

2) при $a \leq 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 7е. Розв'язати нерівність $|x| \leq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [-a, a]$; 2) при $a = 0$ $x = 0$;

3) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Приклад 7а. Розв'язати рівняння $|x| = a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x = \pm a$; 2) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 7b. Розв'язати нерівність $|x| > a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$;

2) при $a < 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 7с. Розв'язати нерівність $|x| < a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-a, a)$; 2) при $a \leq 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 7d. Розв'язати нерівність $|x| \geq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$;

2) при $a \leq 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 7е. Розв'язати нерівність $|x| \leq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [-a, a]$; 2) при $a = 0$ $x = 0$;

3) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Приклад 7а. Розв'язати рівняння $|x| = a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x = \pm a$; 2) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 7б. Розв'язати нерівність $|x| > a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$;

2) при $a < 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 7с. Розв'язати нерівність $|x| < a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-a, a)$; 2) при $a \leq 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 7д. Розв'язати нерівність $|x| \geq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$;

2) при $a \leq 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 7е. Розв'язати нерівність $|x| \leq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [-a, a]$; 2) при $a = 0$ $x = 0$;

3) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Приклад 7а. Розв'язати рівняння $|x| = a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x = \pm a$; 2) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 7b. Розв'язати нерівність $|x| > a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$;

2) при $a < 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 7с. Розв'язати нерівність $|x| < a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-a, a)$; 2) при $a \leq 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 7d. Розв'язати нерівність $|x| \geq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$;

2) при $a \leq 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Приклад 7е. Розв'язати нерівність $|x| \leq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [-a, a]$; 2) при $a = 0$ $x = 0$;

3) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Приклад 8а. Розв'язати рівняння $\sqrt{x} = a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x = a^2$; 2) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 8б. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} > a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x > a^2$; 2) при $a < 0$ $x \geq 0$.

Приклад 8с. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} < a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [0, a^2)$; 2) при $a \leq 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 8д. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} \geq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \geq a^2$; 2) при $a \leq 0$ $x \geq 0$.

Приклад 8е. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} \leq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [0, a^2]$; 2) при $a = 0$ $x = 0$;

3) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Приклад 8а. Розв'язати рівняння $\sqrt{x} = a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x = a^2$; 2) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 8б. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} > a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x > a^2$; 2) при $a < 0$ $x \geq 0$.

Приклад 8с. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} < a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [0, a^2)$; 2) при $a \leq 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 8д. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} \geq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \geq a^2$; 2) при $a \leq 0$ $x \geq 0$.

Приклад 8е. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} \leq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [0, a^2]$; 2) при $a = 0$ $x = 0$;

3) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Приклад 8а. Розв'язати рівняння $\sqrt{x} = a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x = a^2$; 2) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 8б. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} > a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x > a^2$; 2) при $a < 0$ $x \geq 0$.

Приклад 8с. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} < a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [0, a^2)$; 2) при $a \leq 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 8д. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} \geq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \geq a^2$; 2) при $a \leq 0$ $x \geq 0$.

Приклад 8е. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} \leq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [0, a^2]$; 2) при $a = 0$ $x = 0$;

3) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Приклад 8а. Розв'язати рівняння $\sqrt{x} = a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x = a^2$; 2) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 8б. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} > a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x > a^2$; 2) при $a < 0$ $x \geq 0$.

Приклад 8с. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} < a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [0, a^2)$; 2) при $a \leq 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 8д. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} \geq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \geq a^2$; 2) при $a \leq 0$ $x \geq 0$.

Приклад 8е. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} \leq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [0, a^2]$; 2) при $a = 0$ $x = 0$;

3) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Приклад 8а. Розв'язати рівняння $\sqrt{x} = a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x = a^2$; 2) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 8б. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} > a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x > a^2$; 2) при $a < 0$ $x \geq 0$.

Приклад 8с. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} < a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [0, a^2)$; 2) при $a \leq 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 8д. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} \geq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \geq a^2$; 2) при $a \leq 0$ $x \geq 0$.

Приклад 8е. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} \leq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [0, a^2]$; 2) при $a = 0$ $x = 0$;

3) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Приклад 8а. Розв'язати рівняння $\sqrt{x} = a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x = a^2$; 2) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 8б. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} > a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x > a^2$; 2) при $a < 0$ $x \geq 0$.

Приклад 8с. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} < a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [0, a^2)$; 2) при $a \leq 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 8д. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} \geq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \geq a^2$; 2) при $a \leq 0$ $x \geq 0$.

Приклад 8е. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} \leq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [0, a^2]$; 2) при $a = 0$ $x = 0$;

3) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Приклад 8а. Розв'язати рівняння $\sqrt{x} = a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x = a^2$; 2) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 8б. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} > a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x > a^2$; 2) при $a < 0$ $x \geq 0$.

Приклад 8с. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} < a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [0, a^2)$; 2) при $a \leq 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 8д. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} \geq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \geq a^2$; 2) при $a \leq 0$ $x \geq 0$.

Приклад 8е. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} \leq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [0, a^2]$; 2) при $a = 0$ $x = 0$;

3) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Приклад 8а. Розв'язати рівняння $\sqrt{x} = a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x = a^2$; 2) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 8б. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} > a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x > a^2$; 2) при $a < 0$ $x \geq 0$.

Приклад 8с. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} < a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [0, a^2)$; 2) при $a \leq 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 8д. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} \geq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \geq a^2$; 2) при $a \leq 0$ $x \geq 0$.

Приклад 8е. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} \leq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [0, a^2]$; 2) при $a = 0$ $x = 0$;

3) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Приклад 8а. Розв'язати рівняння $\sqrt{x} = a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x = a^2$; 2) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 8б. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} > a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x > a^2$; 2) при $a < 0$ $x \geq 0$.

Приклад 8с. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} < a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [0, a^2)$; 2) при $a \leq 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 8д. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} \geq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \geq a^2$; 2) при $a \leq 0$ $x \geq 0$.

Приклад 8е. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} \leq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [0, a^2]$; 2) при $a = 0$ $x = 0$;

3) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Найпростіші рівняння і нерівності з параметром

Приклад 8а. Розв'язати рівняння $\sqrt{x} = a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x = a^2$; 2) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 8б. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} > a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a \geq 0$ $x > a^2$; 2) при $a < 0$ $x \geq 0$.

Приклад 8с. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} < a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [0, a^2)$; 2) при $a \leq 0$ $x \in \emptyset$.

Приклад 8д. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} \geq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \geq a^2$; 2) при $a \leq 0$ $x \geq 0$.

Приклад 8е. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} \leq a$ з параметром a .

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in [0, a^2]$; 2) при $a = 0$ $x = 0$;

3) при $a < 0$ $x \in \emptyset$.